U. Timi oara
1107

WILLIAM KNEALE ◆ MARTHA KNEALE

DEZVOLTAREA LOGICII

✻ ✻

DACIA

WILLIAM KNEALE
MARTHA KNEALE

●

DEZVOLTAREA LOGICII

* *

CUPRINS

VI. ABSTRACȚIA MATEMATICĂ 7

1. Geometrie și axiomatică 7
2. Numere și funcții 19
3. Boole și algebra logicii 33
4. Dezvoltări ulterioare ale algebrei booleene 49
5. Teoria relațiilor: De Morgan și Peirce 57

VII. NUMERE, MULȚIMI ȘI ȘIRURI 64

1. Frege și contemporanii săi 64
2. Teoria mulțimilor a lui Cantor 67
3. Frege despre precursorii săi 72
4. Definițiile lui Frege pentru numerele naturale 85
5. Șirul numerelor: Dedekind și Peano 97

VIII. LOGICA GENERALĂ A LUI FREGE 108

1. *Begriffsschrift* 108
2. Sens și referință: obiecte și funcții 124
3. Logica din *Grundgesetze* 134
4. Realizările lui Frege 141

IX. DEZVOLTĂRI FORMALE DUPĂ FREGE 145

1. Varietăți de simbolism 145
2. Metode de prezentare: axiome și reguli 157
3. Deducție naturală și desfășurare 171
4. Logica modală 182
5. Propuneri de logici alternative 201

X. FILOSOFIA LOGICII DUPĂ FREGE 210

1. Expresie, desemnare și adevăr 210
2. Teoria descripțiilor și varietatea desemnărilor 228

3. Problemele intensionalității 236
4. Identitate, funcții și clase 253
5. Necesitate și limbaj 263

XI. FILOSOFIA MATEMATICII DUPĂ FREGE 287

1. Paradoxurile teoriei mulțimilor 287
2. Teoria tipurilor logice a lui Russell 292
3. Intuiționismul lui Brouwer 308
4. Programul hilbertian al metamatematicii 318

XII. TEORIA SISTEMELOR DEDUCTIVE 325

1. Metateoria logicii primare 325
2. Metateoria logicii generale 338
3. Incompletabilitatea aritmeticii formale 350
4. Problema deciziei 363
5. Locul logicii printre științe 376

Bibliografie selectivă 382

Indice 389

Anexa 401

VI

ABSTRACȚIA MATEMATICĂ

1. *Geometrie și axiomatică*

Pentru greci, partea cea mai importantă a matematicii era geometria, iar în *Elementele* lui Euclid, cărțile VII—X, găsim chiar teoreme de aritmetică pură, cum ar fi cele cu privire la numerele prime, prezentate ca propoziții cu privire la comensurabilitatea sau incomensurabilitatea unor segmente liniare. Unii consideră că relativa neglijare a celorlalte ramuri ale matematicii de către greci ar fi fost cauzată de deficiențele sistemului lor de numerație; dar pare mai probabil că geometria s-a dezvoltat anterior, deoarece efortul de abstracție pe care îl pretinde nu este atît de mare ca cel necesar pentru algebră și analiză. În prezent vedem că pînă și matematicienii din perioadele mult mai tîrzii au întîmpinat dificultăți în eliberarea de legătura excesivă cu intuiția spațială. Oricum ar fi, pentru multe secole *Elementele* lui Euclid au fost un standard de rigoare în ce privește demonstrația și noi trebuie să începem prin a examina liniile mari ale operei sale, deși subiectul principal al acestui capitol îl constituie dezvoltările ulterioare.

Evident, nu Euclid a descoperit toate teoremele pe care le prezintă în *Elemente*. Au existat tratate de geometrie înainte de începutul celui de-al treilea veac î.e.n., cînd a lucrat el; cunoaștem, de exemplu, că eleganta teorie a rapoartelor pe care o utilizează în cartea a V-a vine de la Eudoxus, un contemporan mai tînăr al lui Platon. Dar el și-a cucerit gloria datorită măiestriei pe care a atins-o în ce privește derivarea tuturor descoperirilor anterioare dintr-un număr relativ redus de noțiuni comune κοιναὶ ἔννοιαι și postulate (αἰτήματα). Noțiunile comune sînt propoziții considerate fundamentale în orice știință, cum ar fi, de exemplu, că întregul este mai mare decît oricare parte a lui, iar postulatele sînt cinci propoziții specifice geometriei pe care trebuie să le admitem de la bun început. Ulterior, cele două mulțimi de propoziții primitive au fost uneori considerate împreună sub numele de axiome. Trebuie să admitem că în diferite locuri Euclid face uz de propoziții geometrice pe care nici nu le include printre axiomele sale, nici nu le demonstrează ca rezultînd din acestea; de exemplu, în demonstrația primei propoziții din cartea I el admite ca dat, că cele

două cercuri trasate în jurul a două extremități ale unui segment liniar avînd raza egală în lungime cu acest segment trebuie să se intersecteze în două puncte. Dar nu încape îndoială că el intenționa să-și așeze toate ipotezele extralogice la început și să derive teoremele din aceste ipoteze numai cu ajutorul logicii. Căci orice altceva ar fi fost un compromis inconsistent cu acea dorință de rigoare care străbate în mod evident întreaga sa operă. Utilizarea unei figuri ne poate ajuta să ne concentrăm atenția atunci cînd urmărim o demonstrație, iar pentru motive psihologice ea poate să fie chiar necesară în procesul de descoperire; dar dacă acceptăm propozițiile numai pentru că ele par evidente, atunci cînd examinăm un desen, în realitate nu facem decît să adăugăm ceva, fără a ne da seama, la axiomele noastre, iar aceasta contravine spiritului geometriei grecilor.

Euclid și toți urmașii săi, pînă mai acum o sută de ani, au presupus că postulatele sale sînt adevăruri universale și necesare cu privire la spațiul fizic. Dar între ele figurează unul care părea mai complicat decît celelalte. Acesta este faimosul postulat al paralelelor: „Dacă o dreaptă secantă la alte două determină unghiuri interioare de aceeași parte mai mici decît două unghiuri drepte, atunci cele două drepte, dacă le prelungim la infinit, se întîlnesc de acea parte în care unghiurile sînt mai mici decît două unghiuri drepte". În antichitate, atît Ptolomeu cît și Proclus au încercat să arate că această propoziție nu ar trebui să figureze ca postulat deoarece ea poate fi demonstrată ca teoremă, iar geometrii de mai tîrziu au făcut multe încercări asemănătoare pentru a îmbunătăți opera lui Euclid[1]. Una din cele mai interesante a fost cartea lui Saccheri din 1733, intitulată *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*. După cum spune autorul[2], această lucrare se întemeiază pe principiul *consequentia mirabilis*, pe care el l-a utilizat în a sa *Logica Demonstrativa*; și deși el nu a reușit să stabilească, așa cum își închipuia, caracterul de adevăr necesar al postulatului paralelelor, lucrarea sa a devenit renumită ca fiind prima care conține teoreme de geometrie neeuclidiană.

Cei mai mulți din primii geometri care au susținut că au demonstrat postulatul paralelelor presupuneau ca premisă explicită sau implicită diferite alte propoziții cu aceeași forță deductivă ca aceea pe care încercau s-o demonstreze. De exemplu, John Wallis presupunea că pentru orice figură dată este posibil să existe o figură asemenea de orice mărime dorită. Încercarea lui Saccheri a fost mult mai ingenioasă:

---

[1] T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, I, p. 202 și următoarea prezintă încercările semnificative.

[2] P. 99.

el dorea să arate că postulatul paralelelor era un adevăr necesar deoarece rezulta din propria sa negaţie. Pentru a obţine această negaţie într-o formă convenabilă, el considera nu enunţul lui Euclid, ci un enunţ echivalent, sugerat de o figură din ediţia Clavius a lui Euclid. Din extremităţile unui segment liniar AB ridicăm, de aceeaşi parte a segmentului, două perpendiculare de aceeaşi lungime, AC şi BD, iar punctele C şi D le unim apoi printr-o dreaptă. În patrulaterul rezultat, unghiurile C şi D trebuie să fie egale şi se poate arăta că postulatul paralelelor al lui Euclid este echivalent cu ipoteza că ambele aceste unghiuri sînt unghiuri drepte. Drept care, Saccheri examinează celelalte două ipoteze care se pot concepe, şi anume: (I) că unghiurile sînt obtuze şi (II) că ele ar fi ascuţite. Aceste ipoteze corespund respectiv la cele două forme ale geometriei neeuclidiene care mai tîrziu au fost denumite geometrie eliptică şi geometrie hiperbolică. În cursul investigaţiei sale, el demonstrează unele teoreme caracteristice ale acestor geometrii. De exemplu, în propoziţia IX el arată că în ipoteza unghiului obtuz suma unghiurilor interne ale unui triunghi este totdeauna mai mare decît două unghiuri drepte, iar în ipoteza unghiului ascuţit această sumă este totdeauna mai mică. Dar încercarea sa de a demonstra postulatul paralelelor pornind de la considerarea celor două alternative posibile nu mai este atît de fericită. În cazul întîi, el pare să ajungă la rezultatul dorit cu multă uşurinţă, arătînd în propoziţia XII că ipoteza unghiului obtuz impune postulatul paralelelor (şi este aşadar autocontradictorie, deoarece postulatul paralelelor impune ipoteza unghiului drept). Dar el reuşeşte aceasta numai presupunînd în mod tacit că putem avea segmente liniare de orice mărime dorită. De fapt, această ipoteză este incompatibilă cu ipoteza pe care o consideră, deoarece în geometria eliptică trebuie să apară un maxim al lungimilor segmentelor liniare. Cealaltă ipoteză îi dă mult mai mult de lucru, şi deşi mai departe el se exprimă ca şi cum totul ar fi legat de *consequentia mirabilis*, de fapt el nici măcar nu încearcă să arate că această alternativă impune postulatul paralelelor. Dar el susţine că demonstrează în propoziţia XXIII că această alternativă implică o consecinţă autocontradictorie. Desigur că dacă demonstraţia lui ar fi satisfăcătoare, ea ar fi suficientă, împreună cu propoziţia XII, pentru a stabili adevărul postulatului paralelelor; dar în raţionamentul său intervine o lacună.

Nu ştim în mod cert dacă opera lui Saccheri a avut vreo influenţă asupra matematicienilor care au dezvoltat geometria neeuclidiană în secolul al XIX-lea, dar cartea lui şi-a croit drum într-un şir de biblioteci şi a fost remarcată în unele lucrări de referinţă, cum ar fi lucrarea lui Montucla *Histoire des mathématiques* din 1758 sau aceea a lui Klügel *Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demon-*

strandi Recensio din 1763[3]. Poate că astfel a atras ea atenţia lui Gauss (1777—1855), care a fost primul care a recunoscut posibilitatea dezvoltării unei geometrii neeuclidiene într-un mod consistent şi a considerat că această problemă trebuie să fie rezolvată observînd dacă în spaţiul fizic suma unghiurilor interioare dintr-un triunghi este sau nu egală cu două unghiuri drepte. Dar în acest domeniu al cercetării matematice, ca şi în multe altele în care a făcut descoperiri strălucite, Gauss n-a publicat nimic. Prima lucrare tipărită care dezvoltă o formă de geometrie neeuclidiană ca scop în sine a fost un memoriu al lui Lobacevski publicat în 1826. Acest memoriu se ocupa cu ipoteza unghiului ascuţit (adică cu geometria hiperbolică, în care printr-un punct trec două paralele la o dreaptă dată). Dezvoltarea ipotezei unghiului obtuz (adică a geometriei eliptice, în care printr-un punct dat nu se pot duce paralele la o dreaptă dată iar orice dreaptă dacă este prelungită revine la ea însăşi) avea să-l aştepte pe Riemann. În realitate, abia publicarea postumă, în 1867, a prelegerii inaugurale a lui Riemann din 1854, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen*, i-a determinat pe matematicienii puri să ia în serios geometria neeuclidiană; chiar şi mai tîrziu, speculaţiile lui Riemann şi ale elevului său Clifford cu privire la posibilitatea de a utiliza geometria neeuclidiană în fizică nu au fost luate în considerare timp de o întreagă generaţie.

Pentru logician, aceste rezultate din geometrie sînt importante datorită atenţiei pe care au atras-o asupra axiomaticii, adică a teoriei mulţimilor de postulate. Dacă s-ar fi arătat că s-a introdus o contradicţie prin negarea postulatului paralelelor al lui Euclid într-un sistem care reţinea celelalte axiome ale sale, s-ar fi demonstrat prin *reductio ad absurdum* că postulatul paralelelor rezultă din celelalte axiome. Pe de altă parte, eşecul încercării de a descoperi vreo contradicţie nu este ca atare suficient pentru a demonstra consistenţa geometriei neeuclidiene. Într-adevăr, ar fi necesar să se demonstreze că niciodată nu s-ar putea deriva vreo contradicţie. Iată o exigenţă foarte mare şi, după cum vom vedea mai încolo, greu de satisfăcut. Dar, fără a merge aşa de departe, putem încerca să stabilim respectabilitatea geometriei neeuclidiene arătînd că ea nu poate fi inconsistentă fără ca şi geometria euclidiană să fie inconsistentă; tocmai acest rezultat s-a obţinut de fapt în secolul trecut prin descoperirea posibilităţilor de reprezentare a geometriei neeuclidiene în cadrul sistemului lui Euclid. Dintre aceste reprezentări, cea mai cunoscută este aceea în care se presupune că în lista ce urmează expresia din stînga are în

[3] Corrado Segre, „Conjetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidea", *Atti della R.A. delle Scienze di Torino*, XXXVIII (1903).

geometria eliptică același sens pe care-l are expresia corespunzătoare din dreapta în geometria euclidiană:

plan	suprafață a unei sfere
linie dreaptă	arc mare de cerc
unghi format de două linii drepte	unghi format de planele a două cercuri mari.

Dacă celelalte expresii utilizate în geometria eliptică cu două dimensiuni păstrează semnificația obișnuită pentru asemenea expresii într-o geometrie euclidiană, atunci sistemul în ansamblu se transformă într-o geometrie pe suprafața unei sfere euclidiene, un studiu care este familiar în navigație. Toate propozițiile specifice ale geometriei eliptice cu două dimensiuni sînt valabile în noua interpretare. Dintr-un punct dat nu se poate duce nici o paralelă la o dreaptă dată; printre lungimile dreptelor există una maximă; suma unghiurilor interioare dintr-un triunghi este mai mare decît două unghiuri drepte. De aci rezultă că dacă geometria lui Euclid este consistentă, atunci și geometria eliptică cu două dimensiuni[4] este consistentă. Utilizînd interpretări convenabile dar mult mai complicate, Felix Klein și alții au arătat că atît geometria eliptică cu trei dimensiuni cît și geometria hiperbolică cu trei dimensiuni se pot reprezenta în geometria euclidiană. Aceasta nu înseamnă că geometriile neeuclidiene sînt identice cu porțiuni ale geometriei euclidiene ci numai că ele pot fi *aplicate* în interiorul geometriei euclidiene întrucîtva la fel cum suprafața Franței ar putea fi aplicată pe o parte a suprafeței Angliei.

Ce am putea spune despre statutul postulatului paralelelor? Dacă geometria lui Euclid este consistentă, atunci este clar că nu poate să apară o contradicție *logică* nici prin negarea acestui postulat și nici măcar prin conjuncția negației sale cu celelalte axiome ale lui Euclid, ceea ce înseamnă de fapt că ea este logic independentă de aceste axiome. Dacă cineva urmărește să susțină că postulatul este adevărat cu privire la liniile drepte din spațiul fizic, s-ar putea să aibă dreptate; matematicianul pur nu se ocupă însă cu asemenea probleme. Dezvoltarea geometriilor neeuclidiene a produs în mod inevitabil o schimbare de atitudine a matematicienilor față de geometrie, inclusiv față de aceea a lui Euclid. Odată ce există diferite alternative, toate merită să fie studiate și nu este sarcina matematicianului să aserteze axiome care să determine vreuna din aceste alternative. Sarcina sa este de a spune doar ce urmează *în mod logic* dintr-o mulțime dată de axiome. Consi-

[4] Uneori denumirea de „eliptică" este rezervată pentru geometria în care se identifică punctele de la antipozi; în acest caz, sistemul considerat mai sus se numește geometrie sferică.

derarea geometriei tradiționale în acest chip a trebuit în mod natural să conducă la cererea de a se formula în mod explicit toate ipotezele și presupunerile sale, adică de a se aplica în mod riguros programul pe care l-am atribuit lui Euclid. Rezultatele s-au putut vedea în prezentarea modernă a geometriei lui Euclid, ca de exemplu în *Grundlagen der Geometrie* din 1899 a lui Hilbert. Dar acest fel de a considera geometria a condus, de asemenea, și la o abstracție care s-a îndepărtat mult de preocupările lui Euclid.

Atunci cînd o propoziție rezultă logic din alta, ar trebui să fie posibil să formulăm cele două propoziții astfel încît să se vadă că relația dintre ele depinde numai de forma lor, adică de ceea ce se numește structura lor logică, spre deosebire de conținutul material specific. Or, aceasta se poate face pentru propozițiile din geometrie. În prezentările uzuale ale geometriei euclidiene forma axiomelor nu se pune lesne în evidență deoarece utilizăm anumite semne speciale ca „punctul", „dreapta", „planul", „se află pe", „între", „paralel cu" și „congruent", dar toate axiomele de care avem nevoie pentru geometria euclidiană obișnuită le putem scrie fără a utiliza vreun semn particular, cu excepția cuvîntului „punct" și a expresiei „*A* este la aceeași distanță de B cum este C față de D" care exprimă congruența ca o relație cu patru termeni între puncte. Astfel, în loc de „C este coliniar (se află pe aceeași dreaptă) cu A și B" putem spune „dacă P și Q sînt două puncte oarecare astfel încît A este la aceeași distanță de P cum este A față de Q, iar B este la aceeași distanță de P cum este B față de Q, atunci C este la aceeași distanță de P cum este C față de Q". Iar în loc de „C este între A și B" putem spune „C este coliniar cu A și B și există trei puncte P, Q și R astfel încît (I) P este coliniar cu A și B, și (II) P este la aceeași distanță de A cum este P față de B, (III) Q este la aceeași distanță de P cum este P față de A, (IV) R este la aceeași distanță de P cum este P față de A, (V) C este coliniar cu Q și R și (VI) C este la aceeași distanță de Q cum este C față de R". În loc de „linia AB este paralelă cu linia CD" putem spune: „clasa punctelor coliniare cu A și B și clasa punctelor coliniare cu C și D nu au nici un membru în comun". Nici măcar cuvîntul „punct" nu e necesar să fie folosit; într-adevăr, putem fără vreo primejdie să lăsăm să se înțeleagă că lucrurile sau elementele pe care le notăm cu cîte o literă sînt entități convenabile în calitate de termeni ai relației cvaternare pe care am menționat-o în axiome, natura acestor entități fiind indiferentă. Evident, în acest mod este foarte anevoios să scriem o mulțime de formule axiomatice suficientă pentru geometria euclidiană obișnuită, dar dacă aceasta ar fi sarcina, este clar că în afară de expresia „A este la aceeași distanță de B cum este C față de D" unicele cuvinte utilizate ar fi acelea pe care le rezervăm pentru a exprima forma,

adică „şi", „sau", „nu", „dacă", „orice", „există", precum şi litere care servesc drept variabile. Deoarece teoremele se pot exprima şi ele în aceeaşi notaţie, putem să stabilim în mod neîndoielnic că implicarea teoremelor de către axiome nu depinde de semnificaţia expresiei „A este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D" atunci cînd o aplicăm la lucrurile pe care le percepem.

Dacă am ajuns atît de departe, putem să facem încă un pas şi să spunem că pentru geometria pură semnificaţia uzuală a expresiei de mai sus este cu totul nerelevantă. Dacă am avea o altă expresie cu patru locuri libere, care să-i poată fi substituită în mod consistent în toate formulele axiomelor, atunci am putea substitui acea expresie şi în formulările teoremelor, fără ca să se schimbe ceva în relaţiile dintre teoreme şi axiome. În propoziţiile sale atît de abstracte, geometrul nu afirmă decît că orice relaţie cu patru termeni care satisface toate condiţiile logice prescrise în formulările axiomelor trebuie să satisfacă şi toate condiţiile logice stipulate în toate formulările teoremelor; dacă îi place, el poate să sublinieze acest lucru utilizînd în locul expresiei de mai sus o singură literă, în mare măsură aşa cum Aristotel folosea literele în formularea principiilor silogisticii sale. Condiţiile exprimate în diferitele formule ale geometriei de către celelalte semne sînt de o complexitate pe care Aristotel nu a luat-o în consideraţie, dar cu toate acestea ele sînt pur logice.

Uneori se spune că formulele axiomelor unui sistem de geometrie, luate toate la un loc, ar constitui o *definiţie implicită* a semnelor geometrice particulare care figurează în ele. Acest fel de a vorbi, care a fost introdus încă în 1818 de către J. D. Gergonne[5], este util dar poate conduce la neînţelegeri. Formulele axiomelor unui sistem geometric definesc o expresie extralogică pe care o conţine numai în sensul că ele delimitează domeniul logic în care trebuie să se afle semnificaţia acestei expresii. Într-adevăr, ele impun doar condiţii formale; şi deşi un geometru care utilizează expresia „A este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D", în lucrările sale de specialitate nu trebuie să se ocupe de nimic în afară de condiţiile formale pe care le satisface această relaţie de congruenţă; în utilizarea ei uzuală expresia are o semnificaţie care nu este epuizată de către aceste condiţii. Dacă lucrurile n-ar sta astfel, n-ar avea sens să vorbim de o aplicare a geometriei la lumea pe care o percepem: doar de o asemenea aplicare depinde stabilirea unei relaţii perceptibile care satisface o mulţime de condiţii formale fără a fi epuizată de ele. Pe scurt, o inteligenţă pură, care nu

[5] „Essai sur la théorie des définitions", *Annales de mathématiques*, IX (1818) pp. 1—35, în special p. 23.

percepe lucrurile din spațiul fizic, ar putea studia geometria în mod abstract, dar cunoașterea geometriei nu i-ar putea servi de înlocuitor al percepției care îi lipsește. Odată clarificată această chestiune, vedem că dezvoltarea geometriei neeuclidiene nu respinge — cum au crezut unii filosofi — vechiul punct de vedere al lui Euclid și Kant, după care postulatul paralelelor este un adevăr necesar referitor la spațiul pe care îl percepem. Într-adevăr, se poate argumenta cel puțin că condițiile logice prescrise de către axiomele geometriei euclidiene au loc cu necesitate pentru relația de congruență percepută. Dacă însă lucrurile stau astfel, enunțul acestei valabilități nu constituie un adevăr al logicii formale și deci nu este un adevăr al geometriei în sensul în care utilizează în prezent cuvîntul „geometrie" specialiștii în matematica pură. Pentru scopurile matematicii este suficient ca condițiile prescrise de axiomele geometriei neeuclidiene să fie consistente, adică să nu conducă la autocontradicție, iar procedura de reprezentare sau aplicare a arătat că nici geometria eliptică, nici cea hiperbolică nu pot fi inconsistente fără ca și axiomele geometriei euclidiene să fie inconsistente.

Atunci cînd în matematica pură intervine cuvîntul „spațiu" și alte cuvinte asemănătoare, ele se referă la scheme abstracte de ordonare care pot fi exemplificate în mare măsură prin diferite sisteme de obiecte. Desigur că studiile geometrice au început cu luarea în considerare a relațiilor din spațiul fizic, dar ele au progresat pînă la luarea în considerare a unor scheme care nu pot fi vizualizate. Această tendință spre abstracție poate fi detectată deja în geometriile neeuclidiene pe care le-am menționat, dar ea este și mai evidentă în geometriile cu multe dimensiuni. Asemenea geometrii se pot construi „sintetic", așa cum a făcut-o Euclid, dar abordarea cea mai lesnicioasă a acestor noțiuni este aceea promovată de către Descartes în geometria „analitică". Atunci cînd trasăm grafice, concepem fiecare punct al hîrtiei noastre cu pătrate ca fiind determinat de către două numere, unul din ele fiind o valoare a variabilei x, iar celălalt o valoare a variabilei y, și spunem că o linie de pe hîrtie corespunde cu o anumită relație funcțională între aceste două variabile. Astfel, o linie dreaptă este graficul unei ecuații de formă $y = ax + b$, deoarece fiecare punct de pe linie este asociat, datorită sistemului de referință, cu un cuplu de numere care satisfac o asemenea ecuație. Avem aici o interpretare a geometriei euclidiene cu două dimensiuni, potrivit căreia punctele sînt perechi de numere iar relațiile dintre puncte sînt niște relații de felul celor studiate în algebră. O atare interpretare se poate aplica ușor și geometriei euclidiene cu trei dimensiuni. Dar nu trebuie să ne oprim aici. Aplicînd analogia în sens invers, putem, dacă dorim, să utilizăm limbajul geometriei pentru a descrie un sistem în care entitățile aflate în

relaţie sînt mulţimi de valori pentru patru variabile sau chiar mai multe. Astfel, dacă (x_1, y_1, z_1, w_1) şi (x_2, y_2, z_2, w_2) reprezintă două mulţimi de valori pentru cele patru variabile x, y, z şi w, putem eventual să găsim convenabilă utilizarea cuvîntului „distanţă" pentru cantitatea reprezentată prin

$$\sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]}.$$

Indiferent dacă abordează sau nu geometria multidimensională pe calea deschisă de către Descartes, matematicienii ataşează o interpretare numerică formulelor-axiome pentru demonstrarea consistenţei diferitelor geometrii pe care ei le construiesc în mod axiomatic. Se poate arăta că admiterea geometriei eliptice şi hiperbolice cu trei dimensiuni este consistentă în ipoteza că geometria euclidiană cu trei dimensiuni este consistentă, iar întrebarea cu privire la consistenţa acesteia din urmă ar putea părea excesivă. Dar nu este deloc evident că spaţiul fizic ar fi spaţiul euclidian în sensul că ar satisface toate axiomele lui Euclid. Nu putem, de exemplu, să susţinem cu seriozitate că percepem o infinitate de puncte situate dincolo de un punct dat, sau o infinitate de puncte situată între puncte date ; dacă spunem că spaţiul fizic este totuşi euclidian în deplinul înţeles al cuvîntului, trebuie să susţinem că cunoaştem aceasta ca un adevăr necesar relevat prin intuiţie spaţială. În cursul secolului al XIX-lea, asemenea susţineri au devenit suspecte, astfel încît s-au făcut încercări de a elibera geometria de balastul dependenţei de datele simţurilor. Pentru matematician, demonstraţiile de consistenţă a mulţimilor de axiome cu ajutorul interpretărilor numerice au marele merit de a rămîne în întregime în cadrul matematicii.

Consistenţa este prima pretenţie faţă de orice mulţime de axiome. Într-adevăr, o conjuncţie de propoziţii inconsistente ar atrage după sine orice altă propoziţie, după cum au remarcat cu privire la *consequentiae* autorii din evul mediu, iar din cercetarea unui sistem în care negaţia fiecărei teoreme este ea însăşi o teoremă nu avem nimic de învăţat. Independenţa reciprocă a axiomelor nu este esenţială în acelaşi mod. Cu alte cuvinte, nu se poate spune că un sistem deductiv nu mai are valoare atunci cînd se descoperă că una dintre axiome poate fi derivată din celelalte. Dar este evident lipsit de eleganţă să introducem ca axiomă ceva care poate fi demonstrat ca teoremă. În afară de aceasta, demonstraţiile de independenţă sînt necesare pentru o bună înţelegere a structurii sistemului investigat. Ambele chestiuni sînt bine ilustrate de istoricul postulatului paralelelor. În prezent, pentru a demonstra că o axiomă este independentă de celelalte axiome ale unei

mulțimi date este suficient să arătăm că negația ei este consistentă cu mulțimea acestor alte axiome; or, în acest scop geometrul folosește o dată mai mult metoda interpretării numerice.

Dacă două interpretări diferite de speță oarecare ale semnelor extralogice care figurează într-o mulțime de formule axiomatice conduc amîndouă la adevăruri și dacă sistemele de lucruri descrise de formule în aceste interpretări sînt astfel legate încît pentru fiecare entitate* dintr-o interpretare corespunde o singură entitate din cealaltă, spunem că cele două interpretări sînt izomorfe. Dacă, în plus, *toate* rezultatele interpretărilor posibile (interpretări care uneori se mai numesc modele) pentru o anumită mulțime de formule axiomatice sînt izomorfe între ele, atunci spunem că mulțimea axiomelor este categorică sau monomorfă. Această noțiune îi era familiară lui Dedekind încă în 1887[6], dar denumirea de „categoric" a fost introdusă de Veblen în 1904, la propunerea logicianului Dewey[7]. Probabil că Veblen și Dewey se gîndeau la contrastul dintre propozițiile categorice și cele disjunctive; dar la origine „categoric" înseamnă mai curînd „predicativ" decît „nedisjunctiv" și în plus acest cuvînt are dezavantajul de a fi suprasolicitat în alte contexte. De aceea pare mai convenabil să-l urmăm pe Carnap, vorbind mai degrabă despre contrastul dintre mulțimile de axiome monomorfe și cele polimorfe[8].

Se poate spune că o mulțime monomorfă de axiome îndeplinește complet programul definiției implicite. Deși formulele prin care este prezentată o asemenea definiție pot admite interpretări variate, acestea din urmă trebuie să aibă toate aceeași structură logică și, ca atare, sînt indiscernabile prin criterii pur formale. Dacă o mulțime de axiome este monomorfă, atunci nu are sens să încercăm alte specificări ale semnificației semnelor extralogice care intervin în formulele ei, adăugînd diferite formule de axiome cu același simbolism. În adevăr, oricare formulă am alege, fie ea însăși, fie negația ei, este deja o consecință a formulelor axiomatice în sensul că este adevărată pentru oricare interpretare pe care o admit ele. Ceea ce nu înseamnă însă că o mulțime monomorfă de axiome nu poate fi extinsă cu utilitate în nici un fel. Monomorfismul este întotdeauna relativ la un anumit aparat de concepte primitive, după cum se poate vedea cel mai clar prin examinarea unui alt exemplu din geometrie.

---

* Aici, prin *entități* (în original: „items") autorii au în vedere elementele, proprietățile, relațiile și legile de compoziție ale sistemelor respective (Nota trad.).

[6] *Was sind und was sollen die Zahlen?* § 134.

[7] „A System of Axioms for Geometry", *Transactions of the American Mathematical Society*, V (1904), pp. 343–381.

[8] *Einführung in die symbolische Logik*, § 42 C.

În cursul întregului secol al XIX-lea, geometria s-a dezvoltat nu numai prin examinarea alternativelor posibile în ce privește postulatul paralelelor al lui Euclid sau prin înlăturarea restricției acestuia în ce privește numărul dimensiunilor (trei), dar și prin distincția care s-a făcut cu privire la diferitele niveluri ale proprietăților geometrice. Se știa de mult timp că există anumite proprietăți ale figurilor, care rămîn valabile chiar dacă figurile sînt supuse la anumite tipuri de transformări. De exemplu, Pascal (care a folosit metode propuse de Desargues, în particular utilizarea punctelor de la infinit) a demonstrat în secolul al XVII-lea că dacă un hexagon este înscris într-o secțiune conică, atunci cele trei puncte în care se intersectează laturile opuse trebuie să se afle pe o dreaptă. Deoarece teorema este valabilă nu numai pentru un hexagon înscris într-un cerc dar și pentru orice hexagon care se obține proiectînd figura respectivă pe un plan dintr-un punct, este clar că aici avem de-a face nu cu o proprietate metrică, ci cu una proiectivă ; ceea ce revine la a spune că teorema aparține acelui nivel al geometriei în care se examinează pozițiile relative fără a face să intervină măsurătoarea. Există alte proprietăți ale figurilor, care rămîn în vigoare chiar în cazul unor transformări mai drastice decît proiecția. Dacă, de exemplu, desenăm un pătrat în interiorul unui cerc, pe o peliculă de cauciuc, figura care era inițial interioară rămîne interioară, deși poate înceta să mai fie pătrat sau chiar rectilinie. Aici avem de-a face cu o proprietate care ține de nivelul și mai adînc al topologiei, în cadrul căreia nu numai că nu se ține seama de distanță, dar nici măcar de deosebirea dintre o linie dreaptă și una curbă. Cînd definim o geometrie de un nivel dat, este convenabil să utilizăm limbajul lui Klein și să spunem că geometria studiază toate proprietățile care sînt invarianți față de unele operații care țin de un anumit grup. Prin „operații" înțelegem aici transformări cum ar fi translațiile și rotațiile în spațiu, proiecțiile paralele sau centrale, precum și deformările descrise mai sus ; iar prin „grup" înțelegem o mulțime de operații, astfel încît (*a*) rezultatul aplicării succesive a oricăror două operații din mulțime să fie și el o operație din această mulțime și (*b*) inversa oricărei operații din mulțime să fie de asemenea o operație din această mulțime. Întîmplător, această noțiune de grup, care a fost concepută pentru prima oară de Galois (1811—1832), este una din cele mai înalte abstracții care în prezent își găsesc aplicație în multe și diferite domenii ale matematicii[9].

[9] În teoria abstractă a grupurilor, în care se presupune că elementele nu sînt neapărat întotdeauna operații, este necesar să se specifice separat că combinarea a trei elemente este asociativă și că există un element-identitate.

Pentru ţelurile noastre important este că mulţimea de axiome a unei geometrii de nivel mai coborît poate fi monomorfă deşi, desigur, ea nu implică toate teoremele care ţin de geometriile de nivel mai ridicat. Am văzut că propoziţiile geometriei metrice euclidiene obişnuite pot fi toate formulate cu ajutorul unui singur semn special pentru relaţia de congruenţă cu patru termeni. În acelaşi memoriu în care a introdus cuvîntul „categoric" pentru a descrie anumite mulţimi de axiome, Veblen arăta că toate propoziţiile unui sistem mai profund — numit geometrie descriptivă — ar putea fi formulate utilizînd un singur semn special pentru relaţia *între* cu trei termeni, adică relaţia de ordine serială. Deoarece „între" se poate defini cu ajutorul congruenţei iar geometria metrică conţine teoreme care nu intervin în geometria descriptivă, s-ar putea crede că o mulţime de axiome pentru aceasta din urmă ar trebui inevitabil să fie polimorfă. Dar lucrurile nu stau astfel. Mulţimea de axiome a lui Veblen pentru geometria descriptivă este monomorfă *relativ la relaţia „între"*. Dacă axiomele sale ar fi reformulate utilizînd definiţia lui „între" amintită mai sus, atunci mulţimea rezultată ar fi într-adevăr polimorfă, dar *relativ la congruenţă*.

Deoarece pentru ţelurile specificării o mulţime monomorfă de axiome nu poate fi extinsă în mod util cu ajutorul unor noi axiome exprimate în acelaşi simbolism, ea este în acest sens completă. Dar există un sens mai tare al cuvîntului „complet", iar în acest sens un sistem deductiv cu o mulţime monomorfă de axiome poate totuşi să fie incomplet. Pentru a înţelege această chestiune trebuie să concepem completitudinea ca fiind definită prin referire la demonstraţie şi legată de principiul terţului exclus aproape în acelaşi fel cum este consistenţa legată de principiul necontradicţiei. Să alegem o propoziţie a cărei expresie nu pretinde semne extralogice primitive, ci numai semnele existente într-o mulţime dată de axiome. Atunci, dacă mulţimea de axiome este consistentă, ea trebuie să nu permită atît demonstrarea acestei propoziţii, cît şi demonstrarea negaţiei ei. Iar dacă ea este completă în sensul tare pe care-l considerăm acum, ea trebuie să ne furnizeze fie demonstraţia propoziţiei, fie demonstraţia negaţiei ei. La prima vedere, această cerere de completitudine seamănă cu cererea de monomorfism pe care am menţionat-o mai sus, şi anume că axiomele trebuie să aibă drept consecinţă fie propoziţia dată, fie negaţia ei; dar în realitate ea este mai stringentă. În adevăr, se poate întîmpla ca o propoziţie exprimabilă în simbolismul unei mulţimi monomorfe de axiome să fie o consecinţă a axiomelor şi totuşi să nu poată fi dedusă din ele deoarece derivarea ar fi infinit de lungă şi deci nu ar fi o demonstraţie. Vom vedea mai tîrziu că de fapt aceasta este situaţia în unele porţiuni foarte importante ale matematicii.

2. *Numere și funcții*

Am văzut că demonstrațiile de consistență ale geometrilor utilizează în mod obișnuit interpretări numerice ale mulțimilor de axiome. Procedînd în acest fel, geometrii speră să elibereze știința lor de orice ipoteze extramatematice. Dar pe ce se întemeiază acea parte a matematicii care se ocupă cu numerele? Pentru a da o interpretare numerică satisfăcătoare oricărui sistem de geometrie care cuprinde noțiunea de continuitate, o presupune sau o implică, trebuie să utilizăm asemenea numere ca $\sqrt{2}$ și π, ceea ce încă în antichitate a ridicat unele semne de întrebare.

Printr-o argumentare care în prezent nu ne este clară, pitagoreicii se autosugestionau că au găsit cheia înțelegerii universului în noțiunea de *ratio*, adică în conceptul de raport dintre două numere naturale. Fără îndoială că ei au fost impresionați de importanța raportului în muzică și poate că au fost influențați de faptul că λόγος, cuvîntul grecesc pentru *ratio*, este în același timp cuvîntul obișnuit pentru rațiune, motiv sau explicație. Sau poate că, la început, ei au utilizat acest cuvînt doar în sens matematic. Dar, oricare ar fi temeiurile tezelor lor metafizice, fapt este că au fost profund zguduiți de descoperirea incomensurabilității diagonalei cu latura pătratului. Aici, într-un caz foarte simplu, se arăta că a vorbi despre raportul dintre lungimile a două linii conduce la o contradicție, deși bunul simț părea să sprijine filosofia, atunci cînd insista că totdeauna trebuie să existe un anumit raport determinat; în mod evident, diagonala era mai mare decît o treime din latură, dar nu atît de mare cît o jumătate. Eudoxus a salvat situația construind o teorie generală a proporțiilor, care era suficientă pentru geometrie, iar teoria sa (care ni s-a păstrat în cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid) este un remarcabil op de filosofie a matematicii. Punctul ei central îl constituie o nouă definiție a egalității rapoartelor dintre mărimi:

„Fiind date patru mărimi, spunem că prima se află în același raport cu a doua ca a treia cu a patra atunci cînd înmulțind prima și a treia mărime cu un factor oarecare, dar același, și cu alt factor oarecare a doua și a patra, dacă multiplul primei mărimi este mai mic decît cel al celei de-a doua, multiplul celei de-a treia este de asemenea mai mic decît cel al celei de a patra, dacă multiplul primei este egal cu cel al celei de a doua, multiplul celei de a treia este de asemenea egal cu cel al celei de a patra iar dacă multiplul primeia este mai mare decît cel al celei de a doua, multiplul celei de a treia este de asemenea mai mare decît cel al celei de a patra."

În realitate, aceasta înseamnă că atunci cînd nu putem vorbi despre un raport în sens strict pitagoreic (adică un anumit raport dintre numere naturale), putem totuși vorbi despre un raport în sens generalizat dacă se poate arăta că fiecare raport în sens strict pitagoreic

este fie prea mic, fie prea mare. Cu alte cuvinte, existența unui raport în sens generalizat se identifică cu posibilitatea de a distribui toate rapoartele pitagoreice în două clase care se exclud reciproc: clasa rapoartelor prea mici și a celor prea mari. Se știe actualmente că această propunere este utilizată și astăzi în analiza matematică, adică într-o ramură a matematicii care se ocupă cu mărimi ce variază continuu; dar, pentru a examina această temă dintr-o perspectivă convenabilă trebuie în primul rînd să avem în vedere dezvoltarea conceptului de număr de la greci încoace.

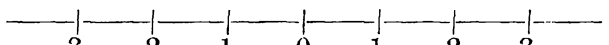
Probabil că primele numerale erau adjective, cum ar fi „unu", „doi", „trei". În limba elină și în multe alte limbi, asemenea cuvinte, sau cel puțin unele dintre ele, se declină ca și adjectivele obișnuite, dar este evident că ele nu explică substantivele în același chip în care o fac adjectivele. Într-adevăr, deși un om care spune că are doi câini mari înțelege să comunice că fiecare din aceștia este mare, cu siguranță că el nu vrea să spună că fiecare din ei este doi. Aceasta sună cam enigmatic, dar pare și mai curios că în unele limbi, inclusiv limba noastră, aceleași sunete sau semne se utilizează adesea ca nume proprii. De exemplu, noi spunem: „doi este cel mai mic număr prim". Obișnuim să vorbim despre numere ca și cum ele ar fi obiecte distincte atît de mulțimea lucrurilor pe care le numărăm, cît și de numeralele pe care le utilizăm pentru a număra; căci ceea ce este adevărat cu privire la numărul doi, nu poate fi negat în ce privește o pereche de câini sau de cuvinte. Or, despre așa ceva nu putea fi vorba înainte de dezvoltarea aritmeticii ca un calcul. În adevăr, avem destule indicii care arată că pe vremea lui Platon lucrurile acestea nu le veneau grecilor atît de ușor. În *Theologumena Arithmeticae*, care înainte i se atribuia lui Iamblichus, există un citat din Speusip, elev al lui Platon, care denotă o remarcabilă incertitudine a limbajului[10]. Pasajul se referă la doctrina pitagoreică cu privire la caracterul perfect al numărului zece, și într-un număr redus de fraze el conține nu mai puțin de patru denumiri diferite pentru numărul zece, și anume τὰ δέκα, ὁ τῶν δέκα ἀριθμός, ὁ δέκα și δέκα. Prima înseamnă literalmente „cele zece (lucruri)", a doua „numărul celor zece (lucruri)", a treia „(numărul) zece", iar a patra exact „zece". Mai departe, cînd Speusip vrea să spună că patru este un multiplu al lui doi, el emite un enunț straniu în care semnul pentru patru este tratat ca și cum ar fi un plural neutru, pe cînd semnul pentru doi ca și cum ar fi un singular masculin.

---

[10] Ed. de Falco, 82.10 și urm., retipărit în *Greek Mathematical Works*, sub redacția lui Ivor Thomas, I, pp. 75 și următoarele.

În afară de adjective cum ar fi „unu", „doi", „trei", chiar și limbile cele mai primitive au termeni numerici ca „jumătate", „o treime", „un sfert"; dar utilizarea în calitate de numere a unor semne cum ar fi -1, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$ și $\sqrt{-1}$ este produsul ultimelor cîtorva secole. Ca și utilizarea numeralelor în calitate de nume proprii, această dezvoltare este legată de elaborarea calculelor matematice. Ea a fost inspirată mai ales de către Descartes, care a aplicat simbolismul algebric la geometrie.

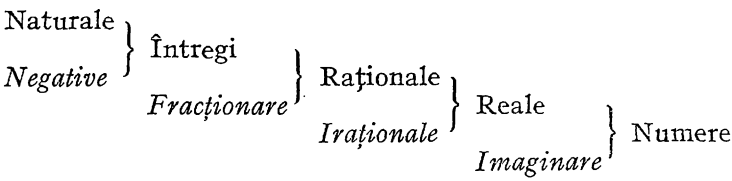
Să începem prin a presupune că examinarea unei probleme ne-a condus la formularea ecuației $x + 3 = 2$. De exemplu, poate că vrem să știm cîți bani avea cineva la bancă înainte de a fi ajuns la soldul 2 primind 3. Evident, ecuația nu poate fi rezolvată deloc în termenii numerelor naturale, dar dacă admitem folosirea numerelor negative, atunci putem scrie: $x = -1$. Putem reprezenta asemenea numere în mod convenabil marcînd pe o linie intervale egale la stînga unui punct denumit 0:



În al doilea rînd, numere ca 3/2 trebuie să fie admise dacă avem de rezolvat ecuații de felul ecuației $2x - 3 = 0$. Odată cu acestea am sporit în mod enorm numerele ce se pot reprezenta prin puncte pe o dreaptă. Într-adevăr, între oricare două fracții putem întotdeauna să găsim alta; aceasta este totuna cu a spune că în fiecare interval finit, cum ar fi cel dintre numerele 0 și 1, avem o infinitate de fracții. Nu trebuie însă să presupunem că odată cu această extindere am identificat numerele corespunzătoare cu toate punctele dreaptei: dacă construim un pătrat a cărui latură este o unitate de lungime, iar apoi trasăm diagonala sa pornind de la origine, punctul final al diagonalei nu face parte dintre acele puncte pentru care avem deja numere atribuite. Dar această lacună, ca și o infinitate de altele, se acoperă printr-o nouă extindere a conceptului de număr, astfel încît acesta să cuprindă și iraționalele algebrice, cum ar fi $\sqrt{2}$, și iraționalele transcendentale (adică nealgebrice) cum ar fi π. Primele sînt legate de necesitatea rezolvării unor ecuații cum ar fi $x^2 - 2 = 0$, iar celelalte sînt necesare pentru a completa continuul liniar. În sfîrșit, o a patra extindere ne permite să recunoaștem numărul „imaginar" $\sqrt{-1}$ ca rădăcină proprie a ecuației $x^2 + 1 = 0$. Aici, impulsul spre extindere pare a fi provenit în întregime din algebra formală. Pe dreaptă nu avem vreun punct corespunzător cu $\sqrt{-1}$, iar matematicienii din secolul al XVIII-lea, care utilizau imaginarele, făceau

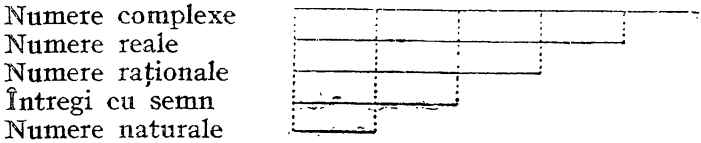
aceasta numai pentru ca să fie mai simple şi mai generale calculele lor. Însă, atît timp cît imaginarele erau admise numai din aceste motive, statutul lor părea foarte misterios. Dacă un elev întreba care este justificarea utilizării lor, profesorul nu prea avea ce să-i răspundă decît: „Lucrează şi te vei convinge singur!". Această aparenţă de mister a fost împrăştiată atunci cînd Wessel în 1797 şi Argand în 1806 au arătat care este modul de a lega imaginarele de mişcarea în plan. În geometria analitică a lui Descartes numerele sînt corelate cu puncte în conformitate cu *distanţa* acestora din urmă de anumite coordonate; dar e posibil de asemenea să concepem un număr ca un vector sau ca o măsură a *deplasării* pe care trebuie s-o efectueze o particulă pentru a atinge un punct. În cadrul unei asemenea scheme, multiplicarea unui vector cu -1 reprezintă în mod evident schimbarea sensului mişcării. Ce ar putea fi mai natural şi mai satisfăcător decît a spune că multiplicarea unui vector cu $\sqrt{-1}$ reprezintă rotaţia cu un unghi drept, adică o operaţie a cărei repetare produce răsturnarea completă? Cel puţin aşa au conceput chestiunea cei mai mulţi studenţi în matematică; şi faptul că şi în prezent această interpretare ne procură bucurie dă unele indicaţii cu privire la stînjeneala pe care trebuie să o fi resimţit matematicienii pe vremea cînd nu se cunoştea vreo cale de a lega acest simbol cu intuiţia spaţială.

Cînd vorbim de extinderile succesive ale conceptului de număr, sîntem înclinaţi să credem că istoria se poate rezuma printr-o schemă de felul următor, în care denumirile scrise cursiv denumesc noi tipuri de numere ce se adaugă stocului iniţial:



În mod evident, întregii sînt denumiţi astfel în opoziţie cu fracţiile, denumirea de număr raţional se opune numărului iraţional, cea de număr real numărului imaginar, iar sistemul de denumiri sugerează în mod natural o clasificare după specie şi gen. Dar acest fel de a descrie dezvoltarea este eronat. Trebuie mai curînd să vorbim de o ierarhie a cinci tipuri diferite de numere în cadrul căreia fiecare tip mai înalt conţine o submulţime corespunzătoare fiecărui tip mai coborît.

În schema următoare, fiecare tip este reprezentat printr-o linie orizontală, iar corespondențele sînt indicate prin linii verticale punctate:



Întregul pozitiv $+2$ nu este același lucru cu numărul natural 2, iar obiceiul nostru de a scrie 2 în locul semnului $+2$ este justificat doar de faptul că regulile noastre de calcul cu întregii pozitivi corespund exact cu regulile de calcul pentru numerele naturale. La fel, într-o teorie riguroasă trebuie să distingem numărul rațional $+2/+1$ atît de numărul întreg pozitiv $+2$ cît și de numărul natural 2, deși în calcul ignorarea deosebirii nu dă loc la eroare. În egalitatea

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

utilizăm același semn 2 iarăși într-un fel nou, și anume ca semn al unui număr real. În anumite contexte putem chiar să-l folosim ca o abreviere pentru semnul mai lung $2 + 0\sqrt{-1}$, adică în calitate de semn al unui număr complex a cărui parte imaginară este nulă.

Fiecărui nivel mai înalt din diagrama noastră îi corespunde un tip cu totul nou, reprezentat printr-o linie orizontală, deși matematicienii, uitînd să recunoască acest lucru, au utilizat adesea un nume nou numai pentru acea parte a tipului care este reprezentată de porțiunea proiectată a liniei. Și, cu o singură excepție, ordinea dezvoltării este fixată, adică nu putem avea un calcul al numerelor complexe înainte de a avea un calcul al numerelor reale, sau un calcul al numerelor reale înainte de a avea un calcul al numerelor raționale. Excepția se referă la numerele cărora li se atribuie un semn: dacă vrem, am putea introduce distincția dintre numerele pozitive și cele negative abia după introducerea numerelor raționale sau chiar după introducerea numerelor reale. Se pare chiar că de fapt oamenii au folosit o notație specială pentru fracții înainte de a fi vorbit despre numere negative. Dar schema propusă mai sus este cea mai simplă deoarece ea stabilește o ordine de apariție a numerelor negative, raționale și iraționale care corespunde cu ordinea obișnuită a operațiunilor inverse de care ele sînt istoricește legate, adică scăderea, împărțirea și extragerea rădăcinii pătrate.

Cîmpul numerelor naturale este închis față de operațiile de adunare, înmulțire și ridicare la putere; adică, cu excepția unor cazuri particu-

lare în care intră numărul 0, obținem întotdeauna în final un număr natural atunci cînd adunăm un număr natural cu altul sau înmulțim un număr natural cu altul, sau ridicăm la putere. Dar acest cîmp nu este închis față de operația de scădere. Pe de altă parte, cîmpul numerelor întregi (cu semn) este închis față de toate cele patru operațiuni menționate pînă acum, însă nu este închis față de împărțire. În căutarea unui cîmp în care realizarea acestei operații este întotdeauna posibilă trebuie să trecem la considerarea numerelor raționale. Însă în acest chip nu putem realiza întotdeauna operațiunea de extragere a rădăcinii. Astfel, sîntem conduși la considerarea cîmpului numerelor reale, în care toate numerele pozitive au rădăcini de orice grad dorim, și în final ajungem la numerele complexe, în cadrul cărora toate operațiunile pe care le-am menționat se pot realiza fără vreo restricție. În afară de acestea, mai există și alte operațiuni (cum ar fi luarea limitei unui șir infinit convergent) care se pot realiza deja în cîmpul numerelor reale, dar cîmpul numerelor complexe prezintă un interes deosebit, deoarece tocmai aici își găsește cea mai largă aplicație noțiunea de *funcție*.

În limbajul matematic, cuvîntul „funcție" se utilizează pentru a indica o operație care atunci cînd este aplicată la o anumită entitate care se numește argumentul ei (sau la o mulțime ordonată de entități, dacă funcția are mai mult decît un singur argument) furnizează o anumită entitate denumită (foarte ciudat) valoarea funcției pentru acest argument. Sau, dacă cuvîntul „operație" sugerează prea mult intervenția oamenilor, putem spune că considerarea matematică a unei funcții este echivalentă cu considerarea unei relații între o entitate (în mod normal unică) numită valoare a funcției și altă entitate numită argument al funcției. Foarte frecvent relația se exprimă printr-o ecuație funcțională de forma $y = f(x)$ în care litera x este variabilă independentă luînd drept valori argumentele funcției, iar litera y este variabila dependentă care ia drept valori valorile funcției pentru diferitele argumente posibile. Uneori se mai spune că o funcție este *de la* o anumită clasă (care este domeniul tuturor argumentelor posibile ale funcției) *la* o altă clasă, domeniul tuturor valorilor posibile ale funcției.

Această definiție modernă[11] este astfel alcătuită încît se poate aplica deja în cadrul domeniului numerelor naturale. De exemplu, putem spune că funcția exprimată prin n^2 ia valoarea 4 pentru argumentul 2. Dar terminologia provine din mecanică și istorește este asociată cu conceptul de variație continuă. La origine, cuvîntul „variabilă", care în prezent este utilizat pentru literele care intervin într-un anumit

[11] Luată în esență din A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, § 03.

mod în texte matematice, era folosit pentru mărimi fizice care variază în timp, cum ar fi distanța de la o particulă la alta sau presiunea unui gaz, iar în formulele de felul $y = f(x)$ literele x și y erau considerate ca abrevieri ale unor expresii ca „a trecut timpul" sau „a fost străbătută distanța". Cînd specialiștii în matematica pură au început să vorbească despre variabile și funcții, ei au procedat astfel pentru că îi interesau tiparele matematice ale unor anumite legi fizice; dar ei nu mai puteau spune că literele astfel folosite ar fi abrevieri pentru expresii ca cele menționate mai sus, iar uzanțele pe care le-au adoptat, în particular obiceiul de a denumi variabile literele înseși, au generat numeroase confuzii și nedumeriri.

Uneori se spunea că literele numite variabile denotă numere variabile, iar în alte dăți se spunea că ele denotă în mod variabil și ambiguu toate numerele care sînt valorile lor. Ambele explicații sînt lipsite de sens. Într-adevăr, numerele nu variază, iar variațiile care pot avea loc în denotarea semnelor nu prezintă interes pentru matematicieni. S-a mai spus: „O variabilă y este o funcție de altă variabilă x dacă pentru orice valoare determinată a lui x, sau cel puțin pentru orice valoare determinată dintr-un anumit domeniu dat, există cel puțin o valoare a lui y, asociată cu ea conform cu o anumită regulă". Această explicație ar fi fost poate satisfăcătoare dacă cuvîntul „variabilă" s-ar fi referit la o mărime fizică; dar ea este cu totul nesatisfăcătoare atunci cînd cuvîntul se referă la o literă, deoarece ea sugerează că o funcție este o literă sau în orice caz un simbol de un anume fel, deși este cît se poate de lămurit că matematicienii care se ocupă cu teoria funcțiilor nu sînt angajați într-o ramură a lingvisticii. Probabil că nici un matematician angajat în activitatea sa n-a fost vreodată derutat în mod serios de asemenea observații; în orice caz, este prea tîrziu pentru a ne mai gîndi la abandonarea vechii terminologii ce dă loc la atîtea necazuri. Dar chestiunea merită să fie notată deoarece cuvîntul „funcție" a fost extins și mai mult în logica modernă; și fără îndoială că aici s-a ajuns la neînțelegeri serioase.

Pentru același motiv, merită să remarcăm că într-un text matematic o expresie funcțională împreună cu o variabilă poate să apară cel puțin în două moduri diferite. Cînd un matematician scrie

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

litera x participă la un simbolism universal cu ajutorul căruia matematicianul stabilește un enunț cu privire la toate numerele. Pentru acest scop simbolismul este foarte util, deoarece el *sugerează* ceea ce se petrece în realitate, și anume că ori de cîte ori vom înlocui peste tot în ecuații litera x cu un număr oarecare, vom obține cîte un enunț

adevărat. Mai mult, putem raţiona fără grijă cu privire la ecuaţiile din majoritatea contextelor *ca şi cum* acest x ar fi el însuşi un număr. Atunci însă cînd un matematician afirmă „vom examina acum funcţia tg x," litera x nu mai exprimă universalitate şi nu mai este clar ce rol gramatical trebuie să atribuim simbolului complex tg x. Dacă, aşa cum se spune uneori, litera x serveşte aici doar pentru a marca un loc gol, atunci cu greu expresia tg x ar putea fi nume al unei funcţii, după cum nici „tată al lui ..." nu este nume al unei relaţii în limba vorbită uzuală. Dar putem vorbi destul de bine despre funcţia *exprimată prin* simbolul complex tg x, după cum putem vorbi despre relaţia exprimată prin „tată al lui...", iar expresia matematică comună, citată mai sus, poate fi eventual considerată ca o abreviere a acestui fel de a vorbi. Vom vedea mai încolo că lipsa de atenţie acordată acestei chestiuni a dezorientat uneori pe unii logicieni care au adoptat limbajul funcţiilor pentru propriile lor ţeluri.

Evident, nu putem utiliza expresiile numerice de tip mai înalt în acelaşi fel în care utilizăm numeralele obişnuite : nu are sens să spunem că în cameră se află $5 + 3\sqrt{-1}$ persoane. Atunci de ce continuăm să vorbim despre *numere* în cursul acestei dezvoltări ? Se pare că extinderea pe care o dăm conceptului de număr este în realitate o extindere a utilizării cuvîntului „număr" în vederea acoperirii unor entităţi de diferite tipuri şi că aceasta se justifică doar prin posibilitatea de a calcula cu simbolurile pentru aceste diferite entităţi după aceleaşi reguli fundamentale din algebră, adică
regulile comutative :

$$x + y = y + x \quad \text{şi} \quad xy = yx,$$

regulile asociative :

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{şi} \quad (xy)z = x(yz)$$

şi regula distributivă :

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Un sistem de numere în sens generalizat este în realitate tocmai o mulţime de entităţi pentru care toate aceste legi sînt valabile *dacă adunarea şi înmulţirea sînt definite în mod convenabil.* Acest din urmă detaliu este important, deoarece noţiunile de adunare şi înmulţire, adecvate calculului cu numere naturale, nu se pot aplica într-un calcul cu numere de alt tip. De exemplu, dacă vrem să vorbim de înmulţirea numerelor întregi, trebuie să începem prin a explica ce înţelegem în acest context prin cuvîntul „înmulţire", adică următoarele reguli de semn :

$$(+a)(+b) = +ab, \quad (+a)(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = +ab.$$

Aceasta revine la a spune că legile fundamentale din algebră sînt sistematic ambigue sau, mai bine : că ele determină într-un mod abstract anumite condiții logice pe care trebuie să le satisfacă operațiile din orice calcul pe care îl denumim calcul cu numere.

Pînă la introducerea numerelor complexe inclusiv, evoluția a fost inconștientă în sensul că matematicienii extindeau utilizarea cuvîntului „număr" fără a-și da seama exact de ceea ce fac. Fără îndoială că ei erau călăuziți de respectarea a ceea ce G. Peacock a numit în 1833 „principiul permanenței formelor echivalente"[12], adică îi urmărea dorința de a păstra regulile generale din algebră pe care le-am enunțat mai sus. Dar fiecare element nou ei îl concepeau ca ceva la care erau constrînși, ca o generalizare pe care trebuiau s-o adopte pentru a putea rezolva problemele puse într-o etapă precedentă ; ei nu considerau algebra făcînd abstracție de exemplificările ei și nici nu încercau să inventeze calcule noi de dragul generalizărilor cît mai extinse posibil. În secolul al XIX-lea situația s-a schimbat. În primul rînd, unii matematicieni distinși au început să conceapă algebra într-un mod abstract. Am amintit mai sus de Peacock ; dar au fost și alții. D. F. Gregory, de exemplu, a scris în 1838 un memoriu intitulat *Cu privire la natura reală a algebrei simbolice*[13], iar De Morgan a publicat între 1839 și 1844 patru memorii cu privire la *Fundamentele algebrei*[14]. În al doilea rînd, au fost încercări de a inventa calcule noi. H. Grassmann, de exemplu, a publicat în 1844 o carte despre *Ausdehnungslehre,* care încerca să realizeze proiectul lui Leibniz de calcul geometric. Iar începînd din 1844, cînd și-a publicat primul său memoriu cu privire la cvaternioni, Sir William Rowan Hamilton din Dublin a cheltuit o mare cantitate de energie pentru a perfecționa o algebră nouă a numerelor hipercomplexe. Însă este interesant de observat că Hamilton n-a lucrat totalmente în gol. Toate eforturile sale erau inspirate de dorința de a elabora un calcul care să facă pentru mișcarea în spațiul tridimensional ceea ce teoria numerelor complexe părea să facă, într-un mod foarte satisfăcător, pentru mișcarea în plan. Așa cum numerele complexe se pot pune sub forma $x + yi$, unde litera i este o abreviere pentru $\sqrt{-1}$, tot astfel cvaternionii săi se pot pune sub forma $x + yi + zj + wk$, unde literele i, j și k reprezintă rotații în trei plane perpendiculare două cîte două. Dar spre deosebire de teoria numerelor complexe, sistemul său nu satisface

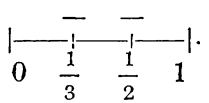
[12] „Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis", *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held in 1833*, pp. 185—352, în special pp. 198—207.

[13] *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, XIV (1840), pp. 208—216.

[14] *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VII, pp. 173—187, 287—300; VIII, pp. 139—142, 241—254.

toate regulile de bază din algebră. Pentru a menține celelalte reguli, el a trebuit să abandoneze comutativitatea înmulțirii și să declare $ij = -ji$. Din acest motiv, cvaternionii nu sînt recunoscuți în mod unanim ca numere. Același lucru se poate spune despre alte propuneri, cum ar fi matricile, care ar putea fi eventual concepute ca o extindere a conceptului de număr dincolo de domeniul numerelor complexe. Într-adevăr, în prezent este binecunoscut că nu poate avea loc vreo extindere fără a se sacrifica una sau alta dintre regulile care determină semnificația cuvîntului „număr", așa cum a fost utilizată în matematică pînă acum. Aceasta nu înseamnă că ar fi stupid să vorbim despre numere hipercomplexe, ci numai că o asemenea uzanță se justifică doar printr-o analogie parțială.

Ce puteau gîndi matematicienii cu privire la această evoluție de la numerele naturale la numerele complexe, în perioada desfășurării ei? Fiecare pas nou producea la început un sentiment de neplăcere, iar după oarecare timp pasul părea inevitabil. Cel puțin pînă la numerele reale inclusiv, progresul era călăuzit de considerente spațiale; și chiar numerele imaginare, care inițial au fost introduse pentru a menține generalitatea unor tipare de calcul, au fost acceptate ca obiect pe deplin respectabil al vorbirii matematice numai după ce au fost incorporate într-o teorie a numerelor complexe care admitea o interpretare spațială. Dar foarte curînd după ce evoluția principală a fost încheiată, au apărut dubii cu privire la soliditatea intuiției spațiale ca bază pentru aserțiuni asupra continuului numerelor reale. Aceste dubii nu se datorau vreunei dificultăți în aplicarea matematicii și nici vreunei influențe a geometrei neeuclidiene, ci proveneau mai curînd din descoperiri efectuate chiar în interiorul analizei matematice! S-a constatat, de exemplu de către B. Bolzano în 1830, iar mai tîrziu și de către Weierstrass, că anumite funcții continue nu sînt derivabile[15]. În limbaj geometric aceasta pare să însemne că ar exista curbe continue fără tangentă. Iar apoi au urmat paradoxuri și mai surprinzătoare. Unul din cele mai izbitoare se referă la densitatea punctelor raționale de pe un segment. Să presupunem că numerele 0 și 1 au fost atribuite la două puncte de pe o dreaptă și că ne-am decis să așezăm cîte o mică bară deasupra fiecărui punct, care este astfel pus în corespondență cu numerele raționale:



[15] Demonstrația lui Bolzano din lucrarea sa *Funktionenlehre* a fost publicată abia în 1930.

Deoarece între oricare două fracţii există o infinitate de alte fracţii, pare firesc să presupunem că barele se vor intersecta şi că suma lungimilor lor va fi inevitabil mai mare decît unitatea, oricît de mici ar fi barele individuale. Dar nu este aşa. Într-adevăr, dacă considerăm fracţiile dintre 0 şi 1 în ordinea

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$$

şi apoi atribuim primei fracţii o bară de lungime egală cu o zecime de unitate, celei de-a doua fracţii o bară de lungime egală cu o sutime de unitate, celei de-a treia o bară de lungime egală cu o miime de unitate şi aşa mai departe, atunci suma lungimilor tuturor acestor bare va fi abia

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = \frac{1}{9}.$$

E adevărat că nu putem trasa cu creionul toate aceste bare, dar este evident că regula noastră de procedură atribuie o lungime determinată pentru bara fiecărei fracţii discernabile, întrucît fiecare asemenea fracţie îşi găseşte locul în ordinea noastră.

Îndată ce s-a pus sub semnul întrebării soliditatea intuiţiei spaţiale ca sursă a cunoaşterii matematice, a devenit necesar să se reexamineze toate demonstraţiile acceptate în mod curent, iar rezultatul a fost reconstruirea radicală a matematicii de către oameni de talia lui Cauchy (1789—1857) şi Weierstrass (1815—1897). În adevăr, s-a spus că înainte de secolul al XIX-lea în analiză nu se demonstrase nimic în mod satisfăcător. Or, în analiză, exact ca şi în geometrie, rigoarea pretinde formularea explicită a fiecărui lucru care este esenţial pentru o demonstraţie; şi astfel, în secolul al XIX-lea atenţia este orientată spre formulele care furnizează definiţii implicite ale diferitelor tipuri de expresii numerice. Indiferent dacă aceste formule sînt considerate ca reguli speciale de calcul sau ca axiome din care urmează să se derive teoreme în concordanţă cu legile generale ale logicii, ceea ce se cere este ca ele să fie complete şi recunoscute ca fundamentale. Dar este firesc să ne întrebăm de unde luăm tocmai asemenea formule. Există oare o necesitate inerentă în cursul evoluţiei care ne-a condus la adoptarea lor? Sau ele sînt convenţii făcute de noi înşine, ce-i drept sugerate de interesul pentru descrierea naturii sau de tendinţa către generalitatea abstractă în matematică, dar totuşi inapte de a fi probate tocmai datorită faptului că sînt convenţii? Aceste întrebări au fost puse în secolul al XIX-lea şi continuă să fie dezbătute în zilele noastre. Poate că cea mai bună cale pentru a face faţă acestei probleme constă în a arăta că antiteza dintre descoperire şi invenţie a fost concepută

eronat. Este cert că matematicienii pot construi calcule în serviciul propriilor lor scopuri speciale, după cum este la fel de cert că ei nu sînt în întregime liberi în alegerea convenţiilor lor. Dacă vrem, putem spune că Hamilton a inventat cvaternionii, dar trebuie să adăugăm că nici el, nici oricare altul n-ar fi putut face un sistem de numere hipercomplexe care să satisfacă toate legile algebrei ce sînt valide pentru numerele complexe. Oricum ar fi, primul pas înspre clarificarea soluţiei a fost formularea exactă a regulilor diferitelor calcule care-şi cîştigaseră deja recunoaşterea, iar aceasta s-a realizat în secolul al XIX-lea.

În fiecare etapă a extinderii conceptului de număr avem de-a face cu entităţi de tip nou, definite implicit prin regulile de operaţie ale calculului nou. Dar în anumite contexte în care de obicei vorbim de numere întregi cu semn sau de numere raţionale am putea spune tot ceea ce intenţionăm să spunem fără a ne referi la numere de tip nou. Astfel, în loc de a scrie egalitatea $3 - 5 = -2$, putem scrie $3 + 2 = 5$; iar în loc de $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, putem scrie $5 \times 6 = 10 \times 3$. Chiar şi atunci cînd găsim că este convenabil să recurgem la numere întregi cu semn sau la numere raţionale, le putem considera ca fiind perechi ordonate de numere selecţionate dintr-un tip imediat inferior şi supuse la anumite reguli speciale de operaţii. De exemplu, calculul cu numerele întregi cu semn se poate dezvolta pe baza unor reguli ca:

$$(a, b) = (c, d) \text{ dacă şi numai dacă } a + d = b + c,$$

şi

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

La prima vedere această procedură pare insolită, dar pentru a obţine metoda uzuală de reprezentare n-avem decît să scriem $+a$ şi $-a$ ca abrevieri pentru cele două forme standard $(a, 0)$ şi $(0, a)$ la care sînt reductibile noile noastre expresii numerice în conformitate cu regulile speciale pentru egalitate. Regulile specifice ale calculului cu numerele raţionale sînt firește diferite, dar nu mai complicate. Însă nu aici se încheie posibilităţile explicaţiilor cu ajutorul perechilor ordonate; în 1835, Hamilton arăta că şi calculul cu numere complexe poate fi prezentat ca un calcul cu perechi ordonate de numere reale, dacă ele sînt însoţite de reguli convenabile pentru egalitate, adunare, înmulţire etc. Dacă s-ar fi putut arăta că discursul referitor la numere reale ar fi legat într-un mod întrucîtva asemănător cu cel referitor la numere raţionale, lanţul s-ar fi completat şi am fi putut spune — în terminologia lui Bertrand Russell — că toate numerele

de tip superior sînt construcţii logice pornind de la numerele naturale. Aceasta revine la a spune că n-ar mai fi necesar să introducem numerele de tip superior ca entităţi noi, descoperite cu ajutorul intuiţiei continuităţii spaţiale sau temporale, deoarece, în principiu, tot ce spunem cu privire la ele ar fi echivalent cu nişte expresii foarte complicate, relative însă la numerele naturale şi proprietăţile lor. Acest program, care a servit drept inspiraţie pentru o filosofie mult mai tîrzie, se numeşte aritmetizarea analizei.

Din nefericire, numerele reale au adus matematicienilor moderni tot atîta bătaie de cap ca şi şcolii lui Pitagora. Aceasta întrucît calculul cu numere reale nu poate fi prezentat ca un calcul cu mulţimi *finite* de numere raţionale. Îndată ce începem să lucrăm cu numere reale, ne angajăm într-o discuţie cu privire la infinit, cu toate dificultăţile care decurg de aici. Aceasta se poate vedea în mod limpede din examinarea a două teorii a numerelor reale care au fost formulate în secolul trecut.

Prima din ele a fost propusă de către Weierstrass şi dezvoltată de către Cantor. De fapt, ea conduce la identificarea unui număr real cu un şir infinit de numere raţionale pe care le numim de obicei aproximările sale succesive. Aşa, de exemplu, în aritmetica elementară avem o procedură pentru extragerea rădăcinilor pătrate, şi aplicînd-o etapă cu etapă putem obţine valoarea lui $\sqrt{2}$ cu cîte zecimale dorim. Deoarece $\sqrt{2}$ este un număr iraţional, procedura nu conduce niciodată la o încheiere, adică la o expresie zecimală care se termină printr-o mulţime de 9-uri sau printr-o perioadă recurentă de cifre, deşi expresia „obţinem valoarea lui $\sqrt{2}$" ne-ar putea face să credem că avem vreo expresie zecimală completă, că adică $\sqrt{2}$ este de aceeaşi natură cu numerele pe care le numim aproximări ale sale. După Cantor, numărul real $\sqrt{2}$ se poate identifica cu şirul

1,4
1,41
1,414
1,4142
. . . . . ,

pe care-l obţinem atunci cînd calculăm la început prima zecimală, apoi două, apoi trei, apoi patru şi aşa mai departe. Şirul este potenţial infinit, dar noi putem stabili reguli pentru a-l recunoaşte ca număr deoarece succesiunea termenilor săi este fixată printr-o lege.

A doua teorie a numerelor reale, care a fost elaborată de către

Dedekind în lucrarea sa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* din 1872, este o versiune modernă a teoriei rapoartelor a lui Eudoxus. Deşi nu putem găsi vreun număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2, totuşi putem împărţi numerele raţionale în mod exhaustiv în două clase: clasa celor al căror pătrat este mai mare decît 2 şi clasa celor al căror pătrat nu este mai mare decît 2. După Dedekind, $\sqrt{2}$ este tocmai tăietura care divide numerele raţionale în acest fel. Dacă aceasta sună prea paradoxal, putem spune că $\sqrt{2}$ este mulţimea infinită a numerelor raţionale care satisface condiţia a doua; într-adevăr, locul tăieturii este unic determinat de structura mulţimii inferioare, iar această formulare prezintă avantajul de a fi mai uşor comparabilă cu celelalte definiţii ale numerelor de tip superior. În ce priveşte întregii, numerele raţionale şi numerele complexe, ele sînt definite ca mulţimi de numere de tip imediat inferior; dar aici, ca şi în schema lui Cantor, mulţimea utilizată pentru definiţia unui număr real trebuie să fie infinită. Cele două teorii pentru numerele reale sînt echivalente în sensul că un calcul construit după prescripţia lui Cantor, deşi se referă la şiruri infinite, are aceeaşi structură ca şi calculul cu tăieturile lui Dedekind. Şi aceasta nu e surprinzător, deoarece un şir infinit convergent este un instrument convenabil pentru localizarea unei tăieturi Dedekind.

Definiţia numerelor reale cu ajutorul mulţimilor infinite de numere raţionale pare satisfăcătoare în sensul că ne dă ceea ce aşteptăm în calculul numerelor reale şi leagă acest calcul de cel precedent, al numerelor raţionale. Dar această definiţie nu ne permite aritmetizarea analizei, dacă înţelegem prin aceasta ceea ce se pare că era concepţia lui Kronecker, reducerea tuturor enunţurilor matematice la enunţuri despre numere naturale. Într-adevăr, un enunţ care se referă la o mulţime *infinită* de numere raţionale nu poate fi redus în sensul strict al cuvîntului, aşa cum poate fi redus un enunţ care se referă numai la o mulţime finită de numere raţionale particulare. Iar dacă renunţăm la programul reducerii complete, încă ne mai rămîne dificultatea de a demonstra consistenţa regulilor speciale pe care le adoptăm pentru calculul nostru al numerelor reale. Cum se poate face aceasta fără a reveni la problema iniţială, adică la problema existenţei numerelor pe care presupunem că le definesc regulile? Deşi această critică nu a fost efectuată în amănunt în cursul secolului al XIX-lea, ea a fost totuşi suficient de bine înţeleasă pentru a tulbura minţile unor matematicieni. Frege, de exemplu, ca şi Kronecker, n-a fost niciodată complet satisfăcut de teoriile pentru numerele reale, care erau curente în epoca lui. În capitolele următoare vom avea prilejul de a considera mai în amănunt unele dintre aceste dificultăţi.

3. *Boole şi algebra logicii*

Geometria şi algebra au contribuit în diferite moduri la dezvoltarea logicii matematice. După cum am spus în prima secţiune din acest capitol, geometria a furnizat un domeniu în care se putea lucra cu noţiunile axiomaticii, în timp ce algebra a furnizat un model care putea fi imitat pentru stabilirea unui calcul logic. Încă în secolul al XVII-lea, Leibniz şi-a dat seama că există o anumită asemănare între disjuncţia şi conjuncţia conceptelor, pe de o parte, şi adunarea şi înmulţirea numerelor, pe de altă parte, dar el nu a fost în stare să formuleze exact în ce constă asemănarea, şi deci n-a fost în stare s-o utilizeze ca bază pentru un calcul logic. Tocmai aceasta a realizat George Boole (1815—1864) în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic*[16]. Ideea că formulele algebrice ar putea fi utilizate pentru a exprima relaţii logice i-a venit pentru prima oară pe cînd era încă adolescent, lucra ca supraveghetor la o şcoală particulară din Lincoln şi se autoinstruia prin numeroase lecturi. Dar interesul renăscut pentru logică, ce l-a condus să scrie această broşură în 1847, se pare că s-ar datora publicării în periodice a faimoasei controverse în cadrul căreia Sir William Hamilton din Edinburg* îşi susţinea prioritatea în ce priveşte doctrina cuantificării predicatelor, îl acuza pe Augustus De Morgan de plagiat şi făcea observaţii nemaipomenite împotriva matematicii ca element în instrucţie şi educaţie. Înainte de a-şi publica lucrarea, Boole i-a scris lui De Morgan, ale cărui preocupări le împărtăşea, dar acesta tocmai terminase lucrarea sa *Formal Logic* şi a propus ca cele două cărţi să fie publicate înainte ca ei să se consulte asupra rezultatelor obţinute. Cele două cărţi au apărut aproximativ în acelaşi timp; după o anecdotă, ele ar fi ajuns în librării în aceeaşi zi.

Deşi curiozitatea lui Boole pentru logica matematică a fost stimulată de o dispută întîmplătoare, faptul că cu puţin înainte de a-şi fi scris el lucrarea avusese loc o dezbatere importantă asupra naturii algebrei nu este, desigur, o întîmplare. Avem toate motivele să presupunem că el citise unele dintre lucrările lui Peacock, Gregory, De Morgan şi Sir William Rowan Hamilton pe care le-am menţionat în secţiunea precedentă. Gregory, apropiat publicaţiei *Cambridge Mathematical Journal*, era un prieten apropiat care i-a dat încredere în posibilităţile sale de matematician. Afară de aceasta, interesul estetic al lui Boole pentru matematică l-a condus să dea o înaltă apreciere

---

[16] O dare de seamă cu privire la viaţa lui Boole a se vedea la W. Kneale, „Boole and the Revival of Logic", *Mind*, LVII (1948), pp. 149—175.

* A nu se confunda cu sir William Hamilton Rowan, matematicianul despre care s-a vorbit în secţiunea precedentă (Nota trad.).

tuturor tentativelor de realizare a generalității abstracte. Reputația sa era deja stabilită datorită unui studiu despre *A General Method in Analysis*, publicat în 1844, în care el a adus contribuții la generalizarea raționamentului algebric utilizînd în mod liber calculul cu operatori sau, cum se spunea pe atunci, separarea simbolurilor.

Din lucrările publicate anterior, Boole putea să extragă două descoperiri importante: (I) că este posibilă o algebră cu entități care nu sînt numere în sensul obișnuit al cuvîntului și (II) că legile valabile pentru tipurile de numere pînă la cele complexe inclusiv nu trebuie să fie menținute în întregime într-un sistem algebric care nu se aplică la asemenea numere. Cu geniul său generalizator, el și-a dat seama că o algebră se poate dezvolta ca un calcul abstract apt de diferite interpretări. Punctul de vedere asupra logicii pe care l-a dezvoltat el pornind de la această viziune este enunțat în mod lămurit în primul paragraf al lucrării sale *Mathematical Analysis of Logic*:

„Cei care cunosc starea actuală de lucruri din teoria algebrei simbolice își dau seama că validitatea proceselor de analiză nu depinde de interpretarea care se dă simbolurilor utilizate, ci numai de legile după care se combină ele. Orice sistem de interpretare care nu afectează adevărul relațiilor presupuse este la fel de admisibil și tocmai de aceea aceleași procese, în cazul unei anumite scheme de interpretare, pot reprezenta soluția unei probleme referitoare la proprietăți ale numerelor, pe cînd în altă interpretare ele pot reprezenta soluția unei probleme geometrice, iar într-o a treia soluția unei probleme de dinamică sau optică ... Am putea spune pe bună dreptate că un calcul adevărat se caracterizează prin aceea că el este o metodă ce se întemeiază pe utilizarea simbolurilor cu legi de combinație cunoscute și generale și cu rezultate care admit o interpretare consistentă. Faptul că formelor existente din Analiză li se atribuie o interpretare cantitativă este rezultatul circumstanțelor în cadrul cărora au fost determinate aceste forme și nu trebuie ridicat la rangul de condiție universală a Analizei. Tocmai întemeindu-mă pe acest principiu general, îmi propun să stabilesc Calculul logicii și susțin că locul său este printre formele recunoscute ale Analizei matematice, deși în ce privește obiectivul și instrumentele sale el trebuie să ocupe în prezent un loc aparte."

Exemplarele primei ediții a broșurii lui Boole sînt în prezent rare și nu putem presupune că s-au vîndut multe. În anul următor însă, el a publicat o scurtă dare de seamă asupra Calculului logicii în publicația *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, și aceasta a avut parte de o lectură mai amplă în rîndurile matematicienilor. El nu adaugă aci nimic la teoria din broșură, dar uneori este mai ușor de urmărit; el încheie cu un paragraf care prezintă foarte lămurit poziția sa:

„Punctul de vedere pe care-l prezintă aceste încercări asupra naturii limbajului este foarte interesant. Ele îl prezintă nu ca o simplă colecție de semne, ci ca un sistem de expresii ale cărui elemente sînt supuse legilor gîndirii pe care o reprezintă. Faptul că

aceste legi sînt tot aşa de matematic riguroase ca şi legile care guvernează conceptele pur cantitative de spaţiu şi timp, de număr şi mărime, este o concluzie pe care nu ezit s-o supun scrutărilor celor mai amănunţite".

În 1849, Boole a fost chemat la catedra de matematică de la Queen's College, Cork, pe atunci nou întemeiat, şi îndată a început să pregătească o carte mai amplă despre teoria sa logică. În această perioadă a vieţii sale el obişnuia să spună că ştiinţa despre gîndire era obiectul său de studiu iar matematica era o activitate recreativă. Aceasta nu înseamnă că în matematică el n-a fost productiv (în perioada aceea a scris note cu privire la cvaternioni), dar cea mai mare parte a energiei sale el şi-a consumat-o pentru a se familiariza cu scrierile filosofilor asupra fundamentelor logicii. Rezultatul activităţii sale a fost *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded The Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Această carte, care a fost publicată în 1854 din fondurile lui Boole şi ale unui prieten al său, nu s-a vîndut prea bine, dar a fost citită de mulţi care nu văzuseră broşura *Mathematical Analysis of Logic* şi este adesea considerată ca fiind capodopera lui Boole. Noutatea principală a cărţii constă în aplicarea ideilor sale la calculul probabilităţilor. În rest, cartea nu prea era originală. Din punct de vedere formal nu apăreau schimbări importante şi nici nu se poate spune că ideile principale sînt prezentate mai precis decît în lucrarea anterioară. Există însă unele exemple lucrate şi unele pasaje metafizice care sînt interesante fie şi pentru lumina pe care o aruncă asupra lecturilor lui Boole.

Spre sfîrşitul vieţii sale, Boole spunea că nu-l satisfăceau expunerea şi aşezarea materiei din această carte şi regreta că nu a lucrat de două ori mai mult pentru prelucrarea ideilor prezentate pentru prima oară în *Mathematical Analysis of Logic*. Cu un an înainte de moarte, îi scria lui Jevons că era foarte ocupat cu pregătirea unei noi ediţii a cărţii sale de ecuaţii diferenţiale, dar spera că îndată ce se va elibera va scrie iarăşi logică şi deci îşi propunea să amîne lectura lucrării lui Jevons pentru ca să fie exclusă orice neînţelegere cu privire la originile vederilor sale. Este interesant să discutăm asupra schimbărilor pe care le-ar fi efectuat revăzînd *Laws of Thought*, dar selecţiile care s-au publicat din manuscrisele ultimilor săi ani arată că ceea ce avea în vedere era mai curînd o dezvoltare a opiniilor sale epistemologice decît vreo modificare a laturii formale a cărţii. În aceste memorii el menţionează în particular o deosebire între logica claselor (adică calculul său al logicii) şi o logică superioară, mai comprehensivă, care nu se poate reduce la un calcul dar despre care se poate spune că ar fi „filosofia *oricărei* gîndiri care se poate exprima în semne, in-

diferent de obiectul acelei gîndiri"[17]. De aceea nu pare probabil că dacă ar fi lucrat mai mult ar fi dat o carte mai bună. Atunci cînd a început să caute bazele logicii în gîndirea umană, el a pornit pe o cale greşită. În adevăr, unul din meritele sale principale este că a eliberat logica de sub dominaţia epistemologiei şi a pregătit astfel renaşterea ei ca ştiinţă independentă. Prima ruptură cu tradiţia confuză din secolele XVII şi XVIII a fost realizată de către Bolzano, el însuşi un matematician filosof, dar tocmai lucrarea lui Boole a fost aceea care a arătat lămurit că logica poate fi studiată cu profit fără vreo referire la procesele minţii noastre. El nu avea nici un fel de îndoieli că operează cu legi ale gîndirii într-un anumit sens psihologic al acestei expresii ambigue, dar de fapt el opera cu unele dintre legile cele mai generale a ceea ce poate fi gîndit.

În vederea expunerii sistemului lui Boole este convenabil să începem cu interpretarea cu care a pornit, după toate probabilităţile, şi din care a obţinut concepţia sa cu privire la calculul logicii. Să presupunem că litere ca *x* şi *y* reprezintă clase şi că semnul = aşezat între două semne care reprezintă clase, arată că aceste clase au aceiaşi membri. Atunci, intersecţia a două clase, adică acea clasă care constă din toate lucrurile care aparţin ambelor clase, poate fi reprezentată printr-un simbol complex cum ar fi *xy*. Această convenţie este sugerată de felul în care alăturăm adjectivele atunci cînd vrem să specificăm mai îndeaproape anumite clase. Putem vorbi, de exemplu, de clasa lucrurilor mari, roşii, pătrate. De fapt, Boole nu face o distincţie prea netă între adjective şi simbolurile claselor; uneori el numeşte literele *x*, *y*, *z* etc. simboluri *elective*, concepîndu-le ca simboluri care selectează, atrag atenţia asupra unor anumite lucruri.

Însă între diferitele clase care se pot distinge există două cazuri limită pentru care este convenabil să avem simboluri speciale. Acestea sînt clasa *universală*, adică acea clasă căreia îi aparţine ca membru orice lucru, şi clasa *nulă*, adică acea clasă căreia nici un lucru nu-i aparţine ca membru. În simbolismul lui Boole, ele sînt reprezentate respectiv prin simbolurile 1 şi 0. Această uzanţă poate că i-a fost sugerată de convenţiile pentru măsurarea probabilităţilor, dar oricum ea are marele merit de a fi în concordanţă cu dorinţa sa de a păstra cît mai mult

---

[17] *Studies in Logic and Probability* de George Boole (ed. de R. Rhees), 1952, p. 14. Pe lîngă cîteva opere mai scurte, publicate în timpul vieţii, ca de ex. *Analiza matematică a logicii*, această colecţie conţine fragmente din articolele aflate în posesia Societăţii Regale şi în special un manuscris intitulat „Despre teoria matematică a logicii şi despre interpretarea filosofică a metodelor şi proceselor ei". Probabil Boole n-a fost destul de mulţumit cu aceste lucrări pentru a le trimite unei reviste şi De Morgan, care le-a văzut după moartea lui Boole, a hotărît să nu fie publicate. Mulţumim lui W. Mays pentru copiile corespondenţei din 1863 şi 1864 dintre Boole şi Jevons.

posibil în cadrul calculului nou al logicii formalismul algebric obişnuit. În adevăr, cele două ecuaţii $1x = x$ şi $0x = 0$ sînt amîndouă valide atît în interpretarea de clasă pe care am dat-o acum, cît şi în interpretarea numerică obişnuită. Dar apropierea de notaţie nu trebuie să ne ascundă faptul că introducerea noţiunilor de clasă universală şi clasă nulă cuprinde o noutate interesantă. După cum am văzut, Aristotel şi-a îndreptat atenţia spre termenii generali care nu erau nici universali în sensul de a se aplica la orice lucru şi nici nuli în sensul de a nu se aplica la nici un lucru. Atunci cînd Boole scria despre clasa universală şi despre clasa nulă, el realiza o extindere importantă a uzanţei obişnuite în ce priveşte cuvîntul „clasă". Dacă el şi-ar fi dezvoltat în mod consecvent această nouă utilizare, el ar fi fost condus mult mai departe de schema aristotelică decît a dorit-o vreodată. Or, mai tîrziu s-a descoperit că utilizarea nerestrictivă a noţiunii de clasă universală poate conduce la paradoxuri serioase. În practică, Boole ia semnul său 1 în sens de acel *univers al vorbirii* pe care-l utilizează De Morgan, adică pentru el 1 nu este totalitatea tuturor obiectelor de orice tip care se pot concepe, ci mai curînd ansamblul unei anumite categorii de lucruri care sînt supuse investigării. De exemplu, într-un context în care se presupune că termenii „britanic" şi „străin" determină clase complementare, universul discursului este omenirea[18].

Deoarece simbolismul lui Boole pentru intersecţia claselor seamănă în mod evident cu simbolismul mult anterior pentru înmulţirea numerelor, s-a luat obiceiul de a se numi intersecţia a două clase produsul lor logic. Totuşi, regulile pentru simbolismul intersecţiei posedă o trăsătură foarte importantă, care nu se poate găsi la regulile pentru înmulţirea numerică. Dacă x denotă o clasă, atunci intersecţia acestei clase cu ea însăşi este aceeaşi clasă, adică avem ca egalitate fundamentală:

$$xx = x.$$

În lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic*, Boole exprimă adesea acest adevăr prin formula

$$x^n = x,$$

spunînd că aceasta este trăsătura distinctivă a calculului său. O vom întîlni şi sub altă formă.

În algebra numerică, împărţirea apare ca operaţie inversă înmulţirii; însă atunci cînd vorbeşte de clase, Boole, în general, nu permite o operaţie asemănătoare cu împărţirea. El subliniază că atunci cînd

[18] A. De Morgan, *Formal Logic*, p. 55.

literele x, y şi z denotă clase, din egalitatea $xz = yz$ nu putem avea egalitatea $x = y$. Clasa preoţilor bacalaureaţi poate eventual să fie coextensivă cu clasa preoţilor cu părul roşu, dar de aici nu urmează că toţi bacalaureaţii au părul roşu. Trebuie însă să amintim că şi în algebra numerică există limitări ale utilizării operaţiei de împărţire. Din egalitatea $2 \times 0 = 3 \times 0$ nu putem avea egalitatea $2 = 3$. Oricum, pînă la urmă s-ar putea găsi în teoria claselor ceva analog cu împărţirea, iar Boole însuşi a sugerat că acest analog ar putea fi abstracţia, pe care odinioară Leibniz o reprezenta prin scădere. Să presupunem că x, y şi z denotă clase legate între ele în modul indicat de egalitatea $x = yz$. Atunci, sugestia ar fi de a scrie $x/y = z$ ca o expresie pentru faptul că z denotă o clasă pe care o obţinem atunci cînd luînd membrii clasei denumită x efectuăm o abstragere impunînd restricţia ca ei să fie incluşi în clasa numită y. De exemplu, am putea eventual spune că aşa cum clasa oamenilor este produsul logic al clasei fiinţelor raţionale şi al clasei animalelor, tot astfel în această notaţie nouă

$$\frac{\text{clasa oamenilor}}{\text{clasa fiinţelor raţionale}} = \text{clasa animalelor.}$$

Dar este important să ţinem seama de două limitări ale acestei convenţii. În primul rînd expresia x/y poate să fie lipsită de semnificaţie în calculul claselor atunci cînd clasa denotată prin x nu este în fapt o parte a clasei denotată cu y. Aceasta aduce cu observaţia că expresia x/y este lipsită de semnificaţie în algebra întregilor dacă numărul denotat prin x nu este un multiplu al numărului denotat cu y. În al doilea rînd, expresia x/y este în general nedeterminată în calculul claselor; în adevăr, pot exista multe clase diferite ale căror intersecţii cu clasa denotată prin y sînt toate coextensive cu clasa denotată prin x. În locul exemplului dat mai sus am fi putut scrie tot aşa de bine:

$$\frac{\text{clasa oamenilor}}{\text{clasa fiinţelor raţionale}} = \text{clasa primatelor,}$$

deşi, firește, clasa primatelor nu este identică cu clasa animalelor. Aceasta este o limitare cu mult mai serioasă în ce priveşte utilizarea unei asemenea notaţii şi probabil că în virtutea ei spunea Boole că expresia x/y nu are interpretare în logică.

În algebra claselor, semnul compus $x + y$ poate fi utilizat pentru a reprezenta clasa lucrurilor care aparţin sau clasei denotate prin x, sau clasei denotate prin y. Dar cuvîntul „sau" are în limba uzuală două semnificaţii distincte: uneori e folosit în sens inclusiv, iar alteori în sens exclusiv. Majoritatea urmaşilor lui Boole în logica matematică

au adoptat pe $x + y$ ca semn al reuniunii claselor denumite x şi y (adică al sumei lor logice în sens inclusiv), astfel încît clasa denumită $x + y$ conţine clasa denumită xy. Din punct de vedere formal, această convenţie prezintă un avantaj considerabil, deoarece ea ne permite să afirmăm egalitatea

$$x + x = x$$

şi să lucrăm astfel în calcul, în concordanţă cu principiul dualităţii pentru reuniune şi intersecţie. În particular, putem adopta cele două reguli ale lui De Morgan

$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{x + y} = \overline{xy}$$

unde semnul $\bar{x}$ reprezintă complementara clasei denumită x, adică reprezintă clasa tuturor lucrurilor care nu aparţin clasei denumită x. Dar Boole însuşi consideră întotdeauna că atunci cînd literele x şi y reprezintă clase, nu putem scrie $x + y$ decît dacă cele două clase se exclud una pe cealaltă; pentru a stabili în mod clar că această condiţie este satisfăcută el exprimă uneori suma logică sub forma $x + \bar{x}y$, unde $\bar{x}$ are sensul explicat mai sus[19]. Efectul acestei restricţii este înlăturarea din sistemul său a egalităţii $x + x = x$ şi, odată cu ea, a celor două reguli generale pe care le-am dat mai sus. Totuşi, nu ar fi corect dacă am spune că el adoptă sensul exclusiv pentru semnul $+$, dacă prin această afirmaţie se înţelege introducerea lui $x + y$ ca semn pentru clasa tuturor lucrurilor care aparţin fie clasei denumită x, fie clasei denumită y, dar nu aparţin clasei denumită xy. Mai curînd, el presupune că atunci cînd este corect să scriem $x + y$, trebuie să fie adevărată egalitatea $xy = 0$.

Motivul pentru care Boole a adoptat această restricţie în utilizarea semnului $+$ era, probabil, dorinţa sa de a putea folosi ca invers semnul $-$. Avem aci o situaţie întrucîtva asemănătoare cu aceea înfăţişată anterior în legătură cu împărţirea. Atunci cînd x, y şi z denotă clase, este tentant să presupunem că din egalitatea $x = y + z$ putem deriva altă egalitate: $x - y = z$. Dar în algebra claselor o asemenea uzanţă are două limitări. În primul rînd, nu putem ataşa vreo semnificaţie expresiei $x - y$ atunci cînd clasa denotată prin y nu este o parte a clasei denotată prin x. Aceasta aminteşte observaţia că expresia $x - y$ este lipsită de semnificaţie în calculul numerelor naturale dacă

[19] *Mathematical Analysis of Logic*, p. 52; *Laws of Thought*, pp. 33, 48, 55–56, 119.

numărul denotat prin y este mai mare decît numărul denotat cu x. În al doilea rînd, expresia $x - y$ va fi nedeterminată dacă semnul $+$ se ia în sens inclusiv, fără ipoteza specială că semnele între care el figurează reprezintă clase care nu se intersectează. Într-adevăr, ecuaţia $x = y + z$ poate atunci să fie compatibilă cu ecuaţia $x = y + w$, deşi literele z şi w nu reprezintă clase coextensive. Oricare ar fi motivul, Boole adoptă convenţia că semnul $+$ poate figura numai între clase care se exclud reciproc şi el foloseşte liber semnul $-$ ca invers al semnului $+$. În particular, complementara clasei denotată cu x el o notează cu $1 - x$, iar semnul x îl introduce doar ca o abreviere. Această uzanţă îi permite să exprime principiul special al sistemului său cu ajutorul formulei

$$x(1 - x) = 0.$$

Uneori el derivă această relaţie din egalitatea $x = x^2$, care este un caz particular al legii sale în ce priveşte puterea; dar alteori el preferă să considere această formulă ca fundamentală, remarcînd că ea este o formulare a principiului necontradicţiei, pe care atît Aristotel cît şi Leibniz l-au considerat principiul fundamental.

Acest sistem de notaţie, aşa cum se prezintă el, este suficient pentru exprimarea propoziţiilor *A*, *E*, *I* şi *O* din logica tradiţională, cu condiţia ca propoziţiile *A* şi *E* să fie luate fără presupoziţie existenţială[20]. Să presupunem că litera x reprezintă clasa lucrurilor X iar litera y clasa lucrurilor Y; avem atunci următoarea schemă:

Orice X este Y	$x(1 - y) = 0$
Nici un X nu este Y .	$xy = 0$
Unii X sînt Y	$xy \neq 0$
Unii X nu sînt Y . . .	$x(1 - y) \neq 0.$

Fiecare din cele patru propoziţii se poate reprezenta în diferite alte feluri care sînt algebric echivalente cu cele de mai sus, dar nu sînt aşa de simple. Trebuie însă să observăm că în această schemă propoziţiile particulare se exprimă prin inegalităţi, pe cînd propoziţiile universale se exprimă prin egalităţi. Boole preferă să exprime toate tipurile tradiţionale de propoziţii categorice prin egalităţi, şi de aceea în locul ultimelor două rînduri din schema de mai sus el scrie:

Unii X sînt Y	$xy = v$
Unii X nu sînt Y. . . .	$x(1 - y) = v.$

[20] O atare interpretare a propoziţiilor universale a fost dată de către Franz Brentano în *Psychologie vom empirischen Standpunkt* (1874), II, cap. 7, iar consecinţele au fost dezvoltate în detaliu de către elevul său F. Hillebrand în *Die neuen Theorien der kategorischen Schlüsse*, 1891.

Litera *v*, pe care a introdus-o aici cu scopul de a exprima propoziţii particulare, pare să corespundă cu utilizarea cuvîntului „unii" în limba curentă; dar se spune că această literă reprezintă o clasă „nedefinită în toate privinţele în afară de una" şi anume aceea că ea conţine un membru sau mai mulţi membri (adică nu este coextensivă cu clasa nulă). Această explicaţie nu este prea satisfăcătoare. Dacă un lucru X este Y, atunci în adevăr clasa notată cu *xy* conţine cel puţin un membru. Dar noi nu putem afirma acest lucru egalînd clasa denumită *xy* cu o clasă a cărei unică caracteristică definitorie este aceea că ea conţine un membru sau mai mulţi membri, căci o asemenea clasă nu există.

În cadrul sistemului lui Boole, litera *v* se poate manipula în unele privinţe ca şi cum ar fi un simbol de clasă. Dar aceasta este mai curînd un defect decît un merit al notaţiei, întrucît sugerează inferenţe eronate. Am putea fi tentaţi, de exemplu, să presupunem că $ab = v$ şi $cd = v$ luate la un loc furnizează concluzia $ab = cd$. Boole însuşi nu face asemenea erori, dar aceasta se datorează faptului că el impune restricţii în ce priveşte utilizarea literei *v*, restricţii care nu sînt compatibile cu faptul că el consideră această literă ca un simbol de clasă. De exemplu, el spune că putem trece de la egalitatea $x(1 - y) = 0$, care înseamnă „Fiecare X este Y", la egalitatea $vx(1 - y) = 0$ şi că a doua poate fi interpretată ca însemnînd „Unii X sînt Y", dar numai în ipoteza că sînt adevărate egalităţile $v(1 - x) = 0$ şi $v(1 - y) = 0$, adică clasa denotată prin *v* este conţinută în calitate de subclasă în fiecare dintre cele două clase denotate prin *x* şi *y*. Deoarece *v* se presupune că denotă o clasă care are cel puţin un membru, condiţia sa de interpretare conduce în fapt la ipoteza că clasele denotate prin *x* şi *y* nu sînt nule. În mod evident, în toate acestea ţelul său este de a asigura inferenţele aristotelice care depind de presupoziţia existenţială, dar el a ales o cale nefericită. Dacă litera *v* reprezintă o clasă, chiar în sensul lărgit în care se poate spune că simbolurile 0 şi 1 reprezintă clase, atunci nu ar trebui să fie necesare reguli deosebite pentru interpretarea ei în diferitele contexte în care ea se utilizează. Este însă interesant de observat că într-o vreme Leibniz avusese o idee similară[21].

Pentru interpretarea sistemului în termenii claselor şi ai operaţiilor cu clase este clar că următoarele formule, pe care Boole le presupune — explicit sau implicit — ca premise, exprimă propoziţii adevărate:

(1) $xy = yx$
(2) $x + y = y + x$
(3) $x(y + z) = xy + xz$
(4) $x(y - z) = xy - xz$

[21] Couturat, *La Logique de Leibniz*, pp. 345–350.

(5) dacă $x = y$, atunci $xz = yz$
(6) dacă $x = y$, atunci $x + z = y + z$
(7) dacă $x = y$, atunci $x - z = y - z$
(8) $x(1 - x) = 0$.

Dintre acestea, primele şapte au aceeaşi formă ca regulile din algebra numerică obişnuită. Ceea ce distinge sistemul de algebra obişnuită este formula a opta. Dar Boole a subliniat că şi această formulă poate fi interpretată numeric dacă valorilor pe care le poate lua variabila x li se impune o restricţie convenabilă. Descoperirea sa el o formulează cu următoarele cuvinte:

„Să considerăm apoi o algebră în care simbolurile x, y, z etc. pot lua valorile 0 şi 1 şi numai aceste valori. Legile, axiomele şi procesele unei asemenea algebre vor fi în întregime identice cu legile, axiomele şi procesele algebrei logicii. Numai deosebirile de interpretare le despart. Lucrarea care urmează îşi bazează metoda pe acest principiu"[22].

Acest fragment şi altele asemănătoare i-au determinat pe unii comentatori să prezinte sistemul lui Boole ca o algebră cu două valori. O asemenea prezentare este eronată, căci atunci cînd tratăm sistemul ca un calcul al claselor nu presupunem că fiecare clasă este coextensivă fie cu clasa universală, fie cu clasa nulă. În realitate, sistemul lui Boole poate trece într-o algebră cu două valori numai dacă adăugăm un principiu nou:

(9) sau $x = 1$, sau $x = 0$.

Calculul rezultat admite şi el o interpretare numerică (adică simbolurile 1 şi 0 pot fi luate în sensul lor numeric obişnuit); dar el nu mai admite o interpretare în termenii claselor. Boole nu face o distincţie netă între sistemul său iniţial şi sistemul mai restrîns care cuprinde (9). Aceasta se poate vedea din faptul că el dă alte două interpretări logice ale formulelor sale, fără să remarce că una din ele satisface (9) pe cînd cealaltă n-o satisface. Aceste interpretări prezintă în sine un mare interes şi merită să fie menţionate aici.

În lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic* şi apoi în *Laws of Thought*, Boole propune o convenţie conform căreia egalitatea $x = 1$ să însemne că propoziţia X este adevărată, iar egalitatea $x = 0$ să însemne că X este falsă. În concordanţă cu aceasta, valorile de adevăr ale propoziţiilor mai complicate pot fi reprezentate prin combinări de litere mici, de exemplu valoarea de adevăr a conjuncţiei propoziţiilor X şi Y va fi reprezentată prin combinaţia xy, iar valoarea de adevăr a disjuncţiei exclusive a lui X şi Y prin combinaţia $x + y$. E lesne de văzut că avem aici tot ce este necesar pentru a interpreta

[22] *Laws of Thought*, pp. 37–38.

sistemul lui Boole în termenii valorilor de adevăr pentru propoziţii, simbolurile 1 şi 0 stînd respectiv pentru adevăr şi fals. Şi această interpretare, ca şi cea numerică, satisface principiul (9).

Interpretarea care foloseşte propoziţii este realizată de Boole în felul în care am prezentat-o, numai că el nu utilizează expresia „valoare de adevăr", care a fost inventată mai tîrziu de către Frege. Dar această interpretare este introdusă de fiecare dată prin observaţii care ne fac să ne aşteptăm la ceva diferit şi, poate, mai interesant. În *Mathematical Analysis of Logic,* Boole scrie:

„Simbolurilor X, Y, Z, care reprezintă propoziţiile, le putem ataşa simbolurile elective x, y, z în felul următor: Universul ipotetic 1 va conţine toate cazurile şi complexele de circumstanţe care se pot concepe. Simbolul electiv x, atribuit unei expresii de asemenea cazuri, va selecta acele cazuri în care propoziţia X este adevărată; la fel pentru Y şi Z. Dacă ne limităm la contemplarea unei propoziţii date X şi facem abstracţie de orice alte considerente, atunci putem concepe numai două cazuri: primul caz constă în aceea că propoziţia dată este adevărată, iar al doilea că ea este falsă. Deoarece împreună aceste două cazuri epuizează universul propoziţiei iar primul este determinat în simbolul electiv x, cel de-al doilea va fi determinat prin atribuirea simbolului $1 - x$. Dacă însă admitem alte considerente, atunci fiecare din aceste cazuri se va desface în altele, individual mai puţin extensive, al căror număr va depinde de numărul criteriilor exterioare admise. De exemplu, dacă asociem propoziţiile X şi Y, numărul total de cazuri care se pot concepe este înfăţişat în schema următoare:

Cazuri	Expresii elective
1) X adevărată, Y adevărată	xy
2) X adevărată, Y falsă	$x(1 - y)$
3) X falsă, Y adevărată	$(1 - x)y$
4) X falsă, Y falsă	$(1 - x)(1 - y)$

... Şi trebuie să observăm că oricît de puţine sau de numeroase ar fi aceste circumstanţe, suma totală a expresiilor care reprezintă cazurile ce se pot concepe va fi întotdeauna egală cu unu."[23]

În *Laws of Thought,* Boole abandonează această idee atît de promiţătoare şi în locul ei propune ca litera x să fie considerată ca reprezentînd *durata de timp* în cursul căreia este adevărată propoziţia X. Aceasta este o revenire la o prezentare nesatisfăcătoare a adevărului propusă de către unii logicieni din antichitate şi evul mediu; probabil că ea i-a fost sugerată de lecturile sale metafizice şi teologice cu privire la adevărurile eterne. Dar pe cît se pare, în ambele sale cărţi el pregăteşte calea pentru o schemă în care simbolurile 1 şi 0 nu mai reprezintă adevărul şi falsul, ci mai curînd necesarul şi imposibilul. Ca şi interpretarea prin clase, acest model nu mai satisface principiul (9), deoarece el nu pretinde ca fiecare expresie să fie egalată fie cu 1, fie cu 0.

[23] *Mathematical Analysis of Logic,* pp. 49—50.

La sfîrşitul cărţii *Mathematical Analysis of Logic*, Boole face afirmaţia destul de confuză că teoria propoziţiilor ipotetice ar putea fi tratată ca o parte a teoriei probabilităţilor, iar în *Laws of Thought* mai multe capitole sînt destinate aplicării la probabilităţi a noii algebre. De fapt, aceasta furnizează încă o interpretare a calculului, conform căreia literele reprezintă probabilitatea propoziţiei X relativ la toată informaţia disponibilă, să zicem K. Adaptînd şi simplificînd simbolismul lui Boole obţinem:

$$\mathrm{Prob}_K(X \text{ şi } Y) = xy$$

dacă, fiind dat K, X şi Y sînt independente, şi

$$\mathrm{Prob}_K(X \text{ sau } Y) = x + y,$$

dacă X şi Y se exclud reciproc. Evident că această schemă nu satisface principiul (9); într-adevăr, nu putem admite ca fiecare probabilitate să fie egală cu 1 sau 0.

Într-un pasaj din *Laws of Thought*, care a fost adesea citat, Boole afirmă că metoda sa se întemeiază pe identitatea calculului logicii cu algebra numerică a lui 0 şi 1. Mai departe, în aceeaşi carte, el subliniază:

„De fapt putem să lăsăm la o parte interpretarea logică a simbolurilor dintr-o egalitate dată; să le transformăm în simboluri cantitative susceptibile de a lua doar valorile 0 şi 1; să operăm cu ele pînă obţinem rezultatul dorit; iar în final să revenim la interpretarea logică"[24].

Am văzut că algebra numerică a lui 0 şi 1 este un sistem mai restrîns decît algebra claselor, deoarece ea cuprinde principiul (9), care nu este valabil pentru clase. Dar desigur că ceea ce putem demonstra în algebra lui 0 şi 1 fără a utiliza ca premisă principiul (9) va avea un analog în algebra claselor; iar Boole nu utilizează de fapt nici principiul (9), nici altceva care să-l implice atunci cînd operează cu simbolurile calculului său. Dacă uneori îşi permite să conceapă aceste simboluri ca numere, aceasta este doar o concesie pe care o face uzanţelor, şi care-l face să se simtă acasă la el atunci cînd operează cu simboluri. În realitate, esenţa metodei sale este derivarea consecinţelor într-un mod abstract, adică fără a ţine seama de interpretare. Acest lucru el îl spune lămurit în primul paragraf al cărţii *Mathematical Analysis of Logic*, deşi ulterior, uneori, scrie ca şi cum ar fi uitat acest principiu.

În elaborarea formală a sistemului lui Boole, procesul fundamental este acela pe care el îl numeşte *dezvoltare*. Să presupunem că expresia

[24] *Laws of Thought*, p. 70. În original, propoziţia este în întregime scrisă cu caractere cursive.

$f(x)$ este o abreviere pentru o expresie care cuprinde litera x şi eventual alte semne elective, iar în afară de ele numai semnele algebrice uzuale despre care am vorbit mai sus. Atunci, alegînd în mod convenabil coeficienţii a şi b, avem $f(x) = ax + b(1 - x)$. Iar pentru a determina valorile lui a şi b n-avem decît să presupunem că x ia valorile 1 şi 0: prin substituţie obţinem atunci egalităţile $f(1) = a$ şi $f(0) = b$, din care deducem:

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x).$$

Se spune că această formulă dă *dezvoltarea* expresiei $f(x)$ după x. În *Mathematical Analysis of Logic*, Boole tratează această dezvoltare ca un caz degenerat al teoremei lui Maclaurin asupra dezvoltării unei funcţii după puterile crescătoare ale variabilei, dar în *Laws of Thought* el expediază această idee fantezistă la subsol[25].

Să presupunem acum că expresia $f(x, y)$ este abrevierea unei expresii în care în afară de simbolurile x şi y figurează doar semnele algebrice uzuale. Considerînd-o la început ca semnul unei funcţii în care locul argumentului este ocupat de x, putem scrie:

$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)(1 - x).$$

Considerînd rezultatul ca fiind semnul unei funcţii în care locul argumentului îl ocupă litera y, putem scrie atunci precum urmează:

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1 - y) +$$
$$+ f(0, 1)(1 - x)y + f(0, 0)(1 - x)(1 - y)$$

ceea ce reprezintă dezvoltarea completă a lui $f(x, y)$. Este uşor de văzut cum se pot dezvolta similar expresiile funcţionale cu un număr mai mare de simboluri elective. De exemplu, dacă avem de-a face cu o funcţie de trei argumente, dezvoltarea va conţine $2^3 = 8$ termeni, fiecare avînd un coeficient egal cu 0 sau 1, aşezat pe lîngă una dintre expresiile următoare:

$$xyz,\ xy(1 - z),\ x(1 - y)z,\ x(1 - y)(1 - z),\ (1 - x)yz,$$
$$(1 - x)y(1 - z),\ (1 - x)(1 - y)z,\ (1 - x)(1 - y)(1 - z).$$

Fireşte că termenii ai căror coeficienţi sînt nuli se pot omite fără a altera semnificaţia întregii expresii.

Deoarece fiecare ecuaţie electivă poate fi adusă la forma $f(x, y \ldots) = 0$, este clar că ea poate fi exprimată şi ca egalitate cu zero a sumei unor termeni. Apoi, dintr-o asemenea egalitate se poate infera că fiecare dintre termenii incluşi în sumă, luat separat, este egal cu 0, deoarece în acest calcul nu se admit termeni cu valori negative. Pe de

[25] *Mathematical Analysis of Logic*, p. 60; *Laws of Thought*, p. 72.

altă parte, dacă avem două ecuații $f(x, y, \ldots) = 0$ și $g(x, y, \ldots) = 0$, întregul lor conținut poate fi redat printr-o singură ecuație $h(x, y, \ldots) = 0$ a cărei dezvoltare cuprinde toți termenii care figurează în dezvoltările celor două ecuații date. Se spune atunci că cele două ecuații au fost *reduse* la una.

Pe această bază putem să definim o altă operație importantă, și anume *rezolvarea*. Să presupunem că informația dată este în întregime conținută în ecuația $f(x) = 0$, unde expresia $f(x)$ este o abreviere pentru o expresie în care figurează și alte simboluri elective decît x, și că dorim să găsim o ecuație de forma $x = f(y, z, \ldots)$, unde y, z etc. sînt toate celelalte simboluri care figurează în $f(x)$. Dezvoltînd după x ecuația inițială obținem:

$$f(1)x + f(0)(1 - x) = 0.$$

Aceasta se poate rescrie sub forma

$$[f(1) - f(0)]x + f(0) = 0,$$

și de aici inferăm cu ușurință

$$x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)}.$$

Trebuie să observăm că aici Boole introduce operația de împărțire căreia pînă acum nu-i atribuise nici o interpretare constantă în calculul său logic. Pentru a dispune de cele necesare în vederea rezolvării ecuațiilor, el stabilește aici anumite reguli de decodare care se întemeiază pe ipoteza că cel puțin aici simbolismului împărțirii i se poate atribui semnificația de abstragere. Problema nu este atît de dificilă cum pare la prima vedere. Atunci cînd o expresie de forma $\frac{f(0)}{f(0) - f(1)}$ se dezvoltă după simbolurile elective pe care le cuprinde, rezultatul este o sumă de produse, iar semnul împărțirii apare doar în diferiții coeficienți care pot să aibă una din următoarele patru forme: $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$. Dintre acestea, prima și a treia sînt ușor de înțeles deoarece se pot reduce la 1, respectiv 0, nu numai în algebra numerică uzuală, dar și într-un sistem în care semnul împărțirii indică abstragerea. Nici a patra nu ne prea încurcă, deoarece se poate arăta că ea nu intervine decît pe lîngă un produs care, luat ca atare, este egal cu 0. Dar a doua este curioasă; Boole spune că ea constituie un simbol de cantitate perfect nedeterminat corespunzînd la „toți, unii sau nici unul". Uneori el o egalează cu simbolul v, pe care îl utilizează în exprimarea propozițiilor particulare, dar acesta este un procedeu nesatisfăcător,

deoarece litera v se presupune că reprezintă o clasă care nu este nulă. Am putea eventual să utilizăm în locul ei ca abreviere litera w. Atunci, dacă aplicînd regulile de rezolvare ajungem la un rezultat de forma

$$x = \frac{1}{1} p + \frac{0}{0} q + \frac{0}{1} r + \frac{1}{0} s,$$

unde p, q, r şi s sînt diferite expresii de produse care urmează să fie incluse în expresia finală, putem scrie:

$$x = p + wq.$$

În interpretarea prin clase, aceasta înseamnă că acea clasă care este notată cu x constă din clasa notată cu p şi o parte nedeterminată din clasa notată cu q (adică din clasa q se iau toţi membrii, unii sau nici unii). În una din însemnările ulterioare pe care n-a mai publicat-o, Boole spunea că cei patru coeficienţi posibili de mai sus ar putea fi luaţi ca reprezentînd respectiv cele patru categorii de universalitate, nedeterminare, non-existenţă şi imposibilitate, care, după părerea sa, ar trebui să înlocuiască cu folos categoriile lui Kant[26].

În sfîrşit, Boole stabileşte reguli pentru *eliminare*. Să presupunem că informaţia noastră este reprezentată sub formă abreviată prin ecuaţia $f(x) = 0$ şi că este de dorit să stabilim relaţiile care există în mod independent de clasa denotată prin x între celelalte clase ale căror simboluri apar în dezvoltarea expresiei $f(x)$. Prin procesul de rezolvare obţinem:

$$x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)},$$

iar de aici obţinem cu uşurinţă

$$1 - x = -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}.$$

Dar, conform cu una dintre regulile fundamentale ale calculului, avem

$$x(1 - x) = 0$$

şi ţinînd seama de ea şi de cele două rezultate de mai sus ale rezolvării, putem, spune Boole, infera:

$$-\frac{f(0)f(1)}{[f(0) - f(1)]^2} = 0,$$

adică

$$f(0)\, f(1) = 0.$$

---

[26] *Studies in Logic and Probability*, pp. 220—226.

Dacă prelucrarea părții din stînga a acestei ecuații dă doar $0 = 0$, înseamnă că ecuația inițială nu oferă relații independente de clasa denotată prin x. Dacă însă rezultatul este de forma $g(y, z, \ldots) = 0$, am stabilit că dezvoltarea completă a ecuației $f(x) = 0$ dă o relație sau relații independente de clasa denotată prin x.

Această argumentare pe care Boole o dă în capitolul cu privire la eliminare din *Laws of Thought* este derutantă întrucît folosește expresii care nu au interpretare logică. Dar același rezultat poate fi obținut printr-un raționament intuitiv mai satisfăcător. Deoarece dezvoltarea expresiei funcționale $f(x)$ după x dă $f(1)x + f(0)(1 - x)$, unde $f(1)x$ este o prescurtare pentru suma termenilor care au ca factor pe x, iar $f(0)(1 - x)$ este o prescurtare pentru suma termenilor care au ca factor $(1 - x)$, $f(1)$ și $f(0)$ trebuie să reprezinte sume de termeni care se exprimă fără ajutorul simbolului x iar $f(1)f(0)$ trebuie să fie o abreviere a părților comune, adică a sumei termenilor care apar în ambele totaluri. Dacă în fapt expresiile desfășurate pentru $f(1)$ și $f(0)$ nu au părți comune, atunci este evident că egalitatea $f(x) = 0$ nu indică vreo relație independentă de clasa denotată prin x. Dacă însă reprezentările desfășurate pentru $f(1)$ și $f(0)$ au o parte comună, egalarea acestei părți cu 0 trebuie să indice o relație independentă de clasa denotată prin x.

Folosind diferite combinări ale acestor procese de calcul, Boole ajunge la reprezentări algebrice pentru toate felurile de raționament admise în logica tradițională. În particular, raționamentul silogistic poate fi prezentat ca o reducere a două ecuații de clasă la una singură, urmată de eliminarea termenului mediu și rezolvarea în raport cu termenul subiect al concluziei. Să considerăm, de exemplu, că h reprezintă clasa ființelor umane, a clasa animalelor, iar m clasa muritorilor; atunci premisele „Orice om este un animal" și „Orice animal este muritor" pot fi înlocuite prin egalitățile:

$$h(1 - a) = 0,$$
$$a(1 - m) = 0.$$

Reducînd acestea la una singură, obținem:

$$h - ha + a - am = 0$$

și dezvoltînd aceasta în raport cu a obținem

$$(h - h1 + 1 - 1m)a + (h - h0 + 0 - 0m)(1 - a) = 0$$

adică, după reduceri:

$$(1 - m)a + h(1 - a) = 0.$$

Apoi, eliminînd a în concordanță cu regulile eliminării, putem conchide

$$(1 - m)h = 0.$$

Această ecuație este deja într-o asemenea formă încît ea poate fi interpretată ca însemnînd „Orice ființă umană este muritoare", dar pentru a ne deprinde cu metodele lui Boole putem continua conform cu regulile sale pentru rezolvare:

$$h = \frac{(1-m)0}{(1-m)0-(1-m)1}$$

$$= \frac{(1-1)0}{(1-1)0-(1-1)1}\,m + \frac{(1-0)0}{(1-0)0-(1-0)1}\,(1-m)$$

$$= \frac{0}{0}\,m + 0(1-m) = wm + 0(1-m).$$

Exprimat în cuvinte, rezultatul nostru înseamnă că clasa ființelor umane constă dintr-o selecție nedeterminată (care eventual poate să fie nulă) din clasa muritorilor și o selecție nulă din clasa nemuritorilor; pentru a exclude posibilitatea unei selecții nule din clasa muritorilor ar trebui să includem în cadrul premiselor noastre afirmarea explicită a presupoziției existențiale pentru termenul „om". Evident că rezultatul putea fi obținut prin mijloace mai simple, dar este interesant de văzut cum pot fi aplicate în mod mecanic metodele introduse de Boole. De fapt el ne-a dat ceea ce astăzi se numește în mod curent o procedură de decizie (un algoritm).

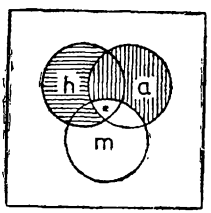
4. *Dezvoltări ulterioare ale algebrei booleene*

În sistemul lui Boole, noutatea principală este teoria sa a funcțiilor elective și a dezvoltărilor lor, sau, cum ne-am exprima noi astăzi, teoria funcțiilor de adevăr și exprimarea lor în forma normală disjunctivă. Filon din Megara a discutat anumite funcții elective și a explicat cum pot fi ele dezvoltate, însă Boole are meritul de a fi fost primul care a tratat aceste chestiuni într-un mod general. Am citat un pasaj din *Mathematical Analysis of Logic*, de unde mai era puțin pînă la tabelele de adevăr utilizate de Frege (adică tabularea diferitelor posibilități de adevăr) în *Begriffsschrift* (1879), care înfățișează mai limpede procedeul dezvoltării al lui Boole[27]. Într-un memoriu din 1885, logicianul american C.S. Peirce adăuga observația că o formulă necesar adevărată este o formulă care rămîne adevărată independent de valorile de adevăr atribuite constituenților săi: „Pentru a sta-

[27] În *Elementary Lessons in Logic* din 1870 și în lucrări ulterioare, W. S. Jevons a dat tabulări ale combinațiilor permise de termeni generali și a arătat cum pot fi utilizate acestea în calculul logic.

bili dacă o formulă este necesar adevărată, substituiți pentru literele ei f și v și vedeți dacă se poate considera falsă pentru vreo atribuire de asemenea valori"[28]. Cu aceste două noțiuni avem în esență tot ce este necesar pentru metoda tabulară sau matricială în logica primară, metodă care a fost popularizată în 1920 de către Post și Wittgenstein.

În lucrarea sa *Symbolic Logic* din 1881, J. Venn, un alt admirator al lui Boole, a folosit diagrame pentru regiuni ce se intersectează (adică modele topologice) în vederea ilustrării relațiilor dintre clase, respectiv a condițiilor de adevăr pentru propoziții. Diagramele sale diferă de cele ale lui Euler prin aceea că el reprezintă în primul rînd toate combinațiile posibile prin domenii distincte și apoi indică prin marcare care dintre diferitele domenii combinate trebuie să fie nule și care ne-nule, pentru ca o anumită propoziție să fie valabilă. Ca și Jevons, el consideră că ceea ce încearcă să elucideze reprezintă una dintre descoperirile principale ale lui Boole; de fapt, diagramele sale trebuie considerate ca ilustrări ale teoriei dezvoltării cu ajutorul căreia Boole și-a justificat diferitele procese de calcul. De pildă, exemplul considerat la sfîrșitul secțiunii anterioare poate fi prezentat fără aparatul greoi al coeficienților numerici ai lui Boole, cu ajutorul figurii de mai jos, în care pătratul reprezintă universul discursului,



iar domeniile celor trei cercuri reprezintă cele trei clase de ființe: umane, animale și muritori. Haşurarea unui domeniu arată că, după cum stipulează o premisă, clasa corespunzătoare este vidă, de exemplu clasa ființelor umane care nu sînt animale, iar marcarea cu asterisc a unui domeniu arată că clasa corespunzătoare nu este vidă. În *Symbolic Logic* (1896), Lewis Carroll a utilizat o schemă întrucîtva similară în cadrul procedurii pe care a dat-o pentru determinarea validității silogismelor.

Deoarece metodele lui Boole pot fi reduse la reguli de triere, ele se pretează la mecanizare. Primul care a înțeles acest lucru a fost Jevons; în 1869, el a reușit să construiască o mașină logică pe care în anul următor a prezentat-o la Royal Society[29]. În descrierea pe care o dădea, el spunea că mașina seamănă foarte mult cu o pianină, dar pentru ochiul modern ea pare mai degrabă să semene cu un con-

[28] *Collected Papers*, III, § 387. În cele ce urmează se va cita sub inițialele *C.P.*

[29] *The Substitution of Similars*, 1869; „On The Mechanical Performance of Logical Inference", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, CLX (1870), pp. 497–518. O relatare cu privire la această mașină, însoțită de o figură, este dată în *The Principles of Science*, publicată de Jevons în 1874. Mașina se păstrează la Muzeul de istorie a științei de la Oxford. W. Mays și D. P. Henry au publicat o relatare asupra operei lui Jevons în *Mind*, LXII (1953), p. 484–505, intitulată *Jevons and Logic*.

tor, deoarece semnele care indică diferitele combinații posibile de elemente (fie ele clase sau propoziții) apar și dispar prin apăsarea clapelor. În 1885, Allan Marquand a propus un analog electric al mașinii lui Jevons, iar în 1947 un calculator electric de alt tip a fost construit la Harvard de către T. A. Kalin și W. Burkhart, special pentru rezolvarea problemelor booleene, care conțin pînă la douăsprezece variabile logice (adică litere propoziționale sau de clase)[30].

Orice calculator electronic modern de destinație generală poate opera cu algebra booleeană. În adevăr, dacă el poate urmări articulația logică a calculului matematic uzual, el trebuie să fie în stare să țină seama de conjuncții, disjuncții, negații și dependența condițională. De exemplu, instrucțiunile ar putea fi că dacă atît condiția *A* cît și condiția *B* sînt realizate în cursul executării cutărui proces, atunci trebuie efectuată *C*, și apoi, după cum rezultatul lui *C* este *D* sau *E*, trebuie să se treacă la *F*, respectiv la *G*, și așa mai departe. Toate acestea se realizează folosind lămpi termionice sau tranzistori în diferite combinații cu legături în serie sau în paralel în calitate de comutatoare ale rutelor impulsurilor electrice; și nu este de mirare că se pot realiza circuite convenabile, deoarece algebra booleeană a fost utilizată încă în 1936 pentru studiul circuitelor cu contacte și relee în tehnica comunicațiilor electromecanice[31]. Dacă închiderea unui comutator care trebuie să fie într-una din cele două stări posibile se aseamănă cu afirmarea unei propoziții, atunci deschiderea poate fi asemănată cu negația acestei propoziții, iar aranjarea a două comutatoare în serie poate fi asemănată cu conjuncția a două propoziții, în timp ce legătura lor în paralel se aseamănă cu conectarea a două propoziții prin „sau". Dacă în concordanță cu aceste analogii un circuit complex de comutatoare și relee s-a descris printr-o expresie booleeană convenabilă, putem să determinăm algebric dacă anumite porțiuni vor fi deschise în anumite condiții, iar prin transformări algebrice ale expresiei se poate chiar găsi un circuit care să producă același rezultat printr-un aparataj mai simplu.

Deși sistemul lui Boole se pretează în numeroase feluri la o manipulare lesnicioasă, trebuie să admitem că el este deficitar nu numai sub raportul eleganței, din cauza restricției de a nu putea scrie $x + y$ dacă nu este satisfăcută condiția $xy = 0$, dar și sub raportul rigorii, datorită utilizării literei *v* pentru exprimarea propozițiilor existențiale, a admiterii

[30] B. V. Bowden, *Faster Than Thought* (Mai iute ca gîndul), p. 333 și urm. Această lucrare despre calculatoarele electronice dă unele detalii cu privire la alte mașini logice, dar o prezentare completă a subiectului se poate găsi în pasionanta carte a lui Martin Gardner *Logic Machines and Diagrams*, care începe de la Raymond Lullus.

[31] C. E. Shannon, „A Symbolic of Relay and Switching Circuits", *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* LVII (1938), p. 713–723.

unor coeficienți numerici diferiți de 1 și 0 și a utilizării operației de împărțire, căreia nu i se atribuie în logică o semnificație constantă. În cursul jumătății de veac de după publicarea operei lui Boole *Laws of Thought*, toate aceste carențe au fost înlăturate de succesorii săi. Reforma a început-o, în 1864, Jevons cu *Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity*, în care propunea utilizarea simbolului + în accepția lui „sau" în sens inclusiv, fără vreo restricție în ce privește semnele între care poate figura. Această propunere a permis o simplificare radicală și, ca atare, a fost bine primită de către toți autorii ulteriori din domeniul algebrei logicii, cu excepția lui Venn. După cum sublinia C. S. Peirce într-un memoriu din 1867, se obține astfel un paralelism exact între teoremele referitoare la adunarea logică și cele referitoare la înmulțirea logică[32]. Acest avantaj a fost exploatat în modul cel mai deplin de către E. Schröder, care în *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890—1905) a pus aceste teoreme în coloane paralele. Într-un memoriu ulterior (1880), Peirce a înaintat și mai mult pe calea simplificării, arătînd că funcțiile elective ale lui Boole se pot exprima cu ajutorul unui singur semn primitiv avînd semnificația „nici... nici..."[33]. Dar, ca și multe alte descoperiri ale lui Peirce, aceasta a trecut neobservată la timpul său; reducerea n-a fost utilizată în nici un fel pînă n-a fost redescoperită de H. M. Sheffer în 1913[34]. Tot lui Peirce îi revine meritul de a fi reintrodus un semn avînd semnificația *inest* al lui Leibniz; ideea, deși nu și semnul, a fost adoptată de către Schröder.

Însă dezvoltarea cea mai importantă constă în prezentarea calculului într-o formă riguros axiomatizată. În timp ce Boole se mulțumise să-și caracterizeze sistemul prin unicul principiu care părea să-l deosebească de algebra numerică obișnuită, urmașii săi au încercat să expliciteze toate ipotezele. Rezultatul acestor cercetări poate fi urmărit cel mai bine în cele două memorii ale lui E. V. Huntington cu privire la „Mulțimi de postulate independente pentru algebra logicii"[35]. Deși Huntington vorbește de algebra logicii, el prezintă postulatele sale într-o formă abstractă, adică fără vreo referire la interpretări, și este interesant de observat că versiunea dată de el pentru algebra booleeană prezintă un interes considerabil în matematica modernă, abstracție făcînd de utilizarea ei în logică. Pentru ușurarea comparării, prima, a doua și a patra dintre listele de principii ale lui Huntington sînt date în cele ce urmează în simbolismul lui

[32] *C.P.*, III, §§ 1—19

[33] *C.P.*, IV, §§ 12—20

[34] *Trans. Amer. Math. Soc.*, XIV (1913), p. 481—488

[35] *Ibid.*, V (1904), p. 288—309 și XXXV (1933), pp. 274—304, 557—558, 971.

Boole, în măsura în care acest lucru este posibil. Trebuie încă o dată să amintim că diferitele semne, inclusiv 1 şi 0, nu au alt sens în afară de cel care le este atribuit de către postulate.

Prima mulţime de postulate a lui Huntington este adaptată după *Universal Algebra* (1898) a lui A. N. Whitehead; ea este cea mai apropiată de sistemul lui Boole, deoarece ia ca primitive cele două operaţii de adunare şi înmulţire. Se presupune că aceste operaţii se pot aplica oricărei perechi dintr-o clasă de lucruri care pot fi denumite pe scurt elemente ale algebrei. Dacă vrem să dăm o interpretare logică acestor postulate, vom considera că elementele sînt fie clase, fie propoziţii.

I.a. Dacă a şi b sînt elemente, atunci şi $a + b$ este element.
I.b. Dacă a şi b sînt elemente, atunci şi $a \times b$ este element.
II.a. Există un element 0 astfel încît pentru orice element a, $a + 0 = a$.
II.b. Există un element 1 astfel încît pentru orice element a, $a \times 1 = a$.
III.a. $a + b = b + a$ pentru toate elementele a şi b ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
III.b. $a \times b = b \times a$ pentru toate elementele a şi b ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
IV.a. $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ pentru toate elementele a, b şi c ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
IV.b. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ pentru toate elementele a, b şi c ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
V. Dacă elementele 0 şi 1 există şi sînt unice, atunci există un element $\bar{a}$ astfel încît (I) $a + \bar{a} = 1$ şi (II) $a \times \bar{a} = 0$.
VI. Există cel puţin două elemente x şi y astfel încît $x \neq y$.

Trebuie notat că aceste postulate sînt coordonate astfel încît să pună în evidenţă corespondenţa în sistem dintre adunare şi înmulţire. Independenţa fiecărui postulat de toate celelalte se poate arăta construind un model care satisface toate celelalte fără a satisface postulatul considerat. Unele condiţii, care la prima vedere par a fi redundante, sînt incluse special în vederea păstrării independenţei. De exemplu, IIa sau IIb pot fi false dacă V este satisfăcut doar prin neîndeplinirea condiţiei.

A doua mulţime a lui Huntington este similară cu cele propuse de Leibniz, Peirce şi Schröder întrucît ea se ocupă cu o relaţie de incluziune, care se deosebeşte de orice operaţii cu elemente. Semnul pe care-l vom utiliza pentru această relaţie este folosit în matematica

numerelor în sens de „este mai mic decît", dar aici trebuie înțeles în sensul că formula $a < b$ nu exclude formula $a = b$. Dacă, după cum este uzul, elementele algebrei sînt presupuse a fi clase, atunci se poate considera că semnul stă pentru incluziune în sensul în care o subclasă este inclusă într-o supraclasă, dar *nu este* membru al acesteia.

1. $a < a$ pentru orice element a.
2. Dacă $a < b$ și $b < a$, atunci $a = b$.
3. Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.
4. Există un element 0 astfel încît pentru orice element a diferit de el $0 < a$.
5. Există un element 1 astfel încît pentru orice element a diferit de el, $a < 1$.
6. Dacă $a \neq b$ și nici $a < b$ nici $b < a$, atunci există un element s astfel încît (I) $a < s$, (II) $b < s$ și (III) dacă y diferit de s este astfel încît $a < y$ și $b < y$, atunci $s < y$.
7. Dacă $a \neq b$ și nici $a < b$ nici $b < a$, atunci există un element p astfel încît (I) $p < a$, (II) $p < b$ și (III) dacă x diferit de p este astfel încît $x < a$ și $x < b$, atunci $x < p$.
8. Dacă elementele 0 și 1 există și sînt unice, atunci pentru orice element a există un element $\bar{a}$ astfel încît (I) dacă $x < a$ și $x < \bar{a}$ atunci $x = 0$ și (II) dacă $a < y$ și $\bar{a} < y$ atunci $y = 1$.
9. Dacă postulatele (1), (4), (5), (8) sînt toate valabile și dacă nu are loc $a < \bar{b}$, atunci există un element x diferit de 0 astfel încît $x < a$ și $x < b$.
10. Există cel puțin două elemente x și y astfel încît $x \neq y$.

În acest ansamblu de postulate, subansamblul (1) — (7) este alcătuit din postulate independente, (8) și (9) sînt independente de primele șapte, dar atît (6) cît și (7) se pot deduce din celelalte. Le-am menționat aici pe amîndouă de dragul simetriei. Evident, literele s și p, utilizate în enunțurile respective, au scopul de a sugera „suma", respectiv „produsul".

Postulatele (4) și (8) pentru incluziune explicitează un principiu din teoria claselor, care adesea a dat naștere la confuzii, și anume: clasa nulă este o subclasă a tuturor claselor. La prima vedere pare curios a spune că o clasă nu are membri, dar odată acceptată această extindere tehnică a utilizării cuvîntului „clasă", principiul menționat este firesc și ușor de înțeles. Într-adevăr, faptul că intersecția a două clase oarecare este o subclasă a fiecăreia dintre ele constituie un truism, iar de aici rezultă în mod direct că subclasa desemnată prin $a \times \bar{a}$, adică clasa nulă, trebuie să fie o subclasă a clasei desemnate prin a, oricare ar fi aceea.

A patra mulțime a lui Huntington este construită pentru a arăta cum se poate formula întregul sistem pornind de la operațiile de adunare și luare a complementarei ca unice noțiuni nedefinite. Alte noțiuni, cum ar fi operația de înmulțire sau relația de incluziune, se pot introduce la nevoie prin definiții.

(I) Dacă a și b sînt elemente, atunci $a + b$ este de asemenea element.

(II) Dacă a este un element, atunci $\bar{a}$ este de asemenea element.

(III) $a + b = b + a$ pentru toate elementele a și b ale căror combinații menționate aici sînt de asemenea elemente.

(IV) $(a + b) + c = a + (b + c)$ pentru toate elementele a, b și c ale căror combinații menționate aici sînt de asemenea elemente.

(V) $\overline{\bar{a} + \bar{b}} + \overline{\bar{a} + b} = a$ pentru toate elementele a și b ale căror combinații menționate aici sînt de asemenea elemente.

Acest ansamblu precum și ansamblul corespunzător pentru operațiile de înmulțire și luare a complementarei sînt probabil cele mai simple dintre cele ce se pot construi cu două sau mai multe operații.

Prin procedeul lui Peirce și Sheffer amintit mai sus se poate oferi însă o mulțime mai simplă de postulate, întrucît ea cuprinde o singură operație primitivă.

1. Există cel puțin două elemente distincte.
2. a/b este element, oricare ar fi elementele a și b.
3. $(a/a)/(a/a) = a$ pentru orice element a ale cărui combinații menționate aici sînt și ele elemente.
4. $a/\{b/(b/b)\} = a/a$ pentru toate elementele a și b ale căror combinații menționate aici sînt și ele elemente.
5. $\{a/(b/c)\}/\{(a/(b/c)\} = \{(b/b)/a\}/\{(c/c)/a\}$ pentru toate elementele a, b și c ale căror combinații menționate aci sînt și ele elemente.

Această mulțime se poate găsi în memoriul lui Sheffer de care am vorbit mai sus, iar expresia a/b e numită adesea funcția bară a lui Sheffer. Sîntem de acord că ultimele trei postulate par foarte complicate atunci cînd sînt scrise ca aici, în întregime, dar ele capătă o înfățișare mai naturală atunci cînd expresia a/b se consideră ca semnificînd fie $\bar{a} \times \bar{b}$, fie $\bar{a} + \bar{b}$, unde semnul $\bar{a}$ se introduce ca abreviere pentru a/a. Faptul că bara se poate interpreta la fel de bine în două moduri diferite este o consecință interesantă a principiului dualității.

Mai recent, A. Tarski a dat diferite mulțimi echivalente de postulate pentru un sistem extins de algebră booleeană cu două operații cu caracter nefinitist, și anume: luarea sumei logice, adică a reuniunii, pentru toate elementele unei mulțimi specificate de elemente și luarea produsului logic, adică a intersecției, pentru toate elementele unei mulțimi specificate de elemente[36]. Această generalizare este strîns legată de o teorie a relației dintre parte și întreg care a fost dezvoltată de către S. Leśniewski sub numele de „mereologie"[37]. De fapt, singura deosebire constă în aceea că sistemul lui Leśniewski exclude posibilitatea unui element nul inclus în orice alt element.

Toate aceste mulțimi de axiome au ca trăsătură comună faptul că utilizează cuvinte din limba uzuală, cum ar fi „dacă", și deci presupun un sistem de logică ce cuprinde reguli de inferență de la o propoziție sau o mulțime de propoziții la altă propoziție sau mulțime de propoziții. Acest fapt nu este un motiv suficient pentru a contesta că algebra lui Boole poate fi ea însăși interpretată ca sistem de logică, dar el sugerează că ea nu poate fi partea cea mai simplă sau partea fundamentală a logicii. Dacă se presupune că elementele algebrei sînt clase, atunci, evident, trebuie să existe o teorie fundamentală cu privire la derivarea propozițiilor din alte propoziții. Dar această teorie de bază nu poate fi aceeași algebră booleeană, cu interpretarea că elementele sînt de astă dată propoziții, deoarece a doua versiune a algebrei cuprinde exact aceleași ipoteze ca și algebra claselor. Lucrarea lui Frege din 1879, *Begriffsschrift*, a fost primul tratat de logică în care știința a fost dezvoltată într-o manieră absolut sistematică, cu un calcul al propozițiilor asemănător celui al lui Hrisip urmat, după cum se cuvine, de un calcul al claselor. Dar încă în 1877, H. McColl a făcut propuneri pentru un calcul al propozițiilor în care principiile asertate să fie mai curînd implicații decît egalități, și în această privință trebuie să-i acordăm meritul priorității, deși sistemul pe care l-a propus nu era complet, așa cum a fost calculul propozițiilor al lui Frege[38].

---

[36] „Zur Grundlegung der Booleschen Algebra", *Fundamenta Mathematicae*, XXIV (1935), pp. 177—198. A se vedea și traducerea în engleză, în *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 320—341.

[37] „O podstawach matematyki", *Przegląd Filozoficzny*, XXXIII (1930), pp. 77—105.

[38] „The Calculus of Equivalent Statements", *Proceedings of the London Mathematical Society*, IX (1878), pp. 9—10; 177—186; X (1879) pp. 16—28; XI (1880), pp. 113—121.

5. *Teoria relațiilor: De Morgan și Peirce*

Succesul lui Boole în construirea unei algebre care cuprindea toate teoremele logicii tradiționale i-a determinat pe unii logicieni să presupună că toată logica poate fi prezentată într-o formă algebrică; de aceea, în generația următoare s-au făcut încercări de a prelucra logica relațiilor în același mod ca și logica claselor. Cea mai detaliată dezvoltare pe această linie de gîndire se poate găsi la Schröder în *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (volumul III, 1895), dar ideea originală și majoritatea propozițiilor interesante au fost formulate pentru prima oară de către Peirce într-un șir de memorii scrise între 1870 și 1903 și care acum se pot citi în volumul al treilea din operele sale (Collected Papers). Din nefericire, Peirce semăna cu Leibniz nu numai în ce privește originalitatea logicii sale, dar și în ce privește inaptitudinea organică de a finisa numeroasele proiecte concepute.

În capitolele anterioare am menționat un număr de tentative sporadice de a lucra cu argumentări care depind de proprietățile relațiilor, dar interesul susținut pentru această materie datează abia de la un memoriu din 1859, scris de către Augustus de Morgan[39]. În acest memoriu el spune că doctrina silogismului pe care o discutase în lucrarea sa *Formal Logic* din 1847 și în memorii anterioare este doar un caz particular al teoriei compunerii relațiilor și că acum el dorește să treacă la o abordare mai generală a acestei materii. Canoanele raționamentului silogistic au ca efect un enunț asupra caracterului convertibil și tranzitiv al relației de identitate. O relație se spune că este convertibilă atunci cînd ea este identică cu propria ei conversă (de exemplu, relația de asemănare); se spune că este tranzitivă atunci cînd o relativă a unei relative în raport cu această relație este o relativă de aceeași speță (de exemplu, relația de a fi un strămoș). Aici cuvîntul „convertibil" exprimă ceea ce în scrierile mai vechi se înțelegea prin „simetric". Distincția nu era nouă; în adevăr, după cum a subliniat Peirce, Ockham a scris despre asemenea relații că ele ar fi echiparente în opoziție cu relațiile disparente, cum ar fi relația de tată[40]. Prin cuvîntul „relativă" pe care-l utilizează în definiția relațiilor tranzitive, De Morgan înțelege ceea ce unii logicieni numesc termen relativ, adică un termen care se aplică la ceva numai dacă acesta este legat de un anume altceva. El, ca și Peirce și Schröder, concepe totdeauna o relație ca fiind exprimată într-o formă ca „ —

[39] „On the Syllogism IV and on the Logic of Relations", *Cambridge Philosophical Transactions*, X (1864), pp. 331—358.

[40] *Summa Totius Logicae*, I, cap. 52, citat de Peirce în *C.P.*, III, § 136. Termenul *aequiparantia* intervine încă la Petrus Hispanus în *Summulae Logicales* (ed. Bochenski, § 3. 19).

este un strămoş al lui..." şi consideră că sarcina este de a arăta cum se pot combina termenii relativi între ei precum şi cu termeni nerelativi.

În cuprinsul memoriului său, De Morgan propune simbolul pentru conversa şi contradictoria (el spune „contrara") unei relative şi pentru cele trei moduri diferite în care se pot combina două relative. După ce arată că conversa contradictoriei şi contradictoria conversei sînt identice, el trece apoi la tabularea conversei, contradictoriei şi a conversei contradictoriei pentru fiecare din cele trei combinaţii. Notaţia sa nu este prea satisfăcătoare şi nu avem nevoie s-o reproducem aici. Cele trei moduri de combinaţie pe care le analizează el sînt cele care se pot exprima prin scheme ca (I) x este un l al unui m al lui y (de ex., „John este un preferat al stăpînului lui Peter"), (II) x este un l al fiecărui m al lui y, (III) x este un l al unui singur m al lui y. Şi el arată că conversa, sau contradictoria, sau conversa contradictoriei pentru fiecare asemenea combinaţie este la rîndul ei o combinaţie de una din speţele considerate, dar o combinaţie în care o relativă simplă poate fi conversa, sau contradictoria, sau conversa contradictoriei unei relative simple din combinaţia iniţială. Astfel, conversa contradictoriei combinaţiei „preferat al stăpînului lui" este „non-servitor al fiecărui preferat al lui" sau „servitor numai al unui nepreferat al lui".

În primul său memoriu cu privire la logica relativelor, publicat în 1870, Peirce spune despre lucrarea lui De Morgan:

„Acest sistem lasă încă de dorit. Algebra logică a lui Boole are o frumuseţe atît de singulară încît este interesant să cercetăm dacă ea nu poate fi extinsă pe întregul imperiu al logicii formale în loc de a fi restrînsă la partea cea mai simplă şi mai puţin utilă a materiei, logica termenilor absoluţi, care pe vremea lui Boole era unica logică formală cunoscută ... Extinzînd utilizarea simbolurilor vechi la materii noi, trebuie desigur să ne ghidăm după anumite principii de analogie care, atunci cînd sînt formulate, devin definiţii noi şi mai largi pentru aceste simboluri"[41].

Poate că ideea unei algebre a relativelor a fost sugerată de convenţia lui De Morgan de a scrie lm ca o abreviere pentru *l al unui m al lui;* într-adevăr, Peirce a continuat să folosească juxtapunerea semnelor relative în acest fel şi spunea că această juxtapunere este o expresie a produsului relativ. În cele ce urmează, vom utiliza simbolul $l \times_R m$ în loc de lm pentru a face clară noutatea concepţiei, precum şi pentru a pune în gardă împotriva ipotezei că înmulţirea relativă ar fi comutativă, sau că din „x este un preferat al unui stăpîn al lui y" am putea infera „x este un stăpîn al unui preferat al lui y". Urmînd aceeaşi analogie, Peirce a introdus mai tîrziu noţiunea de sumă rela-

[41] *C.P.*, III, §§ 45–46.

tivă. Deoarece semnul său special pentru suma relativă este greu de reprodus o vom exprima prin simbolul $l +_R m$. În utilizarea obişnuită sau în convenţiile logicienilor anteriori nu exista nimic care să sugereze o interpretare pentru un atare semn; alegerea lui Peirce pare a fi fost călăuzită de dorinţa de a păstra tiparul regulilor lui De Morgan pentru sumele şi produsele logice nerelative. În adevăr, el spunea că suma relativă a lui „preferat" şi „stăpîn" este „preferat al fiecărui non-stăpîn al lui". Aceasta este o combinaţie care cu greu ar putea fi considerată ca un candidat convenabil pentru titlul de sumă, dar ea are meritul de a ne permite să asertăm două egalităţi:

$$\overline{l \times_R m} = \bar{l} \times_R \bar{m}$$

şi

$$\overline{l \times_R m} = \bar{l} +_R \bar{m}.$$

Desigur că trebuie să deosebim cu grijă produsele relative şi sumele relative definite astfel de Peirce de produsele şi sumele logice obişnuite ale relativelor. Semnul $l \times m$ poate fi considerat ca însemnînd „preferat şi stăpîn", unde ambele relaţii considerate au aceiaşi termeni; dar semnul $l \times_R m$ înseamnă „preferat al unui stăpîn al lui", unde relaţiile se combină numai în sensul că un al doilea termen pentru prima este un prim termen pentru a doua. În mod inevitabil, această distincţie conduce la complicaţii în acest calcul. De exemplu, avem nu numai

$$a \times_R (b \times_R c) = (a \times_R b) \times_R c,$$

dar şi

$$a \times_R (b \times_R c) < (a \times_R b) \times (a \times_R c)$$

unde $<$ are sensul de „este inclus în" şi se presupune că termenii între care intervine reprezintă clase.

Este acest rezultat o extindere naturală a algebrei booleene? În afară de cele trei operaţii, adunare, înmulţire şi negaţie (sau luare a complementarei), care intervin în algebra booleeană obişnuită, acest sistem nou conţine operaţiile de adunare relativă, înmulţire relativă şi conversiune; şi deşi există anumite analogii între aceste trei operaţii noi şi cele trei operaţii vechi, oricine studiază în amănunt opera lui Schröder este îndreptăţit să se întrebe dacă această tentativă de a prezenta teoria relaţiilor ca o algebră merită bătaia de cap pe care o provoacă. Este adevărat că, după cum spunea Schröder, noţiunea de produs relativ este importantă în studiul şirurilor, de exemplu în lucrarea lui Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

Într-adevăr, într-un şir, fiecare obiect anterior este legat de fiecare obiect următor printr-o relaţie tranzitivă, adică printr-o relaţie ale cărei puteri sînt toate identice cu ea însăşi, deoarece ea satisface condiţia $t \times_R t = t$. Dar partea din teoria relaţiilor care poate fi prezentată în acest fel este doar un fragment redus din întreaga teorie şi chiar pentru acest fragment stilul prezentării pare neadecvat. Atunci cînd propunerile sale anterioare au fost realizate în detaliu de către Schröder, Peirce însuşi a apreciat astfel lucrurile.

Într-un memoriu din 1883, publicat ca apendice la *Johns Hopkins Studies în Logic*, el a început să folosească indici inferiori pentru semnele sale relaţionale spre a arăta care anume termeni se presupune că intră în fiecare relaţie şi în ce ordine anume[42]. De exemplu, semnul compus l_{ij} trebuia să însemne că persoana denumită i preferă o persoană denumită j. Această notaţie prezintă mari avantaje. Dacă, de exemplu, vrem să vorbim despre un om care se preferă pe sine, putem să scriem pur şi simplu l_{ii}, unde apariţia aceleiaşi litere în cele două locuri pentru indici arată că avem de-a face cu o utilizare reflexivă sau, după cum spunea Peirce, autorelativă a semnului relaţional. Iar atunci cînd vrem să vorbim, aşa cum a făcut Peirce uneori, despre relaţii cu mai mult decît doi termeni, putem construi expresii ca a_{ijk} sau b_{ijkl}. Dar cea mai importantă utilizare a acestor indici este aceea în care ei se combină cu semnele Σ şi Π, pe care Peirce le introduce în acelaşi articol. Aceşti cuantori, după cum îi numeşte el, sînt operatori cu semnificaţia „unii", respectiv „fiecare", şi ei vizează, desigur, adunarea logică şi înmulţirea logică a oricăror obiecte dintr-un anumit domeniu, deşi, după cum a explicat el mai tîrziu, ei nu pot reprezenta adunarea şi înmulţirea într-un sens riguros atunci cînd universul indivizilor este nenumărabil[43]. Cu acest procedeu se pot da definiţii foarte clare şi simple pentru noţiunile de produs relativ şi sumă relativă, şi anume:

$$(l \times_R m)_{ij} = \Sigma_x (l_{ix} \times m_{xj})$$

si

$$(l +_R m)_{ij} = \Pi_x (l_{ix} + m_{xj}).$$

Deocamdată acesta a fost probabil serviciul principal pe care îl aştepta Peirce de la noul său sistem de notaţii, dar peste doi ani el s-a ocupat mai amplu de această notaţie[44] şi în cursul timpului a putut să-şi dea seama că acest sistem de notaţii se poate folosi pentru a aborda tot felul de probleme care nu se pot exprima în limbajul înmulţirii

[42] *C.P.*, III, §§ 328–358.
[43] *Ibid.*, § 393.
[44] *Ibid.*, §§ 359–403.

relative și al adunării relative. În 1897, el scrie despre algebra sa a relativelor diadice:

„După cum mi se pare, profesorul Schröder atribuie o valoare prea mare acestei algebre. Ceea ce în ochii săi pare să fie meritul cel mai mare, pentru mine cu greu ar fi un merit; adică faptul că ea ne permite să exprimăm sub forma unei ecuații propoziții a căror semnificație reală este cu mult mai simplă decît aceea a unei ecuații. În afară de algebra pe care am descris-o aici, am inventat alta, care mi se pare mult mai meritorie... În această algebră, fiecare propoziție constă din două părți: cuantorii și boolianul. Boolianul constă dintr-un număr de unități relative asociate prin multiplicare nerelativă și agregare. Nu se pretinde nici un operator relativ (deși, la nevoie, se pot introduce asemenea operatori). Fiecare relativă elementară este reprezentată printr-o literă în rîndul respectiv cu indici subiacenți care denotă individii și care completează locurile goale. O bară trasată deasupra unei asemenea relative o neagă. La stînga boolianului se scriu cuantorii. Aceștia sînt Π sau Σ cu indici inferiori care arată că în boolian fiecare obiect din univers trebuie substituit succesiv pentru indicele produsului nerelativ (dacă cuantorul este Π) sau al agregatului (dacă cuantorul este Σ). De exemplu:

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} = (l_{11} + l_{12} + l_{13} + \text{etc.}) \cdot (l_{21} + l_{22} + l_{23} + \text{etc.}) \cdot \text{etc.}$$

înseamnă că fiecare preferă ceva. Însă

$$\Sigma_j \Pi_i l_{ij} = l_{11} \cdot l_{21} \cdot l_{31} \cdot \text{etc.} + l_{12} \cdot l_{22} \cdot l_{32} \cdot \text{etc.} + \text{etc.}$$

înseamnă că cineva este preferat de oricine"[45].

În memoriul său din 1883 și în studiul mai detaliat din 1885, Peirce spune că meritul acestui nou instrument îi revine lui O. H. Mitchell. În realitate, acest elev al său a folosit semne relaționale cu indici și operatori Π și Σ în contribuția sa la *Johns Hopkins Studies in Logic*, dar nu împreună și nici în sensul în care le utilizează Peirce. Ceea ce a creat Peirce a fost un simbolism adecvat pentru întreaga logică, avînd și o sintaxă identică cu aceea a sistemelor care se utilizează în prezent. Invenția sa el a numit-o algebra generală a logicii[46], dar ea nu este o algebră în sensul lui Boole, iar uzanța actuală a rezervat titlul de „algebră a logicii" pentru acea parte a teoriei logicii care poate fi prezentată fără utilizarea cuantorilor. Aceasta include logica primară și un fragment din logica neprimară, care este izomorf cu logica primară, și anume teoria atributelor (sau a claselor). Cînd avem de-a face cu propoziții care se pot exprima în simbolismul final al lui Peirce prin formule de felul $\Pi_i(a_i < b_i)$, putem înlătura indicii și cuantorii fără pericol de confuzie, dar pentru teoria generală a relațiilor un asemenea instrument este adesea esențial, iar faptul că Peirce a înțeles acest lucru dovedește măreția sa ca logician. De asemenea este merituos faptul că el a formulat unele principii foarte importante în ce privește utilizarea cuantorilor în deducție. De exemplu, el știa că fiecare propoziție se poate exprima

[45] *Ibid.*, §§ 498–502.
[46] *Ibid.*, § 499.

într-o astfel de formă încît toţi cuantorii să fie la început; el a arătat că, pe măsura posibilului, cuantorii existenţiali trebuie să fie aduşi la stînga celor universali, anticipînd astfel într-un mod remarcabil avantajele a ceea ce în prezent se numeşte formă normală prenex Skolem[47]. Este adevărat că nu-i putem acorda lui Peirce meritul de a fi primul care a conceput o teorie comprehensivă a logicii generale: această onoare îi revine lui Frege, care a publicat *Begriffsschrift* în 1879. Dar, după cîte ştim, Peirce nu auzise deloc de Frege atunci cînd şi-a publicat memoriul *The Logic of Relatives* (1883), astfel încît realizările sale merită să fie reţinute.

Deoarece la punctul său de vedere mai comprehensiv asupra logicii Peirce a ajuns prin studiul teoriei relaţiilor, el atribuia o importanţă deosebită noţiunii de relaţie în scrierile sale de mai tîrziu şi uneori încerca să extindă terminologia teoriei sale într-o formă oarecum paradoxală. Nemulţumit de a vorbi de relative *poliadice*, adică expresii relative care în sistemul său de notaţie pretind mai mult decît doi indici, el a ajuns să spună că o expresie atributivă de forma „... este înţelept", ar putea fi numită relativă *monadică*, iar expresiile propoziţionale complete fără locuri goale — relative *medadice*[48]. În anumite privinţe, acest fel de a vorbi poate oferi avantajul simplificării teoretice, şi pentru acest motiv a şi fost adoptat de fapt de către unii logicieni de mai tîrziu, dar nu se poate spune că ar avea vreo valoare filosofică. Pe de altă parte, se poate cîştiga un plus de înţelegere din observaţiile lui Peirce cu privire la cele două feluri diferite de a lega sistemul său de notaţie a relativelor cu modul mai vechi de a vorbi despre subiecte şi predicate:

„În enunţul unei relaţii, desemnările corelatelor trebuie să fie considerate ca tot atîtea *subiecte logice*, iar relativa însăşi ca fiind *predicatul*. Întreaga mulţime a subiectelor logice poate fi de asemenea considerată ca *subiect colectiv*, pentru care enunţul relaţiei este *predicat*"[49].

Un alt capitol interesant, dezvoltat de Peirce în cadrul teoriei sale a relaţiilor, este ceea ce el a denumit logica intenţională secundă, adică teoria unor noţiuni ca identitatea şi inerenţa. El o introduce în felul următor:

„Să considerăm acum logica termenilor luaţi în sens colectiv. Notaţiile noastre, aşa cum au fost dezvoltate pînă aci, nu ne spun în ce caz doi indici, i şi j, denotă unul şi acelaşi lucru. Putem adopta un semn special de intenţie secundă, să zicem 1, pentru a exprima identitatea, scriind 1_{ij}. Dar această relaţie de identitate are proprietăţi specifice. Prima dintre ele este aceea că dacă i şi j sînt identici, tot ce este adevărat cu privire la i este adevărat şi cu privire la j. Aceasta se poate scrie astfel:

$$\Pi_i \Pi_j \{\bar{1}_{ij} + \bar{x}_i + x_j\}.$$

[47] *C.P.*, III, § 505.
[48] *Ibid.*, § 465.
[49] *Ibid.*, § 467.

Utilizarea indicelui general al unui semn (aici: x) arată că formula este iconică. A doua proprietate este aceea că dacă orice este adevărat cu privire la i este adevărat şi cu privire la j, atunci i şi j sînt identici. Cel mai firesc mod de a scrie aceasta este următorul: fie că semnul q semnifică relaţia dintre o calitate, caracteristică, fapt sau predicat şi subiectul respectiv. Atunci proprietatea pe care vrem s-o exprimăm este

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k (1_{ij} + \bar{q}_{ki}\ q_{kj}),$$

iar identitatea se defineşte astfel:

$$1_{ij} = \Pi_k(q_{ki}q_{kj} + \bar{q}_{ki} + \bar{q}_{kj}).$$

Aceasta revine la a spune că două lucruri sînt identice atunci cînd fiecare predicat sau este adevărat pentru amîndouă, sau este fals pentru amîndouă. Ar putea să pară greoaie introducerea ideii de calitate pentru a exprima identitatea; dar această impresie se schimbă îndată ce ne dăm seama că $q_{ki}q_{kj}$ înseamnă doar că i şi j sînt amîndouă în interiorul clasei (sau colecţiei) k. Dacă vrem, ne putem dispensa de semnul q, utilizînd indicele unui semn şi referindu-ne la el în cuantori exact cum se referă indicii inferiori. Cu alte cuvinte, putem scrie:

$$1_{ij} = \Pi_x(x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j)."^{50}$$

Aici, cuvîntul „semn" („token") nu are semnificaţia specială de „apariţie particulară" pe care el i-a dat-o mai tîrziu, ci înseamnă orice simbol general de felul celor pe care adesea el îi numeşte relativi; „indice" înseamnă orice semn cu unica sarcină de a ne dirija atenţia către ceva, iar „iconic" este orice semn care figurează o schemă[51]. Astfel, cînd Peirce spune că o anumită formulă este iconică deoarece conţine indicele general al unui „token", el vrea să arate că această formulă dă tiparul pentru numeroase formule posibile şi deci, cum am spune noi acum, este o formulă schematică. Litera q, pe care el o utilizează aici cu semnificaţia de relaţie dintre caracteristică şi subiect sau dintre clasă şi un membru al ei, este evident un semn constant de mare importanţă. El introduce acest semn pentru a putea generaliza pe tot domeniul predicatelor posibile ale lui i şi j, fără a se abate de la convenţiile potrivit cărora cuantorii se referă numai la indicii inferiori; dar apoi el merge pînă la a spune că, dacă dorim, putem abandona această convenţie, permiţînd unui cuantor să se refere la indicele unui „token", ceea ce în terminologia modernă este tot una cu a spune că putem folosi cuantori pentru a lega variabile predicative. În capitolele următoare vom avea prilejul de a examina mai amănunţit implicaţiile celor două moduri ale lui Peirce de generalizare pentru calităţi sau clase. Deocamdată trebuie să observăm doar că Peirce a dovedit o putere de pătrundere remarcabilă atunci cînd a despărţit noul său obiect de studiu de restul logicii, numindu-l intenţional-secund. Aceasta constituie începutul a ceea ce în prezent se numeşte teoria mulţimilor.

---

[50] *C.P.*, III, § 398. A se vedea şi *C.P.*, IV, §§ 80—84.
[51] *C.P.*, III, §§ 361 şi urm.

VII

NUMERE, MULȚIMI ȘI ȘIRURI

1. *Frege și contemporanii săi*

După lucrările lui Boole, următorul mare pas în logică l-a realizat Gottlob Frege (1848—1925). Dar în timp ce Boole urmărea să prezinte logica drept parte a matematicii, Frege dorea să arate că aritmetica este tot una cu logica. La prima vedere, cele două programe par să fie opuse, iar filosofii care nu i-au simpatizat pe nici unul din ei au subliniat uneori în derîdere discrepanța aparentă. Dar în realitate nu este nici o contradicție. Cînd Boole scria despre analiza matematică a logicii, el avea în vedere numai prezentarea logicii ca un calcul similar în anumite privințe cu algebra numerelor. Ca și Leibniz, el considera că trăsătura distinctivă a științei matematice ar fi construcția de calcule și că ar putea prezenta interes calcule care să fie interpretabile fără referință la număr sau cantitate. Frege nu urmărea să nege aceasta. Dimpotrivă, el a mers mult mai departe decît oricare dintre precursorii săi în ce privește exigența de rigoare formală în studiul logicii, iar sistemul deductiv sau calculul pe care l-a elaborat este cea mai uriașă realizare din istoria acestui domeniu. Dar în plus el a încercat să arate că și numerele se pot defini fără referire la alte noțiuni decît acelea cuprinse în interpretarea calculului său ca sistem de logică. Dacă avea dreptate să facă aceasta, atunci logica include aritmetica și, odată cu ea, toate ramurile matematicii care se pot reduce la aritmetică, în sensul că se poate arăta că ele cuprind doar noțiuni care se află deja în aritmetică sau logică, cel puțin ca posibilitate.

Sugestia după care aritmetica este o dezvoltare a logicii, după cîte știm în prezent, aparține și altor autori dinainte de Frege[1]. Dar nici unul nu a arătat vreodată în amănunt cum se poate dezvolta logica într-un sistem care ar putea primi și numele de aritmetică, iar Frege a înțeles de la bun început că teza sa nu poate fi stabilită în mod satisfăcător fără a efectua în prealabil două îmbunătățiri în ce privește prezentarea logicii. În primul rînd, materialul tradițional precum și

[1] *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§ 15—17. Lucrarea va fi citată sub inițialele *Gl*; ea a fost tradusă în engleză de J. L. Austin sub titlul *The Foundations of Arithmetic*.

contribuţiile mai noi ale lui Leibniz şi Boole trebuie să fie organizate astfel încît să înfăţişeze în mod clar structura ştiinţei şi marea varietate a formelor propoziţionale pe care trebuie să le ia în considerare logica generală. În al doilea rînd, orice lucru care se pretinde pentru demonstraţia teoremelor trebuie să fie exprimat explicit de la bun început, iar procedura de deducţie trebuie să fie redusă la un număr restrîns de mutări standard, astfel încît să nu apară vreun pericol de greşeală inconştientă în ceea ce avem de demonstrat[2]. Tocmai pentru a veni în întîmpinarea acestor două pretenţii de sistem şi rigoare a scris Frege, în 1879, lucrarea sa *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. După cum arată şi numele, această lucrare este un manual de ideografie sau scriere conceptuală. În prefaţa sa, Frege spune că relaţia dintre scriere şi vorbirea uzuală este asemănătoare cu relaţia dintre microscop şi ochi şi pretinde pentru ea meritele care au fost prezise de Leibniz şi alţii în secolul al XVII-lea în ce priveşte aşa-zisul *calculus philosophicus et ratiocinator*. Este una din sarcinile filosofiei, ne spune el, de a distruge dominaţia cuvîntului asupra gîndirii umane, iar invenţia sa ar oferi deja ceva în direcţia eliberării logicii de supunerea ei prea mare faţă de gramatica limbajului uzual. În particular, trebuie să ne aşteptăm ca în logică terminologia ambiguă şi confuză de „subiect" şi „predicat" să facă loc unei distincţii mai satisfăcătoare a formelor propoziţionale în conformitate cu doctrina funcţiilor. Adăugînd cîteva semne noi pentru relaţiile care se pot intui, noua scriere s-ar putea extinde în vederea realizării unui calcul geometric de felul celui pe care-l doresc matematicienii atunci cînd vorbesc de *analysis situs*; dar intenţia sa este de a arăta în prezent că aşa cum e, această scriere este adecvată pentru prezentarea aritmeticii, şi o treime din mica sa carte trebuie să fie considerată ca o comunicare preliminară a acestui program.

Din păcate, lucrarea epocală a lui Frege a fost trecută cu vederea de către matematicienii şi filosofii timpului. După cum a observat el mai tîrziu, nu era nici o speranţă de înţelegere din partea multor matematicieni care, îndată ce se loveau de expresii logice cum ar fi „concept", „relaţie", „judecată", spuneau *Metaphysica sunt, non leguntur*, şi nici din partea filosofilor, care atunci cînd vedeau o formulă spuneau *Mathematica sunt, non leguntur*[3]. De aceea, în 1884 el a publicat cartea *Die Grundlagen der Arithmetik* în care a dat o expunere neformală a vederilor sale, împreună cu o critică a ideilor curente

[2] *Gl.*, §§ 90–91.

[3] *Grundgesetze der Arithmetik*, I, p. XII. Această lucrare va fi citată în cele ce urmează ca *Gg*.

în ce privește natura aritmeticii. El pretindea că ar fi făcut doar plauzibilă teza sa[4] și, deși era foarte descurajat de faptul că lucrarea sa anterioară a fost neglijată, spera încă să dea o demonstrație riguroasă a identității aritmeticii cu logica. Spre sfîrșitul deceniului el a revenit la această problemă, iar în 1893 a apărut primul volum din capodopera sa, *Die Grundgesetze der Arithmetik*. În timp ce lucra la aceasta el și-a modificat în anumite privințe ideile anterioare privind filosofia logicii și și-a publicat unele rezultate în trei articole importante *Über Funktion und Begriff* (1891)[5], *Über Begriff und Gegenstand* (1892)[6], *Über Sinn und Bedeutung* (1892)[7]. În măsura în care sînt relevante, toate aceste lucruri noi sînt încorporate în marea sa lucrare, dar pentru o înțelegere mai deplină a gîndirii sale este totuși necesar să ne referim la publicațiile inițiale. Din nou, modul în care au fost primite lucrările lui Frege era descurajant, așa că el nu a mai publicat al doilea volum al lucrării *Grundgesetze* decît în 1903. Acesta din urmă se referă îndeosebi la teoria numerelor reale, dar o mare parte a sa este ocupată de critica vederilor curente, iar la sfîrșit Frege admite că trebuie să se mai facă mult înainte de a se putea defini numerele reale în mod convenabil. Într-un *Nachwort* (apendice) scris după ce lucrarea fusese deja tipărită, el admite cu părere de rău prăbușirea construcției sale în urma descoperirii de către Bertrand Russell a contradicției care este implicită în premisele sale; totuși, el susține în continuare concepția sa generală în ce privește relația dintre aritmetică și logică și examinează metode care ar putea repara greșeala făcută.

În ultimii 22 de ani ai vieții sale, Frege a continuat să lucreze în domeniul filosofiei logicii și matematicii, dar a publicat puțin, probabil fiindcă nu găsea o soluție satisfăcătoare a problemelor sale. Unele articole cu privire la fundamentele geometriei, pe care le-a publicat în 1906, arată o lipsă de simpatie și poate chiar o lipsă de înțelegere pentru dezvoltarea metodei axiomatice de către Hilbert[8]. Pe de altă parte, unele comentarii pe care le-a făcut asupra lucrării lui Russell în 1910[9] și unele memorii pe care le-a publicat în ultimii

---

[4] *Gl.*, § 87.

[5] *Berichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizinische und Naturwissenschaftliche Forschung*, 1891.

[6] *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*, XVI (1892), p. 192—205.

[7] *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, C (1892), pag. 25—50, (Tradusă și în limba română, în culegerea *Logică și Filosofie* — Editura politică, 1966).

[8] „Über die Grundlagen der Geometrie", *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker Vereins*, XV (1906), pp. 293—309, 377—403, 423—430.

[9] P.E.B. Jourdain, „The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, XLIII (1912), pp. 237—269.

ani pe probleme epistemologice arată că gîndirea sa rămăsese vie şi critică. De aceea este păcat că executorii săi literari nu au dat încă la iveală materialul nepublicat pe care îl au în păstrare*.

În capitolul următor vom examina acele descoperiri logice ale lui Frege care sînt respectate de către oponenţii săi filosofi sau matematicieni. Dar, înainte de a intra în detalii, este util să notăm aici linia generală a programului său, aşa cum a expus-o el însuşi în cea mai populară dintre lucrările sale, *Die Grundlagen der Arithmetik*, şi să comparăm punctul său de vedere cu opiniile eminenţilor săi contemporani J. W. R. Dedekind (1831—1916), G. Cantor (1845—1918) şi G. Peano (1858—1932). Dedekind, care era cel mai bătrîn şi primul care devenise cunoscut, publicase lucrarea sa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* încă în 1872, dar Cantor a fost singurul dintre aceştia care a dezvoltat o teorie „logică" a aritmeticii înainte de Frege, astfel încît trebuie să începem cu el.

2. *Teoria mulţimilor a lui Cantor*

Introducerea teoriei numerelor reale este un pas crucial nu numai pentru că implică luarea în considerare a mulţimilor infinite de numere raţionale, după cum am remarcat într-un capitol anterior, dar şi pentru că ea pare să pretindă recunoaşterea unui nou tip de infinit. În timp ce numerele raţionale se pot aşeza într-o corespondenţă biunivocă cu numerele naturale astfel încît se spune că ele formează o mulţime infinită numărabilă, chiar şi submulţimea numerelor reale conţinută într-un interval ca cel de la 0 la 1 este un exemplu de infinit de ordin superior. Aceasta s-a arătat pentru prima oară de către Cantor prin renumitul său procedeu al diagonalei. Pentru simplificare, să considerăm numerele reale dintre 0 şi 1 ca zecimale infinite, luînd, de exemplu, $\frac{1}{4}$ ca 0,24999..., $\frac{1}{2}$ ca 0,49999... etc. şi să presupunem că avem o prescripţie după care le putem aranja pe toate într-o tabelă infinită de forma:

$$0,a_1a_2a_3 \ldots$$
$$0,b_1b_2b_3 \ldots$$
$$0,c_1c_2c_3 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

* În deceniul care a trecut de la scrierea acestor rînduri, situaţia s-a schimbat. Manuscrisele lui Frege, inclusiv o bună parte din corespondenţa sa, au fost editate (Nota trad.).

astfel încît putem vorbi de primul dintre ele, de-al doilea, al treilea şi aşa mai departe. Atunci putem să indicăm un număr real situat în interiorul intervalului de la 0 la 1, aşezînd în primul loc după virgulă orice cifră dorim în afară de a_1, 0 sau 9, în al doilea loc orice cifră dorim în afară de b_2, 0 sau 9, în al treilea loc orice cifră dorim în afară de c_3, 0 sau 9 şi aşa mai departe. Dar acest număr real nu poate fi identic cu nici unul din tabela noastră, deoarece el diferă de fiecare dintre ele cu cel puţin una dintre zecimale. Aceasta revine la a spune că tabela nu conţine toate numerele reale din intervalul considerat, sau, cu alte cuvinte, totalitatea numerelor reale din interval nu este numărabilă.

Pentru a face faţă acestei situaţii, între anii 1874—1897 Cantor a elaborat o nouă disciplină matematică, denumită teoria mulţimilor. Opera sa a fost admirată cu pasiune de către mulţi matematicieni şi condamnată cu egală pasiune de către alţii. Deoarece, după cum vom vedea, dezbaterile în jurul dezvoltării acestei teorii sînt strîns legate de unele probleme importante în legătură cu logica, este necesar să examinăm aici cîteva din ideile principale pe care el le-a pus în circulaţie.

După însăşi definiţia lui Cantor, o mulţime (*Menge*) este „reunirea într-un întreg a unor obiecte definite, distincte ale percepţiei sau gîndirii noastre, obiecte care se numesc elementele mulţimii"[10]. În primele sale lucrări el a folosit uneori în locul acestui termen termenul de „varietate" (*Mannigfaltigkeit*), iar succesorii săi au întrebuinţat cuvintele *ensemble*, „totalitate", „grămadă" şi „clasă". Se spune că o mulţime îşi conţine elementele (sau membrii săi), şi că la rîndul lor acestea aparţin mulţimii. Fiind dată o mulţime S, o submulţime a lui S este aceea ale cărei elemente sînt toate elemente ale lui S; şi, spre deosebire de elemente, spunem că submulţimea este o parte a lui S. O mulţime poate fi indicată fie dînd lista elementelor sale, de exemplu mulţimea {Peter, Paul}, fie dînd o descriere generală convenabilă pentru toate elementele sale şi pentru nimic altceva; dar în orice caz, mulţimile care au aceleaşi elemente trebuie să fie considerate ca fiind identice, deoarece, conform definiţiei, o mulţime nu este decît o colecţie de elemente. Pînă aici, teoria mulţimilor a lui Cantor seamănă cu teoria claselor a lui Boole, dar de aici încolo încep complicaţiile.

Două mulţimi S şi T se zice că sînt echivalente dacă există o corespondenţă biunivocă între ele, adică există o anumită relaţie astfel

[10] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I, *Mathematische Annalen*, XLVI (1895), pp. 481—512; a se vedea şi *Gesammelte Abhandlungen*, ed. Zermelo, p. 282.

încît fiecare element al lui S este corelat prin această relaţie cu un element al lui T şi numai cu unul, şi fiecare element al lui T este corelat cu un element al lui S şi numai cu unul. De exemplu, într-o societate monogamă mulţimea soţilor este echivalentă, în acest sens tehnic, cu mulţimea soţiilor.

Puterea (*Mächtigkeit*) sau numărul cardinal al unei mulţimi se poate atunci introduce ca fiind ceea ce au în comun toate mulţimile echivalente şi numai ele. După Cantor, acesta este „conceptul general care cu ajutorul inteligenţei noastre active rezultă dintr-o mulţime atunci cînd facem abstracţie de natura diferitelor ei elemente precum şi de ordinea în care ele sînt date", şi el poate fi reprezentat prin semnul „$\overline{\overline{S}}$", în care cele două liniuţe orizontale indică dubla abstracţie. Dacă S este finită, atunci $\overline{\overline{S}}$ este un număr natural; dar teoria intenţionează să cuprindă şi mulţimile infinite, ale căror puteri desigur că nu sînt numere naturale, şi această extindere se poate realiza cel mai uşor printr-o nouă definiţie a infinitului. Vom spune acum că o mulţime este infinită dacă şi numai dacă ea poate fi pusă într-o corespondenţă biunivocă cu o submulţime proprie a ei (adică cu o submulţime care nu este identică cu mulţimea însăşi). De exemplu, mulţimea numerelor întregi pozitive 1, 2, 3 etc. se poate pune în corespondenţă biunivocă cu mulţimea pătratelor de întregi pozitivi 1, 4, 9 etc., deşi pătratele sînt numai unele dintre numerele întregi pozitive. Această definiţie a fost formulată explicit pentru prima oară de către prietenul lui Cantor, Dedekind, în 1888[11]; dar în 1885 C. S. Peirce definise o mulţime finită ca fiind una care nu poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu o submulţime proprie a ei[12], iar anticipări interesante ale acestei idei se pot găsi la Plutarh[13], Proclus[14], Adam Balsham (care a fost menţionat înainte), Galilei[15] şi Bernard Bolzano[16].

Aşa cum mulţimile finite se pot compara între ele după numărul lor cardinal, tot astfel şi submulţimile infinite. Orice mulţime S are un număr cardinal mai mic decît o mulţime T, dacă S este echivalent cu anumită submulţime a lui T, dar nu chiar cu T. De exemplu, N, mulţimea numerelor naturale, are un cardinal transfinit mai mic decît C, mulţimea numerelor reale (care uneori se mai numeşte con-

[11] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, § 5, 64.

[12] *Collected Papers*, III, § 402.

[13] *De Communibus Notitiis*, § 38 (= *Moralia* 1079A).

[14] *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, Def. XVII.

[15] *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, I (*Opere*, ed. nazionale, vol. VIII, p. 78).

[16] *Paradoxien der Unendlichkeit*, § 20. Introducerea istorică la traducerea engleză a acestei lucrări, aparţinînd lui D. A. Steele, conţine unele date interesante, inclusiv referirile de mai sus la Plutarh şi Proclus.

tinuul), adică $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{C}}$, deoarece N este echivalent cu o submulțime a lui C, dar nu cu C însuși.

Acum să definim cîteva operații cu ajutorul cărora se pot construi mulțimi noi din mulțimi date. În fiecare caz în parte, mulțimile cărora li se aplică operațiile pot fi finite sau infinite. (1) S + T, care se numește sumă logică (sau *reuniune*) a lui S și T, conține acele lucruri care sînt elemente fie ale lui S, fie ale lui T, și nimic mai mult. (2) ST, care se numește produsul interior (sau *intersecție*) a lui S și T, conține acele lucruri care sînt elemente atît ale lui S, cît și ale lui T, și nimic mai mult. Aceste două noțiuni se întîlnesc și la Boole, dar ceea ce urmează este nou. (3) S × T, care se numește produsul exterior (sau *produs cartezian*) dintre S și T, este acea mulțime ale cărei elemente sînt toate perechile ordonate care conțin un element din S și un element din T. (4) S^T, care uneori se numește inserția mulțimii S în T, este mulțimea tuturor aranjărilor posibile (sau a funcțiilor univoce) prin care elementele lui S se pot atribui diferitelor elemente ale lui T atunci cînd (*a*) T nu este vid, (*b*) se permite ca un element al lui S să poată fi atribuit la mai mult decît un singur element al lui T și (*c*) două aranjări se consideră ca diferite dacă există cel puțin un element al lui T căruia i se atribuie diferite elemente din S. Astfel, dacă T este mulțimea eprubetelor și S este o mulțime de substanțe chimice, S^T este mulțimea posibilităților de a insera substanțele în eprubete astfel încît nici o eprubetă să nu conțină mai mult decît o singură substanță.

Printre mulțimile care se constituie prin inserție în S, există una de importanță deosebită, denumită mulțime-putere (*Potenzmenge*) a lui S. Aceasta este mulțimea tuturor submulțimilor lui S (în care includem atît pe S însăși, cît și mulțimea nulă) și este reprezentată frecvent fie prin P(S), fie prin "$\mathcal{U}$S", în care litera "$\mathcal{U}$" provine din cuvîntul german *Untermenge*. Pentru a vedea că $\mathcal{U}$S este într-adevăr o mulțime constituită prin inserție în S, este suficient să ne dăm seama că o submulțime a lui S este determinată îndată ce pentru fiecare element al lui S s-a decis dacă trebuie sau nu să fie inclus în submulțimea considerată. Pe scurt, $\mathcal{U}S = \{da, nu\}^S$, unde {da, nu} este mulțimea posibilităților pe care o are fiecare element al lui S în cursul selecției unei submulțimi. Or, Cantor declară că $\mathcal{U}$S are un număr cardinal mai mare decît S, oricare ar fi S; iar această propoziție este atît de importantă în teoria lui, încît ea a devenit cunoscută sub numele de „teorema lui Cantor". Evident, S este echivalentă cu o parte a lui $\mathcal{U}$S, și anume cu mulțimea tuturor mulțimilor-unitate*

* Se numește mulțime-unitate mulțimea cu un singur element (Nota trad.).

ale căror elemente sînt trase din S, şi deci pentru ţelul lui Cantor este suficient de a proba că S nu este echivalentă cu întreaga $\mathcal{U}S$. Să presupunem pentru scopurile argumentării că S şi $\mathcal{U}S$ ar fi echivalente. Aceasta ar fi tot una cu a spune că există o anumită schemă de corelaţii în cadrul căreia elementele lui S sînt corelate biunivoc cu elementele lui $\mathcal{U}S$. Or, elementele din $\mathcal{U}S$ sînt toate submulţimi ale lui S şi atunci ne putem întreba în mod rezonabil pentru fiecare element al lui S dacă el se corelează sau nu cu sine însuşi în această schemă. Să considerăm acum mulţimea care conţine toate acele elemente din S care nu sînt elemente ale corelatelor lor şi numai pe acestea. La rîndul ei, aceasta trebuie să fie şi ea un element al lui $\mathcal{U}S$, să zicem u*, şi astfel, conform ipotezei pe care am adoptat-o, ea trebuie să fie corelată cu un anumit element al lui S, să zicem s*. Este s* un element al lui u*? Dacă spunem "da", ajungem la o contrazicere, căci, conform definiţiei noastre, orice element din S care nu este conţinut în u* trebuie să fie un element al corelatei sale, iar aceasta este absurd, aşa că trebuie să respingem ipoteza că S ar fi echivalent cu $\mathcal{U}S$. Pe scurt: $\overline{\overline{\mathcal{U}S}} > \overline{\overline{S}}$. În concepţia ei generală, demonstraţia este similară cu aceea că numerele reale nu sînt numărabile, deoarece ea arată imposibilitatea unei anumite corelaţii propuse arătînd că această corelaţie ar permite definirea unui element care nu are acoperire. Din acest motiv se spune uneori că această argumentare este un exemplu de procedeu diagonal Cantor, deşi extracazul pe care îl introduce pentru a respinge ipoteza echivalenţei nu este literalmente un şir diagonal.

După cum arată simbolurile, operaţiile cu ajutorul cărora se pot forma mulţimi pornind de la mulţimi se introduc pentru a pregăti calea spre o aritmetică generală a numerelor cardinale. De exemplu, dacă S şi T se exclud reciproc (adică sînt disjuncte), atunci $\overline{\overline{S + T}} = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{T}}$, unde a doua utilizare a lui "+" înseamnă adunare a numerelor cardinale. La fel, $\overline{\overline{S \times T}} = \overline{\overline{S}} \times \overline{\overline{T}}$, iar $\overline{\overline{S^T}} = \overline{\overline{S}}^{\overline{\overline{T}}}$. Cîtă vreme ne ocupăm doar cu mulţimi finite, rezultatele nu au în ele nimic surprinzător. Dar dacă luăm în considerare mulţimi infinite, aritmetica la care conduc definiţiile este în mod inevitabil diferită în multe privinţe de aritmetica numerelor naturale. De exemplu, avem

$$\aleph_0 = \aleph_0 + n = n\,\aleph_0 = \aleph_0{}^n,$$

unde $\aleph_0$ este numărul cardinal al mulţimii numerelor naturale iar n este orice număr natural mai mare decît 0. Pe de altă parte, exact cum pentru orice număr natural c avem $2^n > n$, tot astfel $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, şi în general $2^c > c$ pentru orice cardinal c, indiferent dacă este finit sau

transfinit. Aceasta constituie un corolar imediat al teoremei lui Cantor. Într-adevăr, $\overline{\overline{\mathcal{U}S}} > \overline{\overline{S}}$ și $\overline{\overline{\mathcal{U}S}} = 2^{\overline{\overline{S}}}$, astfel încît $2^{\overline{\overline{S}}} > \overline{\overline{S}}$, oricare ar fi S. Avem astfel un șir nesfîrșit de cardinale transfinite din ce în ce mai mari (denumite alefi): $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etc. Prin definiție, primul dintre acestea este numărul cardinal al lui N, mulțimea numerelor naturale, iar al doilea se poate arăta că este numărul cardinal al lui C, mulțimea (sau continuul) numerelor reale pe care am examinat-o la începutul acestei secțiuni. Dar nu se știe dacă $2^{\aleph_0}$ este sau nu $\aleph_1$, adică numărul transfinit *imediat următor* lui $\aleph_0$. Cantor presupunea că așa este, iar Gödel a arătat că ipoteza generalizată a continuului, adică propoziția că $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ pentru orice număr ordinal n, este cel puțin consistentă cu anumite axiome acceptate pe scară largă ale teoriei mulțimilor[17]; dar pînă acum, nimeni nu a demonstrat imposibilitatea unei mulțimi care să nu fie echivalentă nici cu N, nici cu C, dar să aibă o submulțime echivalentă cu N și să fie ea însăși echivalentă cu o submulțime a lui C.*

Ca și toți matematicienii mari, Cantor considera că lucrările sale reprezintă descoperirea unor legi care nu sînt făcute de oameni. El susținea că nu e decît un scrib ascultător care nu are alt merit decît stilul său și economia expunerii[18]. Dar admiratorii săi au tratat adesea teoria sa a mulțimilor ca și cum ar fi o creație de vis asemănătoare cu *Kubla Khan* al lui Coleridge, pe cînd adversarii săi au văzut în ea un coșmar. Ceea ce pe unii i-a fascinat iar altora le-a repugnat în această doctrină a fost succesiunea nesfîrșită a cardinalelor transfinite; or, după cum am văzut, aceasta decurge din teorema sa cu privire la mulțimile putere. Demonstrația acestei teoreme este un raționament *ad absurdum*, construit cu ajutorul procedeului diagonal caracteristic lui Cantor, și de aceea nu constituie o surpriză faptul că suspectarea teoriei generale i-a condus pe unii matematicieni la îndoieli în ce privește utilizarea fără restricții a raționamentelor *ad absurdum* în demonstrațiile de existență.

3. *Frege despre precursorii săi*

Frege a fost unul dintre puținii care au admirat lucrările lui Cantor atunci cînd ele au apărut pentru prima oară. În *Grundlagen*, el scrie:

[17] *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory* (*Annals of Mathematics Studies*, no. 3).

* În prezent este cunoscut (P. Cohen, 1963) că ipoteza continuului este independentă de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor, adică în principiu se pot construi diferite teorii ale mulțimilor care satisfac sau nu această cerință (Nota trad.).

[18] *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 282, 477, 480.

„De curînd, într-o lucrare remarcabilă, G. Cantor a introdus numerele infinite (*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883). Împărtăşesc întru totul părerea sa că în principiu nu numai numerele finite trebuie să fie admise ca actuale. Ele sînt tot atît de puţin senzorial perceptibile sau spaţial localizate ca fracţiile sau numerele negative, cele iraţionale şi cele complexe; dacă denumim actual ceea ce acţionează asupra simţurilor noastre, sau cel puţin produce efecte cu consecinţe mai apropiate sau mai îndepărtate asupra percepţiilor senzoriale, atunci fireşte că nici unele dintre aceste numere nu sînt actuale. Dar nici nu avem nevoie de asemenea percepţii ca temei demonstrativ pentru teoremele noastre... Deşi din acest punct de vedere cred că sînt de acord cu Cantor, terminologia mea diferă într-o anumită măsură de cea a lui. Ceea ce eu numesc număr, el numeşte „putere", în timp ce conceptul său de număr se referă la ordonare ... În ceea ce ne priveşte, întrucît conceptul nostru de număr acoperă de la bun început numerele infinite, n-a fost necesară nici un fel de extindere"[19].

Iar apoi, după unele comentarii asupra ideii cantoriene de număr ordinal, idee pe care noi nu am menţionat-o în secţiunea anterioară, el continuă:

„În nici un caz, nimic din ceea ce am spus nu pune sub semnul întrebării legitimitatea sau fertilitatea lor. Dimpotrivă, salut investigaţiile lui Cantor ca pe o extindere a frontierelor ştiinţei, îndeosebi întrucît ele au deschis o cale pur aritmetică spre numere (puteri) superioare transfinite"[20].

Aceste observaţii merită să fie reţinute cu atît mai mult cu cît ele intervin către sfîrşitul unei cărţi care conţine multe critici ostile la adresa altor autori. Obiecţiile pe care le aduce Frege împotriva abordărilor precedente ale aritmeticii sînt de fapt atît de numeroase încît ar fi imposibil să le rezumăm pe toate aici. Dar, pentru a clarifica direcţia gîndirii sale şi pentru a arăta de ce s-a alăturat el lui Cantor, trebuie să examinăm ce avea de spus împotriva a trei rivali în filosofia aritmeticii, şi anume împotriva lui J. S. Mill, a lui Kant şi a formaliştilor.

De la greci încoace s-a acceptat aproape în unanimitate că matematica este o ştiinţă *a priori*, adică o ştiinţă în care toate propoziţiile se pot stabili fără vreun apel la datele experienţei, pentru a ne informa asupra unor obiecte particulare. De fapt, tocmai reflecţia cu privire la natura acestui studiu i-a condus pentru prima dată pe filosofi la concepţia că învăţarea este posibilă şi fără experienţă. Dar, în secolul al XIX-lea, J. S. Mill s-a orientat împotriva empirismului lui Hume şi a încercat să susţină că aritmetica se întemeiază pe inducţii pornind de la fapte referitoare la anumite grupe de lucruri. El susţinea că pentru a demonstra egalitatea „5 + 2 = 7" trebuie să facem apel la axioma că „ceea ce este compus din părţi, este compus din părţile acestor părţi" şi la definiţiile „7 = 6 + 1" şi „6 = 5 + 1"; dar el spunea că axioma, fiind „evidentă simţurilor în toate cazurile

[19] *Gl.*, § 85.
[20] *Gl.*, § 86.

care pot fi supuse deciziei lor şi atît de generală încît este coextensivă cu natura însăşi", trebuia să fie considerată ca „un adevăr inductiv sau o lege a naturii de nivel superior"; el argumenta că chiar şi definiţiile implică asertarea unor fapte fizice cu privire la existenţa unor colecţii decompozabile într-un anumit fel[21]. De aceea, Frege considera că *Grundlagen* trebuie să înceapă prin a susţine caracterul aprioric al aritmeticii.

Împotriva analizei definiţiei la Mill, Frege subliniază că dacă cunoaşterea unor anumite fapte fizice particulare ar fi necesară pentru utilizarea corectă a definiţiei fiecărui număr mic, atunci această cunoaştere ar fi necesară şi pentru utilizarea corectă a definiţiei fiecărui număr mare. De exemplu, noi n-am putea pune

$$1.000.000 = 999.999 + 1$$

înainte de a fi observat o colecţie de un milion de lucruri formată tocmai în acest fel; iar un om care a calculat cu numere cu nouă cifre ar trebui să fie demn de cele mai înalte onoruri pentru cunoaşterea naturii de care a dat dovadă[22]. Împotriva tezei că legile generale ale aritmeticii sînt adevăruri inductive, el ridică obiecţia că inducţia însăşi pare să pretindă anumite propoziţii generale ale aritmeticii, deoarece utilizarea în care se presupune că inducţia este o metodă a ştiinţei şi nu numai un proces de deprindere depinde de teoria probabilităţilor[23]. Dar cea mai puternică critică pe care Frege o aduce întregii teorii empiriste este aceea că ea implică confuzia de a presupune că semnul plus se referă la adunarea fizică[24]. Cînd spunem că $5 + 2 = 7$, noi nu avem în vedere că, dacă am adăuga două unităţi de volum lichid la cinci unităţi de volum lichid, am obţine şapte unităţi de volum lichid. Această din urmă propoziţie este în cazul cel mai bun o aplicaţie a propoziţiei matematice şi este valabilă numai cu condiţia să nu intervină în rezultat vreo alterare a volumului, de exemplu vreo reacţie chimică. Alte aplicaţii ale formulei ar putea fi la numere de evenimente, la virtuţi sau la rădăcini ale ecuaţiilor, unde nu poate fi vorba despre agregare fizică.

După ce a terminat cu teoria empiristă, Frege trece la problema caracterului sintetic sau analitic al legilor aritmeticii. Chestiunea a fost ridicată pentru prima oară de către Kant, şi Frege îl consideră pe acesta drept exponentul principal al punctului de vedere după care propoziţiile matematicii sînt sintetice, dar el nu acceptă dis-

[21] *A System of Logic*, III, XXIV, § 5.
[22] *Gl.* § 7.
[23] *Gl.*, § 10.
[24] *Gl.*, § 9.

tinctia pe care o face Kant între cele două tipuri de judecăți. După cum spune chiar el, un adevăr este analitic dacă pentru demonstrarea lui trebuie să facem apel numai la legile logicii generale și la definiții, dar este sintetic dacă pentru demonstrarea lui trebuie să utilizăm premise care nu sînt de natură general logică[25]. Kant era foarte aproape de acest punct de vedere atunci cînd încerca să lege adevărul judecăților analitice de principiul necontradicției[26], dar din păcate el a lucrat cu un concept de logică prea restrîns. Atunci cînd se întreba dacă conceptul predicat era sau nu conținut în conceptul subiect al unei judecăți, Kant utiliza un criteriu care este aplicabil numai judecăților universal-afirmative din schema lui Aristotel.

În judecățile singulare sau existențiale conceptul de subiect nu apare. Se pare că el concepea definiția unui concept complex doar ca o listă de note, în timp ce definițiile cu adevărat importante din matematică, de exemplu aceea a continuității unei funcții, nu sînt de acest tip[27]. Aici Frege pune degetul pe o carență a logicii tradiționale care nu fusese observată nici măcar de acei predecesori ai săi care s-au interesat cel mai îndeaproape de această chestiune. Leibniz, de exemplu, considera conceptele și propozițiile în maniera presupusă de analiza adevărurilor analitice la Kant; după cum am văzut, acesta a și fost motivul principal pentru care el nu a reușit niciodată să dea un exemplu convingător al marii dezvoltări pe care a proclamat-o în scrierile sale de logică. Boole, de asemenea, s-a mulțumit să cerceteze doar acele tipare relativ simple de structură care pot fi reprezentate prin cercurile lui Euler. Frege ar fi avut mai multă dreptate să vorbească de o nouă logică tocmai pentru că el permitea o mai mare complexitate a formelor logice decît aceea pe care au fost în stare să o conceapă predecesorii săi. În lucrările sale, „analitic" trebuie înțeles prin referire la propria sa logică și în nici un caz ca un sinonim pentru ceea ce Locke înțelegea prin „trivial".

Deși Frege îl critică pe Kant în ce privește distincția dintre adevărurile analitice și cele sintetice și respinge felul său de a înfățișa aritmetica, spre sfîrșitul lucrării sale *Grundlagen*, el scrie:

„Pentru a nu-mi atrage reproșul de a fi căutat să șicanez un geniu pe care cu toții nu-l putem privi decît cu admirație recunoscătoare, cred că este cazul să reliefez și acordul de idei, care are o pondere cu mult mai mare. Pentru a vorbi numai despre ceea ce este imediat relevant, văd un mare merit al lui Kant în distincția dintre judecățile analitice și cele sintetice. Arătînd că adevărurile geometriei sînt sintetice *a priori*, el ne-a relevat adevărata lor natură. Acest lucru merită să fie repetat și astăzi, deoarece adesea el nu este recunoscut. Deși Kant a greșit în ce privește aritmetica, aceasta, cred eu, nu poate micșora în mod serios valoarea operei sale. El a vrut

[25] *Gl.*, § 3.
[26] *Critica rațiunii pure*, B. 191.
[27] *Gl.*, § 88.

să arate că există judecăți sintetice *a priori*; dacă ele apar numai în geometrie sau se găsesc și în aritmetică, acesta este un lucru de mai mică importanță"[28].

Într-un pasaj anterior, el ne spune că geometria se întemeiază într-adevăr pe intuiție, după cum spusese Kant, și că axiomele ei guvernează orice este intuibil spațial, inclusiv cele mai stranii viziuni delirante sau cele mai îndrăznețe invenții poetice:

„Numai gîndirea conceptuală poate într-un fel să se elibereze, atunci cînd ea acceptă, să spunem, un spațiu cu patru dimensiuni sau cu o curbură pozitivă. Studiul unor asemenea concepții nu este în nici un caz inutil; dar el depășește cu mult ceea ce poate fi întemeiat prin intuiție ... Pentru țelurile gîndirii conceptuale putem totdeauna presupune contrariul uneia sau alteia dintre axiomele geometrice, fără a ajunge la autocontradicții atunci cînd ajungem astfel la concluzii care contravin intuiției noastre. Faptul că aceasta este posibil arată că axiomele geometriei sînt independente una de alta și de legile primitive ale logicii și că, deci, ele sînt sintetice"[29].

Din aceste explicații rezultă că Frege nu voia să nege posibilitatea geometriilor neeuclidiene (în sensul larg al cuvîntului „geometrie"); dacă i s-ar fi cerut lămuriri, el ar fi răspuns probabil că aserțiunile matematicienilor care studiază asemenea sisteme sînt într-adevăr analitice, deoarece conform cu felul său de a vedea lucrurile ele nu pot fi decît cel mult enunțuri condiționale, garantate prin forma lor logică. De aici, el ar fi putut ajunge să admită ca analitică și geometria euclidiană, considerată ca ramură a matematicii pure. În ce privește adevărul — dacă este adevăr — că axiomele lui Euclid se aplică în mod necesar la relațiile din spațiul intuit, el este nerelevant pentru studiul sistemului pe care acestea îl determină. Dar el continuă să folosească vechea expresie de „adevăruri ale geometriei" pentru a acoperi atît axiomele și teoremele, cît și enunțurile despre legătura dintre ele, și aceasta explică distincția de statut pe care o trasează între geometrie și aritmetică. Dacă cineva susține că ar ști că axiomele geometriei lui Euclid sînt necesar adevărate în sensul în care înțelegea acest lucru Euclid, adică în calitate de enunțuri generale cu privire la relații din spațiul obișnuit, el se angajează într-o doctrină a intuiției, ca aceea peluată de Frege de la Kant. Reciproc, oricine respinge vreo invocare a intuiției ca sursă de cunoaștere *a priori* trebuie să înțeleagă că el nu mai este îndreptățit să rețină vechiul punct de vedere cu privire la *oricare* dintre axiomele lui Euclid. Pe scurt, teza care îl interesa pe Frege nu este respinsă dacă se modifică accepția cuvîntului „geometrie".

Trebuie însă să admitem, după cum spune și Frege, că „invocăm prea ușor intuiția noastră lăuntrică atunci cînd nu putem indica vreun

[28] *Gl.*, § 89.
[29] *Gl.*, § 14.

alt temei"[30]. Este dificil să atribuim vreun sens clar spuselor lui Kant cu privire la intuiție atunci cînd el vorbește despre aritmetică. Într-unul din enunțurile sale cele mai explicite, el afirmă că pentru a aduna numerele 7 și 5 trebuie să depășim conceptele lor, „chemînd în ajutor intuiția corespunzătoare pentru unul din ele, de exemplu cele 5 degete ale noastre" și conchide că „judecățile aritmetice sînt, așadar, întotdeauna sintetice, și cu atît mai mult cînd avem de-a face cu numere mari"[31]. Dar desigur că este o absurditate să susținem că putem stabili adevărul egalității

$$135.664 + 37.863 = 173.527$$

chemînd în ajutor o intuiție a 173.527 degete. Trebuie atunci să spunem că doctrina lui Kant se aplică la numere mici, în pofida propriei sale declarații explicite? Dar nu există nici o deosebire fundamentală între numerele mici și cele mari. Dacă formulele care cuprind numere de la 10 încolo, să spunem, se pot demonstra fără intuiție, de ce nu s-ar putea aceasta și pentru numere mai mici?[32] Și iarăși, ce să fie această presupusă intuiție corespunzătoare unui număr? Aritmetica nu se referă la degete așa cum s-ar putea spune despre geometrie că ea se referă la puncte, linii și plane; nici o intuiție nu poate garanta aplicabilitatea adevărurilor aritmetice la toate lucrurile care se pot număra. Mai mult, dacă orice adevăr al aritmeticii ar fi derivat doar prin intuiție, atunci toate aceste adevăruri ar trebui să fie independente unele de altele și de legile logicii, exact așa cum am aflat că este cazul cu axiomele lui Euclid. Dar dacă încercăm să negăm vreuna dintre propozițiile fundamentale ale științei numerelor, rezultatul nu va fi un alt sistem de aritmetică, ci o confuzie completă[33].

Din aceste considerente, Frege trage concluzia că bazele aritmeticii trebuie să se afle undeva mult mai adînc decît bazele științelor empirice, mai adînc chiar decît cele ale geometriei, așa cum o concepe el. Domeniul numărabilului este cel mai întins dintre toate, întrucît el nu se limitează la ceea ce poate fi intuit și nici măcar la ceea ce există, ci cuprinde tot ce poate fi gîndit. Oare în acest caz nu este rezonabil să presupunem că legile numărului sînt intim legate de legile gîndirii? Atunci cînd Frege pune această întrebare, desigur că el nu vrea să spună că aritmetica ar fi o ramură a psihologiei. Într-adevăr, el repetă mereu că logica, și odată cu ea aritmetica,

[30] *Gl.*, § 12.
[31] *Prolegomene la orice metafizică viitoare*, § 2.
[32] *Gl.*, § 5.
[33] *Gl.*, § 14.

pe care vrea s-o înfăţişeze ca o dezvoltare a logicii, este complet independentă de psihologie. În prefaţa sa la *Grundlagen*, de exemplu, el stabileşte ca prim principiu călăuzitor al operei sale că logicul trebuie întotdeauna separat de psihologic. Iar în prefaţa la *Grundgesetze* el atacă explicit toate încercările de a înfăţişa legile gîndirii ca generalizări psihologice, spunînd că speră ca lucrarea sa să ajute la eliberarea logicii de infecţia care pare să fi contaminat toate lucrările recente în acest domeniu. Ceea ce vrea să exprime prin întrebarea de mai sus, el spune şi în altă parte zicînd că legile aritmeticii nu sînt legi ale naturii, ci legi ale legilor naturii, adică principii fundamentale cu privire la ceea ce poate fi gîndit[34].

Aşadar, teza lui Frege constă în aceea că adevărurile aritmeticii sînt analitice, întrucît pentru demonstrarea lor nu avem nevoie decît de legile logicii şi de definiţii. Dar pe vremea lui se găseau mulţi matematicieni gata să accepte această teză şi totuşi să susţină o teorie a aritmeticii pe care Frege a respins-o. Punctul de discordie era natura definiţiei în matematică, iar Frege a considerat problema în mod evident de cea mai mare importanţă; în adevăr, spaţiul pe care îl acordă acestei chestiuni atît în *Grundlagen* cît şi în *Grundgesetze* este mai mare decît cel acordat criticii altor teorii ale matematicii.

Atunci cînd matematicienii din secolul al XIX-lea priveau progresul realizat de ştiinţa lor de la Renaştere încoace, ei aveau uneori impresia că noul ar fi mai curînd un produs al construcţiei umane şi nu o descoperire. După cum arată şi numele lor, numerele imaginare au fost considerate ca o invenţie încă din vechime, dar acum unii matematicieni considerau că toate numerele care sînt de alt tip decît cele naturale (ba chiar şi numerele naturale) pot fi privite în acelaşi fel. Această viziune ţinea de orientarea pozitivistă, adică antimetafizică a epocii. În lucrarea sa din 1867, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Hankel scria:

„În prezent, numărul nu mai este un lucru, o substanţă care există după propriile sale legi, independent de subiectul care le gîndeşte şi de obiectele care le generează, nu mai este un principiu autonom ca pe vremea pitagoreicilor. Problema dacă un număr există sau nu poate fi aşadar înţeleasă numai prin referire la subiectul care gîndeşte sau la obiectele despre care se gîndeşte şi ale căror relaţii le reprezintă numerele. Ca imposibil în sens strict, matematicianul consideră numai ceea ce este logic imposibil, adică autocontradictoriu. Faptul că numere imposibile în acest sens nu pot fi admise nu pretinde demonstraţie. Dar dacă numerele de care ne ocupăm sînt logic posibile, dacă conceptul respectiv este clar şi pe deplin definit şi ca atare liber de contradicţie, atunci problema existenţei se poate reduce numai la aceea dacă există în domeniul actualului sau a ceea ce are realitate pentru intuiţie un substrat, dacă există obiecte în care se manifestă numerele, adică anumite relaţii intelectuale"[35].

[34] *Gl.*, § 87.

[35] Pp. 6—7, citate de Frege în *Gl.*, § 92.

Ceea ce vrea să spună acest pasaj nu este prea clar, dar sensul pare a fi că în matematica pură, spre deosebire de cea aplicată, problemele de existență nu-și găsesc locul, întrucît totul se reduce la construcții libere ale minții umane, supuse doar restricțiilor logicii.

Împotriva unei asemenea doctrine, Frege susține că este absurd să vorbim despre definiții creative:

„Am putea tot atît de bine să spunem următoarele: dintre numerele cunoscute pînă acum, nici unul nu satisface sistemul de ecuații

$$x + 1 = 2 \quad \text{și} \quad x + 2 = 1,$$

dar nimic nu ne poate opri să introducem un simbol care rezolvă problema. Răspunsul va fi că problema conține o contradicție. Firește că da, dacă cerem ca soluția să fie un număr real sau complex obișnuit; dar atunci n-avem decît să lărgim sistemul nostru de numere, să creăm numere care îndeplinesc aceste cerințe noi! Să mai vedem apoi cum ne mai dovedește cineva vreo contradicție! Cine ar putea spune că cutare sau cutare lucru nu este posibil cu numerele noastre noi?... Să creăm și alte numere care să permită însumarea seriilor divergente? Nu! Matematicianul nu poate crea lucruri după voie într-o mai mare măsură decît geograful; el nu poate decît să descopere ceea ce există și să-i dea un nume"[36].

Sursa iluziei trebuie căutată în istoria matematicii. De îndată ce au fost familiarizați cu operația de scădere a lui 2 din 3, matematicienii au început să vorbească despre operația de scădere a lui 3 din 2 și au introdus simbolul „-1" pentru rezultatul acestei operații. Iar mai tîrziu, cînd s-au familiarizat cu noțiunea de rădăcină pătrată a unui număr real pozitiv, ei au început să vorbească despre rădăcina pătrată a unui număr negativ și au introdus simbolul „i" ca o abreviere pentru „$\sqrt{-1}$". În ambele cazuri se părea că domeniul de acțiune al matematicii a fost extins prin postularea a ceva neexistent anterior și apărea tentația de a spune că s-au creat numere noi printr-o rearanjare a unor semne vechi. Dar acest fel de a vorbi cuprinde o eroare serioasă în ce privește definiția. Cel ce își închipuie că a explicat pe deplin utilizarea semnului „i" scriind „$i = \sqrt{-1}$", trebuie să presupună dată semnificația semnului „$\sqrt{\ }$"; or, în explicația inițială a utilizării acestui semn nu avem nimic care să justifice utilizarea sa în noul context. Dacă însă spunem că definiția creativă a numerelor imaginare cuprinde totodată și o extindere a definiției radicalului, reducem totul la o confuzie. Într-adevăr, această doctrină a definiției bucată cu bucată a semnelor matematice implică faptul că semnul rădăcinii pătrate nu era anterior pe deplin definit. Or, „atîta timp cît nu era complet definit sau nu se cunoștea pe altă cale ce anume desemnează un cuvînt, cuvîntul nu putea fi utilizat într-o

[36] *Gl.*, § 96.

ştiinţă exactă — cu atît mai puţin în vederea dezvoltării ulterioare a propriei sale definiţii"[37].

Este uşor de înţeles de ce matematicienii au menţinut asemenea simboluri ca „+" şi „—" în cursul întregii dezvoltări a matematicii, deşi le-au dat sensuri diferite în diferitele etape ale evoluţiei matematicii. Fiecare calcul inferior este într-un anumit sens reprodus în calculul superior corespunzător. Dar această practică a produs unele confuzii, iar în *Grundgesetze* Frege susţine că am face bine să o evităm cel puţin în cercetările cu obiectiv filosofic.

„În loc de a defini la început un simbol pentru un domeniu restrîns şi a-l folosi apoi în vederea propriei sale definiri pentru un domeniu mai extins, trebuie doar să alegem semne diferite astfel încît semnificaţia primului să fie limitată odată pentru totdeauna la domeniul mai restrîns; în acest fel, prima definiţie este acum completă, iar linia de hotar este net demarcată. Aceasta nu prejudiciază în nici un fel relaţia dintre semnificaţia primului semn şi semnificaţia celuilalt; putem să cercetăm această relaţie, fără ca rezultatul investigaţiei să facă posibilă punerea sub semnul întrebării a justificării definiţiilor. De fapt, merită să inventăm un simbol nou dacă putem astfel să evităm nu puţine dificultăţi logice şi să asigurăm rigoarea demonstraţiilor. Însă mulţi matematicieni se pare că au un simţ atît de redus pentru puritatea şi acurateţa logică, încît preferă să utilizeze un cuvînt pentru trei sau patru lucruri diferite, decît să ia decizia de a inventa un cuvînt nou"[38].

Apoi, cei care vorbesc de definiţii creative dezvăluie confuzia gîndirii lor cînd spun că trebuie să avem grijă de a evita autocontradicţia atunci cînd introducem termeni noi. Desigur că ei au intenţii bune atunci cînd doresc să evite inconsistenţa, dar cum îşi propun ei să demonstreze consistenţa noilor construcţii? „Desigur că, riguros vorbind, nu putem stabili că un concept este liber de contradicţie decît producînd ceva care ţine de el. Reciproca ar fi o eroare"[39]. Iar dacă sîntem în situaţia de a indica ceva care ţine de acest concept, atunci este evident absurd să spunem că definiţia noastră a conceptului respectiv ar fi o creaţie. În practică însă, matematicienii care fac uz de asemenea limbaj vorbesc de consistenţă numai pentru că pînă acum nu s-a stabilit o inconsistenţă, şi abia apoi trec la ipoteza următoare: existenţa unor exemple. Este adevărat că uneori ei încearcă să justifice raţionamentele lor dubioase spunînd că în matematică „existenţa" înseamnă exact acelaşi lucru ca şi „consistenţa"; dar dacă Frege are dreptate, atunci acest fel de a vorbi este o agravare a culpei lor, deoarece el presupune că niciodată consistenţa nu se poate demonstra.

Conform cu punctul de vedere al lui Frege, fiecare calcul numeric operează cu o anumită mulţime de obiecte, desigur nu cu obiecte

[37] *Gg*, II, § 57.
[38] *Gg.*, II, § 60.
[39] *Gl.*, § 95.

fizice cum ar fi pietrele sau cu obiecte psihice cum ar fi sentimentele, dar totuși cu obiecte independente de orice limbaj. Atunci cînd vorbește despre definiția unui concept în matematică, Frege nu are în vedere ceva asemănător cu activitatea constructivă presupusă de către oponenții săi, ci doar delimitarea domeniului de aplicație a unui termen general cu ajutorul unei echivalențe. Astfel, numerele complexe se pot defini ca perechi ordonate de numere reale, iar operațiile cu numere complexe se pot defini prin referire la operațiile cu numerele reale care intră în perechile respective. Faptul că facem uz de anumite sunete sau forme ca termeni definiți este cu totul arbitrar. Dar în ce privește adevărurile pe care le enunțăm cu ajutorul lor, după ce le-am definit, nu mai încape arbitrar. În principiu, într-adevăr, este posibil să eliminăm toți termenii pe care i-am definit explicit. În practica gîndirii matematice avem nevoie de ei numai pentru că fără ei ne-ar fi greu să ne concentrăm atenția. Ei sînt, ca să spunem așa, instrumente de selecție. Pe de altă parte, în filosofia matematicii ne interesăm în mod special de definiții tocmai pentru că stabilirea unui lanț satisfăcător de definiții arată posibilitatea eliminării tuturor termenilor definiți. Ceea ce dintr-un punct de vedere se prezintă ca posibilitate de abreviere apare din alt punct de vedere ca o elucidare. În continuare, conform punctului de vedere al lui Frege, atunci cînd s-a stabilit un lanț satisfăcător de definiții devine clar că singurele noțiuni nedefinite necesare pentru prezentarea aritmeticii sînt noțiunile logicii formale. În particular, el vrea să arate că discursul asupra numerelor naturale se poate înlocui cu discursul asupra mulțimilor, claselor și varietăților care, în terminologia logicienilor, sînt domenii de extindere pentru concepte; el spune în mod explicit că obiectele aritmeticii sînt obiecte logice[40].

Dacă admitem că simbolurile matematice au semnificație și că formulele matematice sînt utilizate pentru realizarea unor enunțuri, nu ne putem opune atacului lui Frege împotriva teoriei definițiilor creative, deși încercarea sa de a reduce matematica la logică mai poate fi pusă sub semnul întrebării. Însă teza că noul în matematică este mai curînd creație decît descoperire a fost adesea însoțită de respingerea punctului de vedere că matematicienii ca atare emit enunțuri asupra unor obiecte oarecare; tocmai de aceea, Frege acordă mult spațiu demonstrării faptului că matematica nu poate fi considerată ca un joc cu semne lipsite de înțeles. Firește, nimeni n-a negat vreodată că aplicarea aritmeticii implică atribuirea de semnificații simbolurilor aritmeticii, dar matematicienii care își zic formaliști au încercat să susțină că în matematica pură nu e nevoie să trecem

[40] *Gg.*, II, § 147.

dincolo de simboluri şi de regulile combinării lor, adică dincolo de materialul asupra căruia avem un control complet. La începutul lucrării sale *Elementare Theorie der analytischen Functionen eines complexen Veränderlichen,* publicată în 1898, J. Thomae exprima precum urmează acest punct de vedere:

„Concepţia formală asupra numerelor acceptă limitări mai modeste decît cele propuse de concepţia logică. Ea nu-şi pune întrebarea ce sînt numerele şi încotro duc ele, ci numai ce li se cere în aritmetică. Pentru concepţia formală, aritmetica este un joc cu semne care se numesc vide. Aceasta înseamnă că ele nu au alt conţinut (în jocul de calcul) decît acela care le este atribuit prin comportarea lor faţă de anumite reguli de combinare (regulile jocului). Jucătorul de şah face uz de piesele sale în mod similar; el le atribuie anumite proprietăţi care determină comportarea lor în cadrul jocului, iar piesele nu sînt decît semne exterioare ale acestei comportări. Desigur că între aritmetică şi şah deosebirea e importantă. Regulile şahului sînt arbitrare, pe cînd sistemul de reguli pentru aritmetică este astfel încît cu ajutorul unor axiome simple numerele se pot referi la varietăţi supuse percepţiei şi deci pot aduce o contribuţie importantă la cunoaşterea de către noi a naturii... Punctul de vedere formal depăşeşte astfel toate dificultăţile metafizicii; acesta este avantajul pe care ni-l oferă"[41].

În volumul al doilea din *Grundgesetze,* publicat în 1903, Frege argumentează pe larg împotriva acestui nou adversar, susţinînd că este imposibil să prezentăm aritmetica pe care o cunoaştem fără a presupune semnificaţii pentru semnele ei [42].

În primul rînd, el subliniază că formulele care sînt doar combinaţii ale unor semne lipsite de semnificaţie nu pot avea propriu-zis vreo aplicaţie. Ar fi un nonsens să vorbim despre aplicaţia şahului, dacă nu am presupus *de la bun început* o funcţie reprezentativă pentru piesele sale şi mutările lor, de exemplu luînd decizia că mutarea unui pion ar însemna înaintarea unei patrule de cercetare în cursul unei bătălii armate. Or, dacă, după cum par să admită şi formaliştii, tocmai posibilitatea de aplicaţie deosebeşte gîndirea matematică de jocul de şah şi ne dă dreptul să o denumim progres în cunoaştere, cînd anume trebuie să intervină atribuirea de semnificaţii? Se presupune că în matematica aplicată şi că o asemenea atribuire nu şi-ar găsi locul în matematica pură. Frege nu neagă că ar fi posibil să executăm toţi paşii necesari pentru derivarea unei formule din sistemul său deductiv făcînd abstracţie de semnificaţiile semnelor; dar el spune că, departe de a aduce o simplificare importantă, un asemenea refuz de interpretare a semnelor ar face ca problema să fie şi mai dificilă. Întrucît interesul formulelor matematice rezidă în posibilitatea de a le aplica, trebuie să fim sinceri cu noi înşine şi să admitem că regulile noastre de calcul nu sînt alese în mod arbitrar, ci depind de semnificaţia pe care am atribuit-o simbolurilor noastre.

---

[41] *Gg.*, II, §§ 88–89.
[42] *Gg.*, II, §§ 86–137.

Un joc proiectat pentru a opera pe hîrtie cu semne lipsite de semnificație, după niște reguli arbitrare, desigur că nu ar fi denumit ramură a matematicii.

În al doilea rînd, Frege atrage atenția asupra faptului că, în anumite momente critice, formaliștii utilizează fără să-și dea seama semnificații ale unor semne presupuse de ei ca lipsite de semnificație. Exemplul cel mai interesant al unei asemenea autoiluzionări în lucrarea lui Thomae este un alineat în care el spune că regulile jocului său de calcul sînt cuprinse într-o mulțime de șapte formule, cum ar fi „$a + b = b + a$" și „$a + (b + c) = (a + b) + c$". Or, din felul în care procedează el ulterior rezultă că aceste formule trebuie să fie luate și ca dispoziții inițiale în jocul său de calcul, adică ceva asemănător cu așezarea pieselor pe tabla de șah la începutul unei partide. Dar cum poate fi dată o regulă printr-o așezare a unor semne lipsite de semnificație? Ar fi o pseudosoluție dacă cineva ne-ar indica așezarea pieselor pe tabla de șah și ar spune că aceasta reprezintă o regulă a jocului. Evident, Thomae vrea să spună că orice combinație de semne care apare într-o parte a semnului de identitate în vreuna din formulele sale se poate substitui în locul combinației de semne care apare în cealaltă parte a aceluiași semn de identitate, sau, mai curînd, dar mai complicat, că orice combinație de semne care intervine de o parte a semnului identității dintr-o formulă, combinație care este structural, deși poate nu alfabetic, similară cu vreuna din cele șapte formule ale sale, se poate substitui pentru combinația care apare de cealaltă parte a aceluiași semn de identitate. Pe scurt, semnul identității, așa cum îl utilizează el aici, exprimă echivalența unor lucruri pentru țelurile jocului său, iar literele sînt variabile care exprimă generalitatea. Pentru o bună înțelegere a situației trebuie să facem distincția dintre joc și teoria jocului[1]. În timp ce jocul poate să fie doar o manipulare cu semne lipsite de semnificație, teoria jocului, care lucrează cu regulile și consecințele lor, nu poate fi formulată fără semne cu semnificație. În realitate, este vorba de o aritmetică în sensul obișnuit, și Thomae însuși pare să admită acest lucru într-un pasaj curios unde spune că uneori numerele sale „au mai mult decît o simplă referire formală chiar în cadrul aritmeticii pure, de exemplu în propoziția ≪această ecuație este de grad trei≫". Or, toate *teoremele* lui Thomae și demonstrațiile lor trebuie să aparțină teoriei jocului său de calcul, nicidecum jocului însuși. Atunci cum poate să creadă el că a scăpat de restricțiile aritmeticii intuitive obișnuite?

În al treilea rînd, Frege arată, prin numeroase exemple, că formaliștii confundă mereu numărul cu numeralul. Unii dintre ei identifică în mod explicit numerele cu semnele sensibile, în timp ce ceilalți

fac, după toate aparențele, același lucru, fără a se angaja însă printr-o declarație clară. În textele matematice găsim adesea autori care scriu ca și cum nu ar exista nici o diferență între „*s* este cea mai mică rădăcină a ecuației" și „*s* desemnează cea mai mică rădăcină a ecuației". O asemenea omitere a distincției dintre *uzul* unui simbol și *menționarea* sa poate fi destul de inofensivă în numeroase contexte, dar într-o discuție asupra fundamentelor matematicii și în particular într-o expunere a doctrinei formalismului ea este extrem de periculoasă. Într-adevăr, ea îi încurajează pe formaliști să creadă că pot spune cu privire la numerale lucruri care au sens numai cu privire la numere. De exemplu, Thomae scrie uneori despre numere ca și cum ele ar fi niște semne pe hîrtie, iar alteori ca și cum ele ar forma un șir infinit, ordonat după mărime. În realitate, numerele formează, desigur, un șir infinit, fapt esențial pentru dezvoltarea aritmeticii, de exemplu pentru teoria iraționalelor; dar mulțimea numeralelor particulare scrise sau imprimate pe hîrtie este și va fi întotdeauna finită. Se mai poate adăuga că dacă un formalist ar încerca să-i răspundă lui Frege spunînd că el nu s-a gîndit la cceea ce Peirce numea „token numerals" (numerale individuale), ci mai curînd la ceea ce Peirce numea „type numerals" (clase de numerale) (de exemplu „2" în sensul în care „2" se poate scrie sau tipări de mai multe ori)[43], aceasta nu i-ar îmbunătăți situația. În măsura în care putem spune că în acest sens numeralele formează o infinitate, enunțul este garantat de faptul că avem în vedere infinitatea șirului de *numere* naturale. Fiind dată o clasă de numerale, putem concepe un succesor construit cu ajutorul sufixului „+1", dar numai întrucît pentru numerele teoretic posibile asemenea sufixe nu sînt limitate.

În al patrulea rînd, Frege arată că regulile stabilite de Thomae sînt cu totul inadecvate obiectivului său de reproducere a aritmeticii fără referire la semnificația semnelor. Se presupune că cele șapte formule menționate mai sus acoperă toate numeralele și că, interpretate în mod convenabil, ele sînt ireproșabile în calitate de reguli generale; ele nu ne relevă însă nimic în ce privește trăsăturile distinctive ale diverselor numerale. Este ca și cum autorul unui manual de șah ar da anumite reguli aplicabile tuturor pieselor, dar ar omite menționarea existenței pionilor, nebunilor și a restului. Este adevărat că Thomae remarcă unele particularități ale numărului 0, dar ceea ce spune el acolo sună foarte ciudat într-o expunere formalistă. După Thomae, trebuie să excludem combinațiile de semne de forma „2/0", deoarece împărțirea prin zero nu poate fi „realizată în mod unic (adică consistent)" iar „un cît al cărui numitor este

[43] C.S. Peirce, *Collected Papers*, IV, § 537.

0 nu are semnificație". Dacă manipulările de semne în care se permite ca „0" să apară la dreapta semnului împărțirii conduc la rezultate de felul „1 = 2", cu ce poate aceasta să-l supere pe un formalist? Și ce obiecție specifică se poate aduce combinației „2/0" într-un sistem în care toate combinațiile de semne sînt lipsite de semnificație? Pentru Thomae, unicul lucru convenabil este introducerea unei reguli noi, care interzice în mod expres așezarea semnului „0" după (sau sub) linioară. Dar nici aceasta nu este suficient. Dacă vrea ca trăsăturile exterioare ale sistemului său să semene cu cele ale aritmeticii obișnuite, el trebuie să excludă și combinații de felul „2/(3—3)" și „2/(2 + 1 — 3)"; pe scurt: orice combinație în care după bară apare o mulțime de semne ce se poate înlocui prin unicul semn „0". Evident, el nu poate să excludă pe fiecare în parte și nici nu poate da un criteriu de recunoaștere pentru mulțimile de semne care în sistemul său se pot înlocui prin „0".

Criticile au fost fatale pentru filosofia aritmeticii a lui Thomae, însă ulterior vom vedea că un program mai tare decît acesta se poate realiza pentru un anumit gen de formalism. Acum, conform planului nostru, trebuie să trecem la examinarea doctrinei propriu-zise a lui Frege.

4. *Definițiile lui Frege pentru numerele naturale*

Frege acceptă concepția lui Leibniz, Mill și a altora după care numerele naturale mai mari decît 1 trebuie definite în raport cu predecesorii lor, adică prin egalități ca „2 = 1 + 1", „3 = 2 + 1" etc. Dar el observă că aceste definiții rămîn incomplete atîta timp cît numărul 1 și noțiunea de creștere cu 1 sînt la rîndul lor nedefinite, și atrage atenția totodată asupra faptului că elaborarea completă a aritmeticii necesită propoziții generale[44]. Pentru aprofundarea problemei, el decide de aceea să cerceteze conceptul general de număr natural. Înșirarea tuturor confuziilor comise în această problemă, pe care Frege le găsește în operele predecesorilor săi, pînă și în operele unor matematicieni de prim rang, de la Euclid la Cantor, ar necesita un spațiu prea larg; dar Frege însuși a rezumat rezultatele retrospectivei istorice făcute de el în următorul pasaj:

„Numărul nu este abstras din lucruri în modul în care sînt abstrase culoarea, greutatea și soliditatea, după cum nu este nici o proprietate a lucrurilor în sensul în care acestea din urmă sînt proprietăți. Mai rămînea întrebarea: cu privire la ce anume enunțăm noi ceva, atunci cînd facem un enunț despre număr?... Numărul nu este ceva

[44] *Grundlagen*, § 18.

fizic, dar nu este nici ceva subiectiv, nu este o reprezentare. Numărul nu rezultă din alipirea unui lucru la un lucru ... Cuvîntul „unu" ca nume propriu al unui obiect de cercetare matematică nu admite plural. Ca atare, este absurd să facem ca numerele să rezulte din alăturarea unităților. Simbolul plus în 1 + 1 = 2 nu poate semnifica o atare alăturare"[45].

Răspunsul la chestiunea nerezolvată este arătat în secțiunea următoare, unde Frege spune că numerele sînt de fapt atribuite conceptelor și nu obiectelor:

„Aceasta este poate cel mai evident în cazul numărului 0. Dacă spunem: «Venus are 0 Luni», atunci pur și simplu nu există nici o Lună sau aglomerație de Luni pentru care ar putea fi ceva enunțat"; însă *conceptului* «Lună a lui Venus» i se atribuie o proprietate și anume aceea de a nu cuprinde nimic. Dacă se spune: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai", atunci se atribuie numărul patru conceptului «cal înhămat la trăsura împăratului»"[46].

Pentru înțelegerea acestei afirmații, trebuie să ne aducem aminte că în terminologia lui Frege un concept este ceva desemnat de un cuvînt sau de o expresie generală, utilizabilă în poziția de predicat al unui enunț, în timp ce un obiect este ceva ce poate fi denumit printr-un nume propriu și despre care putem spune că ar cădea sub un concept sau că ar avea ca proprietate un concept. Opoziția vizată nu este cea dintre mintal și material, dar nici cea dintre ideal și real, ci mai curînd cea dintre universal și individual; și totuși, ea nu corespunde exact ultimei dintre aceste antiteze tradiționale, deoarece cu greu s-ar putea spune că expresia „Lună a lui Venus" semnifică un universal.

S-ar părea că definiția după care numărul 0 revine unui concept dacă nici un obiect nu cade sub acest concept conține un cerc vicios. Într-adevăr, cuvîntul „nici unul" pare să fie numai o variantă a numărului „0". Dar putem preveni această obiecție spunînd: „Numărul 0 revine conceptului F dacă, pentru orice x, x nu cade sub F". Într-o formulare similară, putem spune de asemenea că numărul $n + 1$ revine conceptului F dacă avem un obiect x care cade sub F și astfel încît numărul n revine conceptului „cade sub F dar nu este identic cu x". Cu acest aparat, este evident posibil să explicăm în modul propus de Leibniz ce înseamnă a spune că 1, 2, 3 sau orice alt număr determinat revine unui concept. Dar Frege nu se mulțumește cu aceasta. E o iluzie — ne spune el — să ne închipuim că am fi definit numerele în acest mod. În realitate, nu am făcut decît să precizăm sensul unor expresii ca: „Numărul 0 revine lui

[45] *Ibid.*, § 45.

[46] *Gl.*, § 46. Cînd Frege scria „conceptul «Lună a lui Venus»", el voia probabil să se refere la conceptul exprimat de cuvintele „Lună a lui Venus"; într-adevăr, fără îndoială, el nu considera conceptul ca un ansamblu de cuvinte.

..." şi „Numărul 1 revine lui ...". Deocamdată însă nu avem nici un drept „să selectăm 0 şi 1 ca obiecte de sine stătătoare care pot fi recunoscute din nou". Dar — după Frege — aceasta este esenţial pentru aritmetică întrucît numeralele sînt întrebuinţate acolo ca substantive. Desigur, numeralele apar în vorbirea obişnuită în calitate de adjective. Dar „Iupiter are patru Luni" poate fi înlocuit prin „Numărul Lunilor lui Iupiter este patru", unde „patru" este un substantiv iar „este" are sensul unui semn al identităţii; totodată a doua expresie este structurată mai bine decît prima. Într-adevăr, deşi adjectivul „patru" concordă cu substantivul la plural „Luni" — cum ne spun gramaticienii — Lunile nu sînt de mai multe ori patru. În fapt, nu există vreo proprietate semnificată de cuvîntul „patru" despre care să putem spune că revine unui lucru, fie individ, fie o colecţie. Un număr nu este un concept, ci un obiect.

Frege are incontestabil dreptate să susţină că putem concepe obiecte care nu sînt nici sensibile, nici imaginabile. Are însă el dreptate cînd afirmă că numerele sînt obiecte în sensul lui special, adică nu sînt concepte? Trebuie să admitem că adjectivele numerice nu se comportă la fel ca expresiile atributive uzuale: deşi este corectă afirmaţia că Iupiter are patru Luni*, este absurd să spunem că fiecare dintre aceste Luni este patru, şi totodată este cel puţin bizar să spunem că mulţimea lor este patru. Mai mult, atunci cînd cuvîntul „patru" este folosit ca un substantiv, de exemplu în enunţul „Patru este un număr par", el pare să se comporte, aşa cum spune Frege, ca un nume propriu. Ar fi stupid să spunem că rădăcinile a două ecuaţii ar fi amîndouă patru, deşi putem vorbi despre patru la plural** acolo unde contextul arată că vorbim despre numerale ca deosebite de numere. Pe de altă parte, avem anumite substantive determinate care desemnează multitudini, de pildă „pereche" şi „duzină", care trebuie clasificate în rîndul substantivelor comune, deoarece pot fi folosite la plural; acestea pot să apară ca predicate pentru mulţimi. Fără îndoială, afirmaţia că grupa ucenicilor lui Isus era o duzină are sens. După cum se pare, este un accident lingvistic faptul că optăm pentru exprimarea propoziţiilor numerice în acest mod sau în altul din modurile menţionate mai sus. În latină, *mille* este un adjectiv, dar *milia* este substantiv, iar în engleză „hundred" rămîne un substantiv, deşi „a hundred and one" este un adjectiv compus. Atunci, de ce să nu identificăm numerele cu proprietăţile de a fi o

---

* De fapt, Iupiter are 12 sateliţi. Autorul se referă, probabil, la cei patru sateliţi mai cunoscuţi, descoperiţi în 1610 de către G. Galilei, ceea ce nu contravine corectitudinii demersului (Nota trad.).

** În limba engleză, "four" admite pluralul "fours" (Nota trad.).

pereche, o duzină etc.? sau, pentru a recurge la terminologia lui Frege, cu conceptele „pereche", „duzină" etc.? Se pare că atunci cînd vorbea despre *Mächtigkeiten*, Cantor avea în vedere această propunere care are marele merit al simplității. Orice om trebuie să admită că există mulțimi de diverse mărimi; conform definiției propuse, un număr ar fi tocmai însușirea comună a tuturor mulțimilor de aceeași mărime. Sau, dacă, împreună cu Frege, considerăm mai nimerită afirmația că numerele revin conceptelor, de ce să nu identificăm numerele cu concepte de nivelul doi, ca, de pildă, conceptul de a avea o pereche de cazuri ilustrative?

Motivul pentru care Frege respinge această concepție este inadecvat. Frege scrie:

„În propoziția «Numărul 0 revine conceptului F», 0 este numai o parte a predicatului, luînd conceptul F ca fiind subiectul real. Din acest motiv, am evitat să numesc un număr cum este 0 sau 1 sau 2 o *proprietate* a unui concept. Tocmai pentru că formează numai o parte în ceea ce este enunțat, numărul individual apare ca un obiect de sine stătător. Am atras deja atenția asupra faptului că noi vorbim despre „unul" acolo unde articolul hotărît servește pentru clasificarea lui 1 în rîndul obiectelor. În aritmetică, această existență independentă apare la fiecare pas, de exemplu în egalitatea $1 + 1 = 2$"[47].

Cînd spune că 0 este numai un element al predicatului, el pare să subînțeleagă că dacă 0 ar fi o proprietate a conceptului F, am putea spune „conceptul F este 0". Dar aceasta este greșit. Dacă 0 este într-adevăr un concept, atunci a spune că „0 revine conceptului F" este un mod cît se poate de adecvat de a spune că 0 este o proprietate a conceptului F. Într-adevăr, potrivit concepției sale „0" este tocmai o abreviere a expresiei „conceptul de a nu avea exemplificări", iar în unele contexte Frege își îngăduie să vorbească ca și cum ar recunoaște un atare concept. El spune, de exemplu:

„Prin proprietățile afirmate despre un concept nu înțeleg, desigur, caracteristicile care alcătuiesc conceptul. Acestea din urmă sînt proprietăți ale lucrurilor care cad sub concept, și nu ale conceptului. De exemplu, «dreptunghic» nu este o proprietate a conceptului «triunghi dreptunghic», dar propoziția că nu există nici un triunghi dreptunghic rectiliniu echilateral exprimă o proprietate a conceptului «triunghi dreptunghic rectiliniu echilateral»; ea îi atribuie numărul zero. În această privință, existența este analoagă cu numărul. O afirmație de existență nu este de fapt nimic altceva decît negarea numărului zero. Întrucît existența este o proprietate a conceptelor, argumentul ontologic pentru existența lui Dumnezeu eșuează"[48].

Întrucît existența despre care vorbește aici nu este, strict vorbind, existența unor concepte, ci existența unor obiecte care cad sub concepte, proprietatea conceptelor cu care identifică el existența trebuie să fie aceea de a avea una sau mai multe exemplificări. De aceea,

[47] *Grundlagen*, § 57.
[48] *Gl.*, § 53.

este probabil că refuzul lui Frege de a considera numerele drept concepte de nivelul doi a fost determinat în primul rînd de ideea că numerele au o subzistență de sine stătătoare, pe care conceptele nu o pot avea. Dacă este într-adevăr așa, Frege a fost indus în eroare de una din propriile sale doctrine despre concepte, pe care o vom examina mai tîrziu. Oricum însă, trebuie să mergem mai departe și să considerăm natura acelor obiecte cu care el încearcă să identifice numerele naturale.

În introducerea la *Grundlagen*, Frege a stabilit drept al doilea dintre cele trei principii călăuzitoare ale sale că semnificația unui cuvînt nu trebuie căutată niciodată la acel cuvînt luat în mod izolat, ci numai în contextul unui enunț cu sens. Urmînd acest principiu el încearcă acum să obțină o definiție a numerelor naturale în general, prin precizarea în prealabil a sensului unei identități numerice. Dacă numerele sînt obiecte de sine stătătoare, dar nu obiecte perceptibile, este, evident, de cea mai mare importanță să precizăm cum le putem recunoaște, adică, altfel spus, cum putem stabili identitățile între numere. Procedura propusă este similară cu cea a definirii direcției unei linii prin definirea în prealabil a identității de direcție sau a paralelismului și a abstragerii după aceea a noțiunii de direcție. După cum se pare obiectivul principal al lui Frege este să explice sensul expresiei „numărul care revine conceptului F"; el propune să explicăm sensul expresiei de mai sus prin intermediul ideii de corespondență biunivocă. Sugestia posibilității de definire a identității numerelor în acest mod datează cel puțin de la Hume[49], dar cînd Frege își elabora cartea, această propunere devenise de puțin timp încoace la modă printre matematicieni, așa cum remarca el însuși[50]. În particular, Cantor a utilizat-o în *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* din 1883, și Frege, așa cum am văzut, admira opera lui Cantor, deși uneori găsea prilejul să-l acuze, pe el ca și pe alți matematicieni, că vorbește fără acoperire despre „construcții ideale".

Or, se poate spune că obiectele care cad sub două concepte F și G sînt puse în corespondență prin relația Φ dacă (I) fiecare obiect care cade sub conceptul F este în relația Φ față de un obiect care cade sub conceptul G și (II) pentru fiecare obiect care cade sub conceptul G există un obiect care cade sub conceptul F și se află față de el în relația Φ. Totodată, putem înțelege că aceste condiții sînt satisfăcute în mod vid atunci cînd nici un obiect nu cade sub nici unul din aceste două concepte. Pentru efectuarea unei atari

[49] *Treatise*, 1, III, § 1.
[50] *Gl.*, § 63.

corespondenţe biunivoce *(beiderseits eindeutig)* mai trebuie să adăugăm alte două condiţii: (III) că, pentru orice *x*, *y* şi *z*, dacă *x* este în relaţia Φ faţă de *y* şi faţă de *z*, atunci *y* şi *z* coincid; şi (IV) că pentru orice *x*, *y* şi *z*, dacă *x* şi *y* sînt amîndoi în relaţia Φ faţă de *z*, atunci *x* şi *y* coincid. Trebuie notat că toate cele patru condiţii sînt exprimate în terminologia logicii formale (dacă acceptăm să includem „coincid" în această terminologie) şi că corespondenţa biunivocă poate fi explicată astfel fără să recurgem la cuvîntul „unu".

Pe această bază, Frege construieşte edificiul a trei definiţii:

(1) „Conceptul F este echinumeric *(gleichzahlig)* cu conceptul G" înseamnă acelaşi lucru cu „Există o relaţie Φ care pune în corespondenţă biunivocă obiectele care cad sub conceptul F cu obiectele care cad sub conceptul G".

(2) Numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F".

(3) „*n* este un număr" înseamnă acelaşi lucru cu „Există un concept astfel încît *n* este numărul care revine acestuia"[51].

În (1) cuvîntul artifical „echinumeric" este menit, desigur, să sugereze identitatea numerelor care revin conceptelor la care se aplică acest cuvînt, dar sensul expresiei „număr ce revine conceptului" nu este stabilit pînă cînd nu ajungem la (2), iar în scopuri strict teoretice „echinumeric" trebuie luat ca o expresie unitară, avînd exact sensul pe care i-l conferă (1), adică: se numesc echinumerice acele concepte ale căror extensiuni sînt echivalente, potrivit terminologiei tehnice a teoriei mulţimilor. La fel, în (2) expresia „numărul care revine conceptului F" este destinată să sugereze accepţia obişnuită a cuvîntului „număr", dar aplicarea expresiei nu cuprinde un cerc vicios înainte ca să fie definit în (3) cuvîntul „număr". Într-adevăr, în teorie strictă, (2) este doar explicarea întrebuinţării întregii expresii „numărul ce revine conceptului F" şi abia cînd căpătăm (3), obţinem o regulă pentru a vorbi despre un număr, fără a menţiona cutare sau cutare concept căruia acesta îi revine.

Acest sistem de definiţii este o performanţă remarcabilă sub raportul ingeniozităţii filosofice, şi este uşor de văzut de ce Frege considera că a făcut cel puţin plauzibilă reductibilitatea aritmeticii la logică. Trebuie însă să ne întrebăm dacă definiţiile oferă o analiză satisfăcătoare a numerelor naturale, iar în acest scop trebuie să considerăm rînd pe rînd fiecare definiţie în parte.

Dacă primul pas al lui Frege ar fi fost să stipuleze doar că expresia „echinumeric" este utilizabilă ca un substitut al unei expresii mai

[51] *Gl.*, § 72.

lungi privitor la corespondența biunivocă, nu s-ar putea ridica, desigur, nici o obiecție. Dar explicația preliminară pe care o dă arată clar că Frege consideră definiția sa ca o analiză corectă a sensului pe care l-ar atribui orice om acestui adjectiv compus, dacă l-ar întîlni fără o stipulare specială. Tocmai aceasta vrea să spună declarația lui Frege că el intenționează să obțină conceptul de număr pe baza descoperirii prealabile a sensului unei identități numerice. Or, considerată ca o elucidare a accepției obișnuite, definiția (1) implică o dificultate. Într-adevăr, dacă este evident că două concepte oarecare ale căror cazuri exemplificatoare sînt puse în corespondență în modul descris mai sus trebuie să fie echinumerice — în sensul că fiecare concept are tot atît de multe cazuri exemplificatoare ca și celălalt —, nu tot atît de evident este și faptul că între cazurile conceptelor echinumerice în sensul amintit trebuie să existe o atare corespondență.

Să considerăm un exemplu dat de Frege. El afirmă în mod corect:

„Dacă un chelner vrea să fie sigur că a pus la masă tot atît de multe cuțite pe cît farfurii, el nu are nevoie să numere farfuriile sau cuțitele; el nu are de făcut nimic altceva decît să pună un cuțit la dreapta fiecărei farfurii, avînd grijă ca fiecare cuțit de pe masă să fie imediat în dreapta unei farfurii"[52].

Dar raționamentul său nu demonstrează decît că corespondența biunivocă este o condiție suficientă a identității numerice, dar nu și o condiție necesară. Poate că s-ar putea merge mai departe decît Frege în expunerea exemplului său, afirmînd că nu se poate *demonstra* că două concepte sînt echinumerice atîta timp cît nu există o corespondență biunivocă între cazurile lor. În adevăr, dacă numărăm obiectele care cad sub fiecare concept, stabilim o atare corespondență prin atribuirile de numere ordinale pe care le facem; iar cînd într-un caz special sîntem în măsură să recunoaștem o identitate numerică fără să numărăm, întrucît membrii unei mulțimi de lucruri sînt aranjați în aceeași formă ca și membrii celeilalte, ca semnele de pe cărțile de joc de aceeași valoare, considerentul care prezintă importanță aici este că fiecare membru ale unei mulțimi este pus în relație cu un membru și numai unul din cealaltă mulțime prin relația de similaritate a poziției în cadrul formei considerate. Dar chiar și așa, nu este absurdă ideea că numărul cuțitelor de pe o masă ar putea fi același cu numărul farfuriilor, deși cuțitele nu au fost puse în corespondență biunivocă cu farfuriile, prin procedeul chelnerului sau prin vreo altă metodă, de pildă prin trasarea unor linii. Conform doctrinei lui Frege, faptul — dacă este un fapt — că numărul cuțitelor coincide cu numărul farfuriilor reclamă existența *unei anumite relații* prin care cuțitele să fie puse în corespondență biunivocă cu farfuriile; și totuși, s-ar părea că cores-

[52] *Gl.*, § 70.

pondența de tip special pe care am ales-o spre menționare ar putea lipsi fără vreo modificare a numerelor.

Dacă numărul cuțitelor este același cu al farfuriilor, este *posibil*, în mod corect, ca farfuriile să fie în corespondență biunivocă cu cuțitele, în timp ce între obiectele care cad sub concepte ce nu sînt echinumerice o asemenea corespondență nu poate exista. Fără îndoială, unul din motivele care a făcut ca dificultatea suscitată de definiția lui Frege să fie trecută cu vederea de mulți matematicieni este tocmai acesta. Într-adevăr, noțiunea de corespondență biunivocă s-a bucurat pentru prima dată de o atenție serioasă în legătură cu teoria cantoriană a numerelor transfinite, și unicele mulțimi ce pot fi citate ca ilustrări plauzibile ale acelei teorii sînt împrumutate din matematica însăși, adică dintr-un domeniu unde de obicei nu facem distincție între posibilitate și fapt. Așa, de exemplu, nu are importanță dacă spunem că numerele raționale *pot fi* puse în corespondență biunivocă cu numerele naturale sau dacă spunem că ele *sînt* puse într-o asemenea corespondență printr-o relație funcțională. În afara matematicii pure, situația este cu totul alta; și totuși, dacă Frege are dreptate, simplul fapt că numărul cuțitelor de pe o masă este același cu numărul farfuriilor atrage după sine faptul că există o relație oarecare prin care cuțitele *sînt* puse în corespondență biunivocă cu farfuriile și vor fi întotdeauna puse într-o asemenea corespondență, orice s-ar întîmpla, cu singura condiție ca numărul lor să nu se schimbe. Cum poate fi explicat acest fapt?

Dacă, așa cum afirma Leibniz, indiscernabilele sînt identice, diversele obiecte care cad sub un concept trebuie să aibă atribute discernabile. Să presupunem că obiectele care cad sub conceptul F sînt discernabile pe baza atributelor F_1, F_2 și F_3, fiecare dintre acestea atrăgînd după sine F, și că obiectele care cad sub G sînt, de asemenea, discernabile, pe baza atributelor G_1, G_2 și G_3, fiecare dintre acestea atrăgînd după sine G. Mai departe, să convenim a spune că x este în relația R cu y dacă și numai dacă x și y satisfac condiția exprimată de formula complexă:

(x are F_1 și y are G_1) sau (x are F_2 și y are G_2)
sau (x are F_3 și y are G_3).

Atunci, obiectele care cad sub F sînt puse într-o corespondență biunivocă prin această relație cu obiectele care cad sub G. Cu alte cuvinte, potrivit explicației de mai sus, orice obiect care cade sub F este în relația R cu un obiect și numai unul care cade sub G, în timp ce pentru orice obiect care cade sub G există un obiect și numai unul care cade sub F și se află în relația R față de el. Pentru simplitate, am folosit aceiași indici numerici spre a indica atributele

distinctive de sub cele două concepte şi am cuplat atributele cu aceiaşi indici atunci cînd am alcătuit expresia lungă prin care definim R; dar această folosire a numeralelor nu este cîtuşi de puţin esenţială. Atributele distinctive de sub fiecare concept pot fi indicate în orice mod convenabil şi cuplate după plac cu atributele de sub celălalt concept, cu singura condiţie ca fiecare atribut distinctiv să apară în una şi numai una din conjuncţiile pe care le luăm în calitate de alternative. Pentru raţionament însă este esenţial ca singurele semne extralogice conţinute în definiţie să fie expresii pentru atributele distinctive ale obiectelor care cad sub cele două concepte F şi G. Dacă cineva obiectează că ceea ce am definit nu este ceea ce se numeşte de obicei relaţie, putem fi de acord cu această observaţie, dar trebuie să insistăm asupra faptului că aceasta este singura speţă de relaţii care se dovedeşte suficientă în toate circumstanţele pentru o corespondenţă biunivocă între obiectele care cad sub concepte echinumerice.

Eventual, s-ar putea crede că o relaţie coordonatoare adecvată este întotdeauna definibilă într-un mod mai simplu, fără să asumăm principiul leibnizian al identităţii indiscernabilelor, pe baza unei formule ca:

$(x = \text{A şi } y = \text{K})$ sau $(x = \text{B şi } y = \text{L})$ sau $(x = \text{C şi } y = \text{M})$,

unde „A", „B" şi „C" sînt presupuse a fi nume proprii ale obiectelor care cad sub F iar „K", „L" şi „M" nume proprii ale obiectelor care cad sub G. Dar această obiecţie conţine două erori. În primul rînd, scopul nostru nu este chiar definirea relaţiilor în vederea coordonării claselor ai căror membri au fost cumva denumiţi. Noi urmărim să indicăm genuri de relaţii care sînt suficiente pentru coordonarea claselor, chiar dacă membrii lor nu au fost denumiţi şi poate nu vor fi denumiţi niciodată. Fără principiul lui Leibniz nu putem avea nici o garanţie asupra existenţei unor atare relaţii. În al doilea rînd, chiar cînd toate obiectele ce cad sub un concept au nume proprii, este limpede că aceste obiecte trebuie să poată fi distinse într-un fel sau altul fără ajutorul acestor denumiri, deoarece în caz contrar ele nu puteau fi denumite. Aşa încît invocarea principiului lui Leibniz nu este superfluă nici măcar în acest caz special.

În stadiul (2) al construcţiei sale sistematice, Frege trece la definirea numărului care revine conceptului F şi spune că acesta este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F". Întrucît expresia „echinumeric cu conceptul F" este aplicabilă cu adevărat numai la concepte, extensiunea conceptului pe care îl exprimă trebuie să fie o mulţime de concepte. Aşa încît, după ce obiectase împotriva ideii că un număr ar fi un concept, Frege pare să fi asumat concep-

ţia că un număr este o mulţime de concepte. Dar aceasta nu este singura consecinţă curioasă a definiţiei sale. Într-adevăr, el vrea să spună că conceptul F are un număr care îi revine şi, potrivit definiţiei pe care am citat-o, aceasta echivalează cu afirmaţia că conceptul F are o mulţime de concepte care îi revin, şi anume mulţimea conceptelor ale căror cazuri sînt în corespondenţă biunivocă cu propriile lui cazuri. Este greu să găsim vreo accepţie a cuvîntului „a reveni" (*Zukommen*) care să motiveze această pretenţie. Am putea spune eventual că conceptul F aparţine ca membru mulţimii conceptelor echinumerice cu el, sau că conceptul „echinumeric cu conceptul F" revine, ca o proprietate, conceptului F, dar nu că mulţimea conceptelor echinumerice cu conceptul F revine conceptului F într-unul din aceste sensuri. Poate că Frege îşi dădea şi el seama că terminologia sa era bizară; într-adevăr, el remarcă într-o notă că, după părerea sa, expresia „extensiunea conceptului" ar putea fi înlocuită în cadrul definiţiei (2) cu cuvîntul „concept"[53]. Este însă evident că făcînd această concesie el nu intenţiona să retracteze afirmaţia sa anterioară după care numerele individuale ar fi obiecte, distincte de concepte; într-adevăr, Frege spune că este convins că ar putea explica această aparentă contradicţie, deşi această explicaţie l-ar îndepărta prea mult de subiect. Nu ştim cum ar fi procedat dacă şi-ar fi elaborat în alt mod teoria, dar o altă remarcă din acea notă ne arată la ce se gîndea atunci cînd a ales formularea dată în textul său.

În afară de aparenta contradicţie cu enunţurile sale anterioare, Frege consideră că mai există şi o altă dificultate, căreia trebuie să-i facem faţă printr-o elaborare alternativă a teoriei; este vorba de faptul „că conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă". Pentru a ne da seama ce urmăreşte această remarcă, trebuie să considerăm implicaţiile situaţiei cînd numărul ce revine conceptului F este acelaşi cu numărul ce revine conceptului G. Evident, cele două concepte sînt echinumerice şi, deci, orice este echinumeric cu unul dintre ele este echinumeric şi cu celălalt, adică extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este identică cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G". Dar aceasta nu înseamnă că conceptul „echinumeric cu conceptul F" este identic cu conceptul „echinumeric cu conceptul G". Dimpotrivă, este evident că cele două concepte sînt distincte. Dacă definim numărul ce revine conceptului F drept conceptul „echinumeric cu conceptul F", iar numărul ce revine conceptului G drept conceptul „echinumeric cu conceptul G", ajungem în situaţia paradoxală cînd unul şi acelaşi număr reprezintă două concepte distincte. Evident, pentru cel ce vrea să susţină o teorie

[53] *Gl.*, § 68.

ca cea a lui Frege, ieşirea cea mai uşoară din impas constă în definirea numărului ce revine conceptului F ca fiind *extensiunea* conceptului „echinumeric cu conceptul F". Frege admite că definiţia pare stranie la prima vedere, dar o apără argumentînd că extensiunea la care se referă prezintă şi proprietăţile şi relaţiile aşteptate pentru numărul care revine unui concept.

În stadiul (3) al construcţiei sale, Frege încearcă să explice cum putem vorbi despre numere în general fără să ne referim la vreun concept particular la care acestea aparţin, iar în acest scop el stipulează că „*n* este un număr" înseamnă acelaşi lucru ca „Există un concept astfel încît *n* este numărul care revine acestuia". Dacă putem accepta ceea ce precede definiţia, nu mai trebuie să căutăm nod în papură acestei definiţii; într-adevăr, este evident că în vederea practicării aritmeticii trebuie să fim în stare să vorbim despre numere fără vreo referire la anumite concepte, iar explicaţia problemei la Frege ne arată cum putem face aceasta păstrînd totuşi o legătură cu accepţia conform căreia spunem că numerele revin conceptelor. Dar definiţia de mai sus nu este în sine suficientă pentru fundarea aritmeticii, deoarece ea nu oferă decît o explicaţie a expresiei „*n* este un număr". Mai avem nevoie şi de definiţii ale numerelor individuale sau, mai bine spus, de o schemă generală care să îngăduie definirea unei infinităţi de numere şi care să ne permită astfel să demonstrăm toate teoremele aritmetice acceptate în mod uzual.

Or, în cadrul teoriei lui Frege, singurul mod de indicare a unui anumit număr constă în a vorbi despe el ca despre numărul ce revine unui anumit concept. Dar Frege vrea să expună aritmetica în calitate de dezvoltare a logicii, aşa că el nu poate introduce numerele individuale prin referire la concepte empirice, de exemplu spunînd că 5 este numărul ce revine conceptului „continent" iar 12 numărul ce revine conceptului „apostol". Mai mult, referirea la concepte empirice nu ar garanta existenţa unui şir infinit de numere cerut pentru dezvoltarea continuă a aritmeticii. De aceea, este esenţial ca Frege să permită definiţii ale numerelor individuale prin referire la concepte standard împrumutate din logica însăşi. Luînd 0 ca punct iniţial al şirului, el oferă următoarea schemă:

0 este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine"
1 „ „ „ „ „ „identic cu 0"
2 „ „ „ „ „ „identic cu 0 sau cu 1"
3 „ „ „ „ „ „identic cu 0 sau cu 1 sau cu 2"

. . . . . .

Aici, conceptul „neidentic cu sine" este presupus a proveni din logica pură; evident, sub acest concept nu poate cădea nici un obiect. Aşa că, prima definiţie pare să satisfacă toate cerinţele cuvenite. Dar dacă prima definiţie nu conţine concepte extralogice, atunci nu conţin asemenea concepte nici celelalte definiţii, iar planul după care sînt construite permite continuarea *ad libitum*. S-ar părea deci că Frege a reuşit să realizeze ceea ce urmărea: să arate modul în care aritmetica poate fi redusă la logică.

În primul volum din *Grundgesetze*, Frege utilizează acelaşi raţionament, făcînd referiri la pasajele corespunzătoare din *Grundlagen*. În conformitate însă cu strategia generală a acestei lucrări mai tîrzii, el îşi formulează definiţiile, oriunde e posibil, prin intermediul unor semne pentru clase şi nu al unor expresii funcţionale; şi deci el continuă să afirme în textul său german că numerele revin conceptelor, semnul care are sensul de „numărul lui" apărînd întotdeauna în simbolismul său în faţa unui semn de clasă[54]. Dacă acceptăm să vorbim despre clase, putem admite această versiune a teoriei ca o simplificare rezonabilă. Într-adevăr, conceptele care determină una şi aceeaşi clasă trebuie să fie, în mod evident, echinumerice potrivit modului de exprimare al lui Frege, iar numărul despre care Frege spune că aceste concepte îl au în comun poate fi caracterizat mai firesc ca revenind clasei determinate de aceste concepte. Acest mod de exprimare mai are meritul de a conecta definiţia fregeană a numărului cu teoria cantoriană a mulţimilor sau claselor. Într-adevăr, corespondenţa biunivocă despre care vorbeşte Frege este acea relaţie între mulţimi pe care Cantor o numeşte echivalenţă, iar în limbajul lui Cantor inovaţiile din opera lui Frege pot fi rezumate foarte simplu prin următoarele două enunţuri:

(I) Numărul cardinal al unei mulţimi este mulţimea tuturor mulţimilor echivalente cu ea.

(II) Pentru numerele naturale 0, 1, 2, 3 etc., considerate ca mulţimi de mulţimi echivalente, putem lua ca exemplare sau membri standard anumite mulţimi definite în mod pur logic, şi anume: pentru 0 — mulţimea lucrurilor neidentice cu sine, pentru 1 — mulţimea al cărui singur membru este numărul 0, pentru 2 — mulţimea ai cărei membri sînt numerele 0 şi 1, pentru 3 — mulţimea ai cărei membri sînt numerele 0, 1 şi 2 şi aşa mai departe.

Este curios însă că nici Frege şi nici Cantor nu au acceptat vreodată în mod explicit această analiză a numerelor. În *Grundlagen*, Frege spunea că *Anzahl* pe care l-a definit era acelaşi lucru cu *Mächtigkeit*

[54] Vezi, de exemplu, definiţia lui 0 în *Gg.*, I, § 41.

a mulțimilor din teoria lui Cantor[55], dar într-o recenzie la această lucrare pentru *Deutsche Litteraturzeitung*, Cantor a negat aceasta și a considerat că definiția lui Frege este defectuoasă[56]. Deși susținea că este de acord cu programul de întemeiere a matematicii exclusiv pe logică, el obiecta împotriva anumitor subtilități introduse de Frege și, în particular, împotriva caracterizării fregeene a numărului ca extensiune a unui concept deoarece, cum spunea el, conceptul ar putea fi „nedeterminat din punct de vedere cantitativ". Se pare că deosebirea se datora pur și simplu unor neînțelegeri în ce privește accepțiile tehnice. Cel puțin așa credeau Whitehead și Russell, care acceptau definiția de mai sus a numărului, deși, din motive care vor deveni clare într-un capitol ulterior, ei nu puteau accepta modul în care Frege garantează infinitatea șirului numerelor naturale.

5. *Șirul numerelor: Dedekind și Peano*

Pentru aducerea la îndeplinire a programului său de expunere a aritmeticii ca identică cu logica, Frege trebuia să definească mai întîi toate ideile aritmeticii într-un mod acceptabil, fără a recurge la o terminologie extralogică, și să arate apoi că cu aceste definiții toate raționamentele aritmetice sînt reductibile la scheme logice valide. În particular, el trebuia să demonstreze că pentru validitatea inducției matematice (sau recursive) — adică pentru validitatea raționamentului în care conchidem că, întrucît o proprietate revine numărului 0 și totodată succesorului oricărui număr care se bucură de această proprietate, aceasta trebuie să revină de aceea tuturor numerelor naturale — nu este necesară decît logica. Într-adevăr, cei care pretind că aritmetica nu este identică logicii se referă îndeosebi la inducție ca la particularitatea raționamentului aritmetic și spun că ea presupune o anumită intuiție a unei necesități extralogice. În *Grundlagen der Arithmetik*, Frege nu a încercat să trateze a doua parte a programului său în mod detaliat, considerînd, probabil, că această sarcină este prea dificilă pentru o lucrare larg accesibilă. Ceea ce spune în această privință pare de aceea destul de obscur și superficial. Dar Frege arată destul de clar că este conștient de necesitatea unei analize a inducției matematice, atunci cînd după ce citează din analiza șirurilor ordonate, analiză dată la sfîrșitul cărții sale *Begriffsschrift*, el scrie: „Numai prin intermediul acestei definiții a succesiunii în cadrul unui șir putem reduce raționamentul de la n la $(n + 1)$, care aparent

[55] *Gl.*, § 85.
[56] *Gesammelte Abhandlungen*, ed. Zermelo, p. 440.

este specific matematicii, la legile generale ale logicii."[57] În fapt, el a asigurat tot ce se cere în acest scop, deşi nu a indicat conexiunile dintre aceste aspecte astfel încît să faciliteze sarcina cititorului.

Mai întîi, Frege afirmă că „*n* urmează imediat după *m* în şirul numerelor naturale" înseamnă acelaşi lucru ca „există un concept F şi un obiect *x* care cade sub acesta, astfel încît numărul care revine conceptului F este *n*, iar numărul care revine conceptului «a cădea sub F dar a nu fi identic cu *x*» este *m*". Această definiţie este lesne de înţeles dacă luăm în considerare definiţiile numerelor individuale date către sfîrşitul ultimei secţiuni. Aşa cum spune Frege, nu este greu pentru cititori să vadă că relaţia astfel definită este biunivocă şi că orice număr, cu excepţia lui 0, este legat prin această relaţie de un anumit alt număr.[58] După aceea, Frege schiţează o demonstraţie pentru o propoziţie pe care nu o consideră atît de evidentă, şi anume propoziţia că pentru orice număr din şirul numerelor naturale există un număr imediat următor; şi tocmai cînd se angajează în această direcţie, el menţionează în treacăt posibilitatea reducerii inducţiei matematice la legile generale ale logicii.

În acel pasaj din *Begriffsschrift* la care se referă aici, Frege a explicat cum, fiind dată o relaţie Φ, am putea defini o altă relaţie, exprimabilă prin formula „*y* urmează în şirul Φ lui *x*"; de exemplu, fiind dată relaţia exprimată de „*y* este copilul lui *x*", am putea defini relaţia exprimată prin „*y* este un descendent al lui *x*". În viaţa cotidiană, noi am explica probabil semnificaţia cuvîntului „descendent" spunînd: „descendenţii unui om sînt copiii săi precum şi copiii copiilor săi, şi aşa mai departe". Dar Frege nu era satisfăcut cu aceasta, deoarece considera că în scopul reducerii aritmeticii la logică era necesar un mod de eliminare a expresiei „şi aşa mai departe". Drept care, el a sugerat de fapt că „*y* este un descendent al lui *x*" ar putea fi considerat ca însemnînd acelaşi lucru ca expresia „*y* are toate atributele care îi revin lui *x* şi care sînt transmise invariabil copiilor săi de către un părinte care are aceleaşi atribute". La prima vedere, această propunere ar putea fi întîmpinată cu anumite rezerve. Într-adevăr, înclinăm să spunem că, deşi un descendent al lui *x* trebuie să aibă incontestabil toate atributele ereditare din familia care porneşte de la *x*, nu este totuşi evident că orice persoană care se bucură de toate aceste atribute trebuie să fie un membru al familiei. La aceasta se poate însă răspunde că unul din atributele ereditare în cadrul familiei este tocmai apartenenţa la această familie, astfel încît orice persoană care

[57] *Grundlagen*, § 80.
[58] *Grundlagen*, §§ 76–78.

posedă *toate* atributele ereditare trebuie să se bucure şi de acesta din urmă.

Aplicînd metoda lui Frege la şirul numerelor, putem spune că „*y* urmează lui *x* în şirul numerelor naturale" trebuie să însemne acelaşi lucru ca „*y* are toate acele atribute care (I) revin lui *x* şi (II) sînt de aşa natură încît dacă ele revin unui anumit număr, ele revin totodată numărului imediat următor în cadrul şirului numerelor naturale". În fapt, Frege aplică tocmai această metodă în scopul special pe care îl urmăreşte în *Grundlagen*. Dar, pentru prezentarea raţionamentului prin inducţie matematică drept o mostră de raţionament logic, noi trebuie să facem un pas mai departe şi să spunem că „*n* este un număr natural" trebuie să însemne acelaşi lucru ca „*n* este identic cu 0 sau *n* are toate atributele care (I) revin lui 0 şi (II) sînt de aşa natură încît dacă ele revin unui obiect *m* ele revin totodată oricărui lucru care în şirul numerelor naturale urmează imediat după *m*". Pentru corectitudinea acestei definiţii este esenţial, desigur, ca acele cuvinte pe care le-am subliniat să poată fi înţelese ca un unic semn, conform explicaţiei citate mai sus la Frege. Dar dacă aceasta este garantat, restul este simplu. Într-adevăr, formularea uzuală a principiului inducţiei matematice poate fi privită acum ca o abreviere a truismului logic: „Dacă P este un atribut care (I) revine lui 0 şi (II) este astfel încît, dacă el revine unui obiect *m*, el revine şi la orice lucru care în şirul numerelor naturale urmează imediat după *m*, atunci P revine oricărui lucru care sau este identic cu 0 sau este înzestrat cu toate atributele care (I) revin lui 0 şi (II) sînt astfel încît dacă revin oricărui obiect *m*, ele revin şi oricărui lucru care în şirul numerelor naturale urmează imediat după *m*". Cu alte cuvinte, validitatea principiului inducţiei matematice este făcută să depindă de faptul că şirul numerelor naturale poate fi definit ca domeniul specific pentru inducţia matematică. Trebuie să observăm însă că această presupusă reducere a raţionamentului aritmetic la logică implică referirea la toate atributele sau proprietăţile numerelor. În cele ce urmează, vom avea ocazia să revenim la acest punct.

În broşura sa *Was sind und was sollen die Zahlen?* apărută în 1888, Dedekind a ajuns la concluzii oarecum similare, dezvoltînd în mod independent un punct de pornire diferit şi aplicînd o altă terminologie. Conform terminologiei sale, putem spune că un sistem (sau mulţime) de lucruri S are un alt sistem S' ca aplicaţie sau imagine (*Bild*) a sa dacă există o proiecţie sau o regulă de aplicare (*Abbildung*) φ care atribuie fiecărui element al lui S un lucru sau altul ca imagine a sa, iar S' este totalitatea acestor imagini ale elementelor lui S. Dacă proiecţia atribuie întotdeauna imagini diferite unor elemente diferite

din S, spunem că este asemenea (*ähnlich*). Evident, aici avem ceea ce alți matematicieni au numit corespondență biunivocă. Mai departe se spune că un sistem K este un lanț (*Kette*) relativ la o anumită proiecție dacă conține ca parte a sa (adică conține ca un subsistem) pe K', care este propria sa aplicație potrivit acestei proiecții, adică K' $\subset$ K, unde „$\subset$" semnifică includerea în ceva.[59] Dedekind a introdus această terminologie cam curioasă probabil din dorința de a atrage atenția asupra faptului că aplicația conținută într-un atare sistem trebuie să conțină, la rîndul ei, propria sa aplicație conform aceleiași proiecții. Într-adevăr, prima sa teoremă despre lanțuri este că aplicația unui lanț este la rîndul său un lanț. Altă teoremă a sa care poate fi demonstrată foarte ușor arată că orice lanț care conține un sistem A ca parte a sa trebuie să conțină și A'. Mai departe, dacă A este o parte a unui lanț S, intersecția sau cea mai mare parte comună (*Gemeinheit*) a tuturor lanțurilor — inclusiv S — care au drept parte pe A se numește lanțul lui A sau, prescurtat, A_0. De asemenea, se poate demonstra ușor că orice lanț care conține ca parte A trebuie să conțină și A_0. Dacă A are un singur element 1, Dedekind își îngăduie să numească lanțul său 1_0, deși dacă ar fi urmat propria sa definiție în mod strict el trebuia să scrie $\{1\}_0$. Dar, oricare ar fi A, trebuie să ținem minte că A' și A_0 sînt determinate amîndouă printr-o anumită proiecție. Cu acest aparat de termeni tehnici putem spune acum că un sistem N este *simplu infinit* dacă există pentru el o proiecție φ precum și un element de bază 1 care satisfac cele patru condiții:

α. $N' \subset N$.

β. $N = 1_0$.

γ. 1 nu este un element al lui N'.

δ. Proiecția φ este asemenea.

Și, în sfîrșit, dacă ne concentrăm atenția asupra structurii sistemului N, făcînd abstracție de natura specială a elementelor, în măsura în care ea nu este determinată de condițiile enumerate mai sus, putem spune că N este sistemul numerelor ordinale.[60]

După Dedekind, aritmetica este tocmai știința relațiilor sau legilor deductibile din condițiile menționate mai sus, și una dintre cele mai importante legi de acest fel este principiul inducției matematice, pentru care putem scrie: „Dacă 1 este un element al lui P și $(NP)' \subset P$, atunci $N \subset P$"; aceasta, deși Dedekind însuși nu folosește notația booleană a juxtapunerii literelor pentru intersecții. Pentru demons-

[59] Dedekind însuși utilizează o variantă a semnului „$<$" care arată ca un fel de numeral „3".

[60] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, § 6, 71—73.

trarea acestei teoreme, raționăm după cum urmează.[61] Întrucît 1 este element al lui N și, prin ipoteză, și al lui P, putem admite că sistemul NP nu este vid. Acum, este evident că

$$NP \subset N,$$

de unde rezultă în conformitate cu definiția aplicației că

$$(NP)' \subset' N'.$$

Dar știm că

$$N' \subset N$$

pe baza condiției α, încît avem

$$(NP)' \subset N.$$

Dar, conform părții a doua a ipotezei, avem și

$$(NP)' \subset P,$$

iar din aceste două relații luate împreună rezultă că

$$(NP)' \subset NP,$$

adică rezultă că NP este un lanț. Atunci, întrucît 1 este un element al acestui lanț iar l_0 este cea mai mare parte comună a tuturor lanțurilor în care 1 este un element, putem afirma

$$l_0 \subset NP.$$

Dar, conform condiției β

$$N = l_0,$$

și astfel putem conchide

$$N \subset NP,$$

care este echivalent cu

$$N \subset P.$$

Această demonstrație se bazează pe faptul că N, mulțimea numerelor asupra căreia vrem să generalizăm, a fost declarată lanț și, în particular, acel lanț care este cea mai mare parte comună a tuturor lanțurilor care au ca element pe 1. Ca și în raționamentul lui Frege, validitatea principiului inducției matematice este garantată aici printr-o definiție a numărului care cuprinde o referire la toate proprietățile ereditare în cadrul unui șir. A spune, într-adevăr, că N este cea mai mare parte comună a tuturor lanțurilor care au ca element pe 1, înseamnă a spune de fapt că N este conținut ca parte în orice lanț P care satisface ipotezele principiului inducției matematice, iar aceasta

[61] *Ibidem*, § 4, 59—60 și § 6, 80.

este o altă variantă a explicației date de Frege. Dedekind însuși a remarcat această corespondență cînd a luat cunoștință, pentru prima oară, de *Grundlagen* al lui Frege, cam după un an de la publicarea propriei sale cărți, și a atras atenția asupra acestei corespondențe în prefața la a doua ediție a cărții sale (1893). În prefața la ediția a treia (1911), Dedekind a spus că deși își menținea punctul său de vedere inițial, după care aritmetica, algebra și analiza sînt părți ale logicii, el trebuie să recunoască obiecțiilor ridicate între 1893 și 1903 o anumită forță. Aceasta înseamnă, probabil, că el făcea front comun cu Cantor și Frege, a căror operă fusese criticată pe acel timp.

Diferența fundamentală între opera lui Frege și cea a lui Dedekind este că primul, spre deosebire de al doilea, pune în conexiune numerele cu extensiunile conceptelor. Deși Dedekind pleca de la considerații generale despre sisteme sau mulțimi, el termina cu o teorie pur ordinală a numerelor. Frege era la fel de interesat de ordonarea obiectelor în șirul numerelor, dar considera că această ordonare nu poate fi explicată prin definiția pe care o dădea pentru „*n* în șirul numerelor naturale urmează imediat lui *m*". Nu este clar dacă Dedekind dorea să respingă acea parte a teoriei lui Frege care ieșea din cadrul propriei sale teorii, dar avem pasaje care sugerează că el nu considera potrivit ca teoria numerelor ordinale să se bazeze pe o teorie a numerelor cardinale. Atunci cînd declară pentru prima dată că elementele sistemului său pot fi numite numere, el scrie:

„Dacă în considerarea unui sistem simplu infinit N ordonat de o proiecție φ facem cu totul abstracție de natura specială a elementelor, reținînd numai caracterul lor distinct, și dacă concepem numai relațiile în care proiecția ordonatoare φ le pune între ele, atunci aceste elemente se numesc *numere naturale* sau *numere ordinale* sau pur și simplu *numere*, iar elementul de bază 1 se numește *numărul de bază* al *șirului numerelor*. Avînd în vedere această abstracție sau eliberînd elementele de orice alt conținut, putem caracteriza în mod corect numerele ca o creație liberă a cugetului uman. Relațiile sau legile deduse numai din condițiile α, β, γ, δ în 71, și care sînt de aceea întotdeauna aceleași în toate sistemele simplu infinite ordonate (Cf. 134), constituie obiectul imediat al *științei numărului* sau *aritmeticii*"[62].

În ultimul pasaj menționat aici, el demonstrează că toate sistemele simplu infinite pot fi aplicate unul în celălalt prin proiecții asemenea, iar apoi, referindu-se la pasajul citat mai sus, el continuă cu afirmația:

„Este clar în același timp ... că orice enunț despre numere, adică despre elementele *n* ale sistemului simplu infinit N care este ordonat prin proiecția φ, adică orice enunț în care natura specială a elementelor este trecută cu vederea și se menționează numai conceptele care provin din ordonarea φ, posedă o valabilitate absolut generală pentru orice alt sistem simplu infinit Ω ordonat de o proiecție θ și pentru elementele sale ν, și că trecerea de la N la Ω (care este totodată traducerea unui enunț aritmetic dintr-un limbaj într-altul) are loc prin intermediul proiecției ψ ... care transformă fiecare element

[62] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, § 6, 73.

n din N într-un element ν din Ω care este $\psi(n)$. Acest element ν poate fi numit al n-lea element din Ω, şi prin acelaşi semn numărul n este la rîndul său al n-lea element al şirului numerelor N."[63]

Aceste afirmaţii sugerează că Dedekind concepe aritmetica drept o ştiinţă al cărei obiect este definit implicit de cele patru condiţii α, β, γ, δ, luate ca axiome sau postulate, şi el nu este îngrijorat de posibilitatea unor interpretări diverse pentru semnele sale de bază, deoarece consideră că aceasta nu are nici o importanţă pentru matematică. Ce-i drept, el nu face uz de limbajul axiomaticii, dar în fapt el pare să afirme că este absurd să căutăm mai mult decît un sistem de axiome monomorf.[64]

În *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* din 1889, Peano a enunţat nouă axiome pentru aritmetică. Patru din acestea sînt adevăruri despre egalitate, dar celelalte cinci sînt următoarele postulate speciale:

(1) 1 este un număr.
(2) Succesorul oricărui număr este un număr.
(3) Două numere, oricare ar fi ele, nu au acelaşi succesor.
(4) 1 nu este succesorul niciunui număr.
(5) Orice proprietate care revine lui 1 precum şi succesorului oricărui număr care se bucură de această proprietate revine tuturor numerelor.

În versiunile de mai tîrziu ale acestei încercări de caracterizare a şirului numerelor, Peano porneşte, la fel ca Frege, de la numărul 0; dar concepţia sa generală despre număr rămîne în mod constant ordinală, ca şi concepţia lui Dedekind, iar între axiomele sale şi condiţiile formulate de Dedekind se constată o mare similitudine. Astfel, (2) corespunde lui α, (3) corespunde lui δ iar (4) lui γ, în timp ce (1) şi (5) împreună îndeplinesc oficiul lui β. Axiomele sînt independente între ele, aşa cum se poate vedea din considerarea modelelor care satisfac cîte patru axiome dar nu satisfac cele cinci axiome[65], şi se poate demonstra printr-o adaptare a raţionamentului lui Dedekind că ele formează o mulţime monomorfă.

Pe Peano îl interesa în primul rînd prezentarea clară a rezultatelor matematice, şi tocmai în acest scop, şi nu în vederea unei analize filosofice, el a şi compus *Notations de logique mathématique* din 1894.

---

[63] Ibid., § 10, 134.

[64] În legătură cu evoluţia concepţiei lui Dedekind, vezi Wang Hao, "The Axiomatisation of Arithmetic", *The Journal of Symbolic Logic*, XXII (1957), pp. 145—157. Articolul constituie cap. IV, „Axiomatizarea aritmeticii", din *Studii de logică matematică*, de Wang Hao (Editura ştiinţifică, 1972, p. 74—86).

[65] G. Peano, *Formulaire de mathématiques*, III, p. 44.

Între anii 1895—1908, el a elaborat cinci versiuni succesive ale unui *Formulaire de mathématiques*, folosind de fiecare dată cele cinci axiome (dar cu 0 în locul lui 1) ca fundament al aritmeticii, iar în ultima versiune, unde partea nesimbolică a fost scrisă într-un nou limbaj internațional, inventat de el însuși și numit *Latino sine flexione*, el a introdus axiomele însoțindu-le de remarca:

„Quaestio si nos pote defini N_0 significa si nos pote scribe aequalitate de forma N_0 = expressione composito per signos noto, $\cup$, $\cap$, $-$, ..., ι, quod non es facile. Ergo nos sume tres idea N_0, 0, + ut idea primitivo per que nos defini omni symbolo de Arithmetica. Nos determina valore de symbolo non definito per systema de propositio primitivo sequente"[66].

Primul grup de simboluri la care se referă în acest pasaj îl formează, desigur, semnele pur logice din lucrarea sa *Arithmetices Principia* și din lucrările ulterioare, în timp ce celelalte trei semnifică „număr", respectiv „zero" și „succesor". Este limpede, așadar, că la această dată Peano era încă receptiv față de proiectul lui Frege, dar considera că se poate merge mai departe fără să se aștepte rezolvarea chestiunii fundamentelor ultime.

Deși modul lor de exprimare era oarecum vag și extravagant, formaliștii secolului XIX au făcut o propunere interesantă cînd au afirmat că aritmetica trebuie prezentată ca un sistem axiomatizat în care noțiunile caracteristice ale aritmeticii primesc definiții implicite prin condițiile formale la care sînt supuse. Fără îndoială, formulările lui Thomae erau nesatisfăcătoare în amănunt, din motivele înfățișate de Frege, dar se creează impresia că Frege a triumfat prea ușor asupra adversarului său în această controversă; într-adevăr, pe cînd el își redacta obsevațiile, Peano îndeplinise deja programul lui Thomae într-un mod mult mai pregnant. Pe de o parte, sistemul de axiome al lui Peano nu este expus, ca cel al lui Thomae, la acuzația că nu garantează toate numerele naturale, întrucît îl putem introduce pe 1 ca succesorul lui 0, pe 2 ca succesorul lui 1, și așa mai departe. Pe de altă parte, axiomele lui Peano, împreună cu definițiile corespunzătoare pentru operațiile de adunare și înmulțire sînt suficiente pentru demonstrarea tuturor legilor generale ale numerelor pe care le-a formulat Thomae. Așa, de pildă, putem defini adunarea în mod recursiv prin următoarele două stipulări:

$$(I) \quad a + 0 = a,$$

$$(II) \quad a + n' = (a + n)',$$

---

[66] *Formulario Mathematico*, p. 27.

unde „n'" este o abreviere pentru „succesorul lui n", iar apoi putem demonstra legea de asociativitate pentru adunare după cum urmează. Demonstrăm mai întîi că

$$a + (b + 0) = (a + b) + 0.$$

Demonstrația este realizată prin aplicarea succesivă a stipulării (I) de mai sus; într-adevăr,

$$\begin{aligned} a + (b + 0) &= a + (b + 0) \\ &= a + b \\ &= (a + b) + 0. \end{aligned}$$

Demonstrăm apoi că dacă

$$a + (b + n) = (a + b) + n$$

trebuie să avem totodată

$$a + (b + n') = (a + b) + n'.$$

Demonstrăm aceasta aplicînd succesiv (II) și utilizînd ipoteza; într-adevăr,

$$\begin{aligned} a + (b + n') &= a + (b + n') \\ &= a + (b + n)' \\ &= [a + (b + n)]' \\ &= [a + b) + n]' \\ &= (a + b) + n'. \end{aligned}$$

În sfîrșit, aceste două rezultate, împreună cu a cincea axiomă a lui Peano, duc la concluzia că

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Se pune atunci întrebarea: de ce să nu ne mulțumim cu formularea aritmeticii la Peano și să nu spunem că ideile sale primitive sînt suficient definite prin axiomele în cadrul cărora ele sînt menționate?

Dacă această propunere este valabilă, matematicianul nu mai trebuie să se preocupe de chestiunea metafizică: „ce este un număr?" La îndemnul unui coleg filosof sau la îndemnul propriei sale conștiințe, el poate răspunde că privește axiomele matematice ca pe niște definiții implicite și că toate cerințele sale profesionale sînt înglobate în ansamblul lui Peano. Propunerea nu este totuși satisfăcătoare, deoarece nu garantează acea conexiune cu folosirea uzuală a numeralelor care este esențială pentru orice sistem formal demn de a se intitula aritmetică. Dacă semnele pentru „număr", „zero" și „succesor" au numai sensul reclamat de axiomele lui Peano, ele sînt de fapt variabile în care putem substitui orice expresii care transformă axiomele în enunțuri adevărate. Or, toate axiomele sînt verifi-

cate atunci cînd semnele „0" şi „număr" sînt luate în sensul lor uzual, iar „succesor" este înţeles în accepţia expresiei lui Frege „în şirul numerelor naturale a urma imediat după"; dar, aşa cum a remarcat Peano însuşi, toate axiomele pot fi verificate prin multe alte interpretări[67]. Astfel, condiţiile formale sînt satisfăcute cînd punem numeralul „1" pentru „0", „membru al şirului 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..." pentru „număr" şi „jumătate" pentru „succesor". Pe scurt, ansamblul de axiome al lui Peano, considerat ca o definiţie implicită, oferă numai caracteristicile logice comune ale tuturor progresiilor. În pofida tuturor considerentelor emise de Dedekind şi Peano în apărarea abordării lor, nu ne putem declara pe deplin satisfăcuţi cu o bază a aritmeticii care nu distinge şirul numerelor naturale de orice altă progresie. Pînă şi în cadrul matematicii pure avem prilejul să întrebuinţăm numeralele în sensul lor normal, ca, de exemplu, atunci cînd spunem: „Există *patru* numere prime mai mici ca 10".

Dealtfel, acesta nu este singurul motiv pentru a spune că axiomele lui Peano sînt inadecvate în ele înseşi ca fundament al aritmeticii. După cum am văzut, sistemul pe care-l formează este monomorf, dar pentru a-şi merita acest titlu se pare că este esenţial ca cea de-a cincea axiomă să conţină o generalizare asupra tuturor proprietăţilor. O asemenea generalizare echivalează de fapt cu asumarea noţiunii largi de proprietate sau mulţime, folosită de Cantor în cadrul propriei sale teorii a mulţimilor, şi de aceea trebuie privită cu suspiciune de cei ce privesc cu scepticism teoria lui Cantor. Mai mult, după toate aparenţele, ceea ce permite interpretarea axiomelor prin referire la alte progresii decît şirul numerelor naturale este caracterul larg al referirii sale la toate proprietăţile. Dacă vrem să evităm primejdiile unei generalizări excesiv de largi şi să ne fixăm atenţia asupra şirului numerelor ca distinct de orice alte progresii trebuie deci, după cum se pare, să încercăm să înlocuim axioma unică a lui Peano asupra inducţiei matematice printr-un şir de axiome inductive care operează, fiecare în parte, cu o anumită proprietate determinată a numerelor. Dar matematicianul norvegian Thoralf Skolem a arătat că pînă şi cu un şir infinit numărabil de atare axiome noul nostru sistem, în întregul său, trebuie să rămînă polimorf (adică necategoric). După cum spune el:

„Şirul numerelor este caracterizat complet ... prin axiomele lui Peano, dacă privim conceptul „mulţime" sau „funcţie propoziţională" ca ceva dinainte dat şi avînd o semnificaţie independentă de toate principiile de generare sau de toate axiomele. Dar

[67] *Formulaire de mathématiques*, III, p. 44.

dacă vrem să ducem la îndeplinire în mod consistent tratarea axiomatică, astfel încît raţionamentul cu mulţimi sau funcţii propoziţionale să fie şi el axiomatizat, atunci o caracterizare completă sau unică a şirului numerelor este imposibilă."[68]

Această descoperire este înrudită îndeaproape cu teorema lui Gödel asupra incompletabilităţii aritmeticii formale, teoremă la care vom avea prilejul să ne oprim mai tîrziu. Bineînţeles, Frege nu o cunoştea. Dar Frege nu nutrea nici o simpatie pentru abordarea pe bază de postulate, deoarece era convins că regulile de utilizare a expresiilor numerice trebuie să derive din definiţiile numerelor şi nu invers. Tocmai această convingere a inspirat eforturile sale de prezentare a aritmeticii ca o extindere a logicii.

[68] „Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlvariablen", *Fundamenta Mathematica*, XXIII, (1934), pp. 150—161.

VIII

LOGICA GENERALĂ A LUI FREGE

1. „*Begriffsschrift*"

Urmează acum să examinăm acea dezvoltare a logicii prin care Frege spera să-şi ducă la îndeplinire, în mod absolut riguros, programul său; este firesc să trecem în revistă operele sale în ordinea în care au fost scrise, amînînd toate comentariile majore pînă cînd vom avea în faţă întregul tablou.

În prima sa lucrare, *Begriffsschrift,* principala preocupare a lui Frege este construirea unui limbaj formalizat al gîndirii pure, adică a unui sistem de simboluri mai precis decît limbajul obişnuit şi mai bine adaptat în vederea asigurării exactităţii deducţiei; şi aceasta pentru că nu permite decît ceea ce este esenţial, şi anume conţinutul conceptual, ca opus emfazei retorice. În subtitlul cărţii, Frege spune că această nouă scriere trebuie să fie modelată după limbajul aritmeticii, dar la lectură constatăm că asemănarea principală rezidă în întrebuinţarea literelor în scopul exprimării generalităţii. Desigur, nu Frege a fost primul logician care s-a gîndit la acest procedeu; Aristotel l-a aplicat mult timp înaintea inventării algebrei. Dar Frege a fost primul care a arătat amploarea posibilităţilor acestui procedeu; după cum vom vedea de îndată, el distingea în mod net diferitele noţiuni în legătură cu variabilele care anterior fuseseră confundate. Frege nu a utilizat într-un sens logic special alte semne ale aritmeticii, cum ar fi „+", deoarece dorea să le păstreze în vederea aplicării lor în sensul matematic normal, alături de noile semne logice. Atunci cînd Schröder i-a obiectat această îndepărtare de la notaţia lui Boole, Frege a replicat că ceea ce urmărea era crearea unei scrieri pentru analiza raţionamentului matematic şi că de aceea a evitat în mod deliberat adaptarea în stil Boole a simbolismului algebric, oricît de adecvat ar fi acesta pentru anumite scopuri limitate[1].

Primul dintre semnele speciale pe care le introduce este destinat să exprime judecata sau asertarea. Semnul are forma „⊢" şi este scris la stînga semnului sau complexului de semne în care este dat conţinutul judecăţii. În cazul cînd liniuţa verticală de la început este o-

[1] „Über den Zweck der Begriffsschrift", *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft,* 1882, pp. 1—10.

misă, linia orizontală rămasă se numeşte linia conţinutului şi ea serveşte pentru a arăta că conţinutul exprimat de semnul sau semnele ce urmează este luat în considerare de către autor fără însă a fi afirmat sau negat. De exemplu, dacă „⊢ Γ" este o abreviere a enunţului „Polii magnetici opuşi se atrag între ei", „— Γ" va reda numai gîndul atracţiei reciproce între polii magnetici opuşi, fără o judecată asupra corectitudinii acestui gînd. Frege ne spune că, dacă vrem, putem citi linia orizontală ca şi cum ar însemna „propoziţia că" şi subliniază că conţinutul a ceea ce urmează acestei linii trebuie să fie întotdeauna un conţinut de judecată permis, şi nu o simplă idee, cum este reprezentarea unei case. În exemplul de mai sus, majuscula grecească „Γ" constituie o abreviere a exprimării unui asemenea conţinut şi avem aici un exemplu al modului în care Frege utilizează litere în scopuri logice. Literele mari greceşti trebuie înţelese întotdeauna ca abrevieri, dar uneori ele pot fi introduse fără nici o explicaţie specială, iar atunci cititorul le poate atribui orice sens preferă, cu singura condiţie ca să păstreze acelaşi sens în tot contextul în care figurează litera respectivă. De dragul clarităţii, vom utiliza numai majuscule greceşti neasemănătoare literelor latine, deşi Frege însuşi nu procedează întotdeauna astfel în prima sa lucrare.

Logicienii anteriori considerau că nu poate exista o reprezentare adecvată a judecăţii fără să distingem între subiect şi predicat; Frege respinge însă această dogmă. Într-adevăr, poate exista o diferenţă retorică între „Grecii i-au învins pe perşi" şi „Perşii au fost învinşi de greci"; dar *conţinutul conceptual* al celor două enunţuri este acelaşi, deoarece fiecare poate fi substituit în locul celuilalt ca premisă fără să afecteze validitatea raţionamentului nostru, iar aceasta este tot ce trebuie să avem în vedere dacă încercăm să construim un limbaj destinat scopului urmărit de Frege. Să ne imaginăm o variantă a limbajului obişnuit în care afirmaţia că Arhimede a pierit cu prilejul cuceririi Syracusei ar fi exprimată prin propoziţia: „Moartea violentă a lui Arhimede cu prilejul cuceririi Syracusei este un fapt"; cu alte cuvinte un limbaj în care întregul conţinut al unei judecăţi este exprimat printr-o expresie subiect. Atunci toate enunţurile vor avea unul şi acelaşi predicat, şi anume „este un fapt"; dar această expresie nu va fi la fel ca expresiile obişnuite pentru predicate, deoarece nu va face altceva decît să prezinte conţinutul subiect în forma unei judecăţi. Frege ne spune că limbajul său simbolic este de acest fel şi spune că dacă persistăm să căutăm predicate, va trebui să luăm simbolul „⊢" ca semnul de predicat comun tuturor judecăţilor. Acest mod de a vorbi îl angajează, desigur, la punctul de vedere că distincţia dintre universal şi particular, precum şi ideea de negaţie, se aplică la conţinutul posibil al judecăţii şi nu la judecăţile ca atare,

deoarece ele sînt legate de relaţiile de implicaţie necesară, inconsistenţă etc., relaţii care pot să aibă loc între conţinuturi neasertate. Pe de altă parte, el spune că distincţia pe care o fac logicienii de obicei între judecăţi categorice, ipotetice şi disjunctive este pur gramaticală, aşa cum va reieşi din dezvoltarea ulterioară a sistemului său; şi Frege susţine că distincţiile de modalitate pot fi ignorate deoarece se referă la temeiuri şi nu la conţinuturi de judecată. Atunci cînd spunem că ceva trebuie să aibă loc, indicăm faptul că cunoaştem un adevăr general din care ceea ce trebuie să aibă loc poate fi dedus; iar atunci cînd spunem că ceva e posibil să aibă loc, noi indicăm că nu cunoaştem legi din care ar rezulta negaţia propoziţiei (afară doar dacă nu utilizăm limbajul posibilităţii pentru exprimarea a ceea ce se numeşte de obicei o judecată afirmativă particulară, ca atunci cînd spunem „O tumoare poate duce la deces", vrînd să spunem prin aceasta că unele tumori sînt fatale).

După ce respinge astfel analiza tradiţională a judecăţilor, Frege introduce o expresie complexă "$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\end{array}$" pentru judecata că Γ nu trebuie să fie negat cînd Δ este afirmat. Evident, conţinutul $\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\end{array}$ este ceea ce ne-am obişnuit să numim o condiţională filoniană cu Δ ca antecedent şi Γ în calitate de consecvent. Frege nu ne spune nimic despre istoricul acestei noţiuni, şi s-ar putea să nu fi ştiut de aplicarea ei de către unii logicieni anteriori, dar el o explică exact la fel cum o explică Filon, adică distingînd cele patru posibilităţi diferite:

(*I*) Γ afirmat, Δ afirmat,
(II) Γ afirmat, Δ negat,
(III) Γ negat, Δ afirmat,
(IV) Γ negat, Δ negat,

şi spunînd că noul semn complex reprezintă judecata că a treia posibilitate nu se realizează, dar că una din celelalte trei se realizează. Pe de altă parte, spre deosebire de Filon, el recunoaşte că un asemenea semn nu exprimă întreaga forţă a cuvîntului „dacă". Căci, deşi utilizează denumirea „linia condiţiei" pentru o linie verticală care uneşte orizontalele, el spune că această linie nu poate fi redată propriu-zis prin „dacă", cu excepţia cazului cînd Γ este conectat cu Δ conform unei legi astfel încît să putem face judecata $\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\end{array}$ fără să ştim dacă

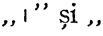
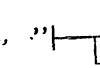
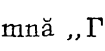
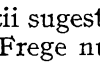
Γ şi Δ trebuie afirmate sau negate separat. Frege merge prea departe cînd susţine că conexiunea trebuie să fie cauzală; într-adevăr, noi putem spune, desigur: „Dacă acest teren este un triunghi dreptunghic, pătratul construit pe ipotenuză este egal cu suma pătratelor construite pe celelalte două laturi". Dar Frege are dreptate să susţină că "$\vdash\!\!\sqsubset^{\Gamma}_{\Delta}$" nu este echivalent cu „Dacă Δ, atunci Γ" cînd este asertat numai pentru că se ştie că Γ este adevărat sau se ştie că Δ este fals.

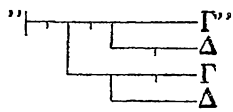
Interesul manifestat de Frege pentru condiţionala filoniană este legat de interesul său pentru rigoarea deductivă. El observă că, luate împreună, cele două judecăţi "$\vdash\!\!\sqsubset^{\Gamma}_{\Delta}$" şi $\vdash\Delta$ implică în mod necesar judecata $\vdash\Gamma$, deoarece "$\vdash\!\!\sqsubset^{\Gamma}_{\Delta}$" exclude cea de-a treia dintre cele patru posibilităţi enumerate mai sus, în timp ce $\vdash\Delta$ exclude a doua şi a patra posibilitate; el propune să reducem orice inferenţă la această unică schemă simplă: *modus ponens* din logica tradiţională sau detaşarea, cum este numită de unii logicieni moderni. Dacă *n* este numărul unei judecăţi "$\vdash\!\!\sqsubset^{\Gamma}_{\Delta}$" în sistemul său deductiv, el exprimă succint inferenţa scriind:

$$\text{„(n)}:\frac{\vdash\Delta''}{\vdash\Gamma}$$

Majoritatea logicienilor anteriori au prezentat un şir de scheme de inferenţă, şi Frege nu contestă faptul că în practica obişnuită oamenii întrebuinţează numeroase scheme diferite; dar el spune că dacă admitem mai mult decît o singură schemă, atunci nu avem un motiv să ne oprim la un anumit număr dat. Dar creşterea numărului regulilor sporeşte pericolul comiterii unor erori în aplicarea lor, în timp ce scăderea acestui număr ne sporeşte perspicacitatea şi astfel prezintă garanţii mai mari. De aceea, este de dorit să aplicăm o singură formă de inferenţă, în caz că este posibil; iar acest lucru este posibil cu condiţia să avem la dispoziţie un număr suficient de formule logice, în vederea utilizării lor ca premise. În cele ce urmează, vom avea prilejul să consemnăm formulele alese de Frege în acest scop şi atunci va fi mai uşor să înţelegem ce presupune pretenţia sa de a reduce toate inferenţele la o singură schemă; aci însă putem observa că, de fapt, el utilizează şi o procedură de substituţie, pe lîngă cea a detaşării. El

însuşi admite aceasta ; şi după ce susţine că aplică un singur fel de inferenţe, el adaugă : „— cel puţin, în toate acele cazuri cînd o judecată nouă este dedusă din mai mult decît una singură".

Negaţia va fi exprimată printr-o liniuţă verticală ataşată părţii de jos a liniei conţinutului, ca în semnul complex  care înseamnă : „Nu este cazul că Γ". Dar pentru ca linia conţinutului să-şi poată îndeplini rolul arătat mai sus, „ ¬ " poate fi înţeles ca o contopire a semnelor „——", „ | " şi „——". Combinînd liniile conţinutului, condiţiei şi negaţiei în diverse moduri, putem exprima acum diverse alte noţiuni logice. Astfel,  înseamnă: „Cazul în care negaţia lui Γ va fi negată iar Δ afirmat nu are loc" sau: „Nu este cazul că atît Γ cît şi Δ". Iar negaţia întregului conţinut al acestei judecăţi furnizează , care înseamnă „Γ şi Δ". Cînd spunem „Γ însă „Δ", adăugăm simplei conjuncţii sugestia că Δ nu este aşteptată, dar aceasta este ceva pentru care Frege nu susţine că ar dispune de mijloace de exprimare în simbolismul său. Pentru „Γ sau Δ", unde „sau" are sensul inclusiv favorizat de Frege, avem  , care înseamnă literal : „Cazul în care Γ trebuie negat, iar negaţia lui Δ afirmată nu apare" ; negaţia întregului conţinut al acestei judecăţi dă la rîndul ei  care înseamnă „Nici Γ, nici Δ". Pentru „Γ sau Δ" în sensul exclusiv (redat uneori prin „ori Γ, ori Δ") trebuie să legăm conţinuturile primului şi celui de-al treilea dintre aceşti compuşi noi, şi rezultatul este expresia :



Aşa cum subliniază Frege, fiecare dintre judecăţile exprimate în simbolismul său cu linii selectează una sau mai multe dintre cele patru posibilităţi reprezentate în tabelul de mai sus şi respinge pe

celelalte. Ultima judecată, de exemplu, lasă deschise cele două posibilităţi:

(II) Γ afirmat, Δ negat,
(III) Γ negat, Δ afirmat.

Dacă dorim să ajungem la ceea ce este esenţial pentru conţinutul oricărei atare judecăţi, trebuie să luăm în considerare această selectare dintre posibilităţi, şi nu vreo formă specială a expresiei. Astfel, dacă am fi plecat cu un semn de bază pentru conjuncţie (adică pentru selectarea primei dintre posibilităţile reprezentate în tabela noastră şi respingerea tuturor celorlalte), am fi putut defini condiţionala lui Filon pentru Δ şi Γ ca negaţia conjuncţiei lui Δ cu negaţia lui Γ. În unele privinţe, aceasta ar fi fost mai natural, deoarece modul nostru uzual de folosire a lui „şi" corespunde mai îndeaproape noţiunii de conjuncţie decît corespunde modul nostru uzual de folosire a lui „dacă" noţiunii de condiţională filoniană. Frege explică însă că s-a decis să înceapă cu linia condiţiei deoarece ea simplifică formularea inferenţelor. Cu alte cuvinte, el crede că avem un cîştig de eleganţă şi claritate atunci cînd noţiunea presupusă în unica lui regulă de inferenţă este reprezentată printr-un semn unic şi în aşa fel încît consecventul poate fi distins imediat de antecedent. În propria lui schemă, inferenţa este indicată pur şi simplu prin eliminarea clauzei inferioare dintr-un complex condiţional, adică prin trecerea de la $\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\end{array}$ la $\vdash\Gamma$.

Frege introduce acum un simbol pentru identitatea de conţinut. Luînd literele „Γ" şi „Δ" ca denumiri de orice gen, adică nu neapărat semne propoziţionale, el stipulează că „$\vdash(\Gamma\equiv\ \Delta)$" va însemna: „Numele Γ şi numele Δ au acelaşi conţinut conceptual, astfel încît Γ poate fi întotdeauna înlocuit prin Δ şi reciproc". Trebuie observat că, potrivit acestei explicaţii, judecata $\vdash(\Gamma \equiv \Delta)$ se referă la nume. Frege însuşi expune acest lucru într-o manieră curioasă, spunînd că numele legate prin noul său simbol nu sînt simpli înlocuitori pentru conţinuturile lor, ci apar *in propria persona*. El continuă, argumentînd că se cere un simbol al identităţii de conţinut, deoarece unul şi acelaşi conţinut poate fi redat sau determinat în moduri deosebite. Cînd se întîmplă aceasta, existenţa unor nume diferite pentru acelaşi conţinut nu este un lucru banal, ci o trăsătură esenţială a limbajului nostru fără de care nu am fi în stare să facem unele judecăţi importante de genul celor pe care Kant le numea sintetice. Am putea ilustra argumentarea sa printr-un exemplu pe care el însuşi l-a folosit în analizele de mai tîrziu. Potrivit modului său de a vorbi la acea dată, „Luceafărul de ziuă" şi „Luceafărul de seară" sînt două denumiri

ale aceluiași conținut; dar cînd spunem „Luceafărul de ziuă ≡ Luceafărul de seară", dăm o informație importantă, întrucît cele două nume corespund unor moduri deosebite de determinare a conținutului. Un alt motiv pentru introducerea acestui simbol este acela că avem nevoie de el pentru formularea definițiilor.

Următoarea noțiune din *Begriffsschrift* este cea căreia Frege îi acordă cea mai mare importanță în prefața sa, și el o explică după cum urmează:

„Dacă un simbol simplu sau compus apare, în unul sau mai multe locuri, într-o expresie al cărei conținut nu este neapărat un conținut posibil de judecată și dacă ne închipuim acest simbol ca înlocuibil, în unul sau mai multe locuri în care apare, prin alt simbol, același de fiecare dată, atunci acea parte a expresiei care se dovedește invariantă la această înlocuire se numește funcție, iar partea înlocuibilă argumentul"[2].

De exemplu, dacă limbajul nostru conține expresia „faptul că bioxidul de carbon este mai greu decît hidrogenul" și privim această expresie ca și cum cuvîntul „hidrogen" ar putea fi înlocuit prin cuvîntul „oxigen" pentru a alcătui o expresie de același tip general ca și prima, vom trata atunci „hidrogen" ca un argument al funcției: „faptul că bioxidul de carbon este mai greu decît...". Acest mod de exprimare ne obligă, desigur, să spunem că „oxigen" este un alt argument al aceleiași funcții. Dar putem tot atît de bine să considerăm „bioxid de carbon" ca parte înlocuibilă din expresia noastră inițială, și atunci vom ajunge să vorbim despre funcția „faptul că —— este mai greu decît hidrogenul". Sau, mai putem privi atît „bioxid de carbon" cît și „hidrogen" ca înlocuibile, vorbind atunci despre „faptul că —— este mai greu decît..." ca despre o funcție de două argumente. Dar lucrurile nu se termină aici, deoarece continuînd pe aceeași linie, ajungem să recunoaștem posibilitatea unor funcții cu mai mult de două argumente.

Într-un limbaj natural, un cuvînt sau o expresie întreagă care ocupă locul subiectului într-o propoziție sînt destinate de obicei să fie considerate argument, sau cel puțin argumentul principal, dar trebuie să ne ferim de a crede că orice expresie-subiect ar putea fi considerată un argument. În enunțul „Fiecare întreg pozitiv poate fi reprezentat ca suma a patru pătrate" avem într-adevăr de-a face, cum vom vedea mai tîrziu, cu funcția „—— poate fi reprezentat ca suma a patru pătrate", adică cu o funcție pentru care „numărul 20" poate fi caracterizat ca argument în „numărul 20 este reprezentabil ca sumă a patru pătrate". Dar, după Frege, expresia „fiecare întreg pozitiv", spre deosebire de „numărul 20", nu este un argument posibil al acestei funcții sau al unei alteia, deoarece în propozițiile în care figurează, această expresie capătă un sens numai datorită contextului, iar luată în sine nu transmite o idee completă.

[2] *Bs.*, § 9.

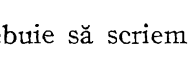
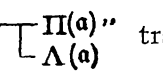
Terminologia fregeeană a funcției și argumentului este împrumutată, desigur, din matematică, la fel ca notația funcțională introdusă de Frege. De exemplu, el spune că semnul compus „$\Phi(\Gamma)$" exprimă o funcție nedeterminată de argumentul „Γ", iar „$\Psi(\Gamma, \Delta)$ este o funcție (nedeterminată mai departe) de cele două argumente „Γ" și „Δ" luate în această ordine. Dacă presupunem că funcțiile sînt de așa natură încît completate prin argumente exprimă conținuturi posibile de judecată, putem citi „$\vdash\Phi(\Gamma)$" ca: „Γ are proprietatea Φ", iar „$\vdash\Psi(\Gamma, \Delta)$" ca: „$\Gamma$ este în relația Ψ cu Δ". Pentru Frege, meritul principal al acestui simbolism este că permite exprimarea generalității într-un mod mai satisfăcător decît oricare alt mod permis de limbile obișnuite. Dar aceasta este posibil numai cînd simbolul este folosit împreună cu un nou procedeu, pe care logicienii de mai tîrziu l-au numit notație cu variabile legate; pentru distingerea rolului jucat de literele sale atunci cînd sînt folosite ca parte integrantă din această notație, Frege introduce acum tipul gotic.

În cadrul expresiei unei judecăți, în scrierea sa, orice simbol compus situat în dreapta semnului asertării poate fi considerat ca o funcție de unul din simbolurile care figurează în cadrul său. Să înlocuim acest simbol printr-o literă gotică și să inserăm aceeași literă gotică într-o concavitate a liniei conținutului astfel încît să avem, de exemplu,

„$\vdash$ $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $\Phi(\mathfrak{a})$". Atunci, după Frege, „această formulă semnifică judecata că funcția este un fapt, oricum am considera argumentul ei"[3]. Terminologia sa conține desigur o eroare, căci, potrivit explicației pe care o dăduse anterior, o funcție este o parte a unei *expresii*, adică ceva ce nu poate fi un fapt. Acesta nu este dealtfel singurul pasaj din *Begriffsschrift* unde Frege pare să confunde simbolurile cu ceea ce simbolizează acestea. Alte exemple se pot găsi în citatele noastre. Nu trebuie însă să insistăm deocamdată asupra acestui lucru. Frege arată limpede ce vrea să spună, atunci cînd continuă afirmînd că dintr-o judecată ca cea menționată mai sus putem deduce întotdeauna un număr de judecăți cu conținuturi mai puțin generale, dacă omitem concavitatea cu litera ei gotică și substituim diverse simboluri definite pentru litera gotică dinăuntrul parantezelor. Pe scurt, expresia de mai sus este echivalentă cu „Orice lucru este Φ", dar este construită astfel încît să se evite pericolul confundării formei sale cu forma expresiilor care provin din ea printr-o substituție.

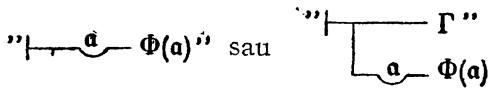
Trebuie însă observat că în acest context cuvîntul „orice" nu este supus nici unei determinări, cu excepția condiției implicite că orice

[3] *Bs.*, § 11.

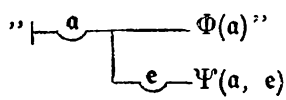
substituţie admisibilă în funcţie trebuie să dea o expresie pentru un conţinut posibil de judecată. Dacă dorim să utilizăm noua noastră scriere pentru exprimarea unei judecăţi că ceva de un anumit gen este aşa şi aşa, va trebuie să punem această restricţie în simbolismul care urmează după concavitate. De exemplu, pentru „Orice vieţuitor este pieritor" trebuie să scriem  tratînd „ 

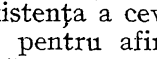
ca un semn funcţional compus unic. Această redare înseamnă literal: „Pentru orice a, nu este cazul că a este vieţuitor şi în acelaşi timp nu este pieritor" şi ea indică clar faptul că concavitatea cu literele ei gotice guvernează întreaga expresie ce urmează; dar ea nu garantează semnificaţia existenţială care revine acelor enunţuri din limba obişnuită pe care încercăm să le traducem. Fără îndoială, Frege era conştient de acest din urmă lucru, dar el nu-l menţionează în mod explicit.

Pînă acum, am considerat numai cazurile în care concavitatea cu litera ei gotică vine imediat după linia judecăţii. Dar cuantorul universal, cum a fost el numit de către Peirce şi logicienii de mai tîrziu, poate apărea în alte poziţii, în cadrul expresiei unei judecăţi, ca, de exemplu, atunci cînd scriem:

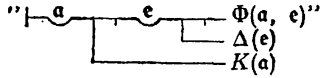


sau

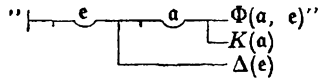


Aceasta are o mare importanţă, deoarece ne permite să facem nenumărate genuri interesante de enunţuri în noua scriere. Astfel, cînd cuantorul universal este precedat de linia negaţiei, ca în primul nostru exemplu, avem o expresie pentru existenţa a ceva ce nu satisface expresia funcţională care urmează, iar pentru afirmarea existenţei a ceva ce satisface o expresie funcţională nu avem de făcut altceva decît să intercalăm o altă linie a negaţiei între cuantorul universal şi expresia funcţională, ca atunci cînd scriem  pentru „Există cel puţin un filosof". Aşa cum spunea William de Shyreswood, *„Quidam, non-nullus, non-omnis-non* sociantur". Dacă domeniul de acţiune al cuantorului universal este limitat la condiţia întregii jude-

căţi, ca în al doilea exemplu al nostru, avem o modalitate de redare a unor enunţuri ca: „Dacă orice este umed, nu putem aprinde focul", enunţ cu totul deosebit, desigur, de: „Consideraţi un lucru oarecare: dacă acest lucru este umed, nu putem aprinde focul". Dar cînd un cuantor universal este inclus în domeniul altuia, ca în cel de-al treilea exemplu al nostru, avem un tip de complexitate care n-a fost analizat niciodată în mod amănunţit de către logicienii dinaintea lui Frege, deşi el poate fi găsit în vorbirea obişnuită şi este esenţial pentru limbajul ştiinţific. Pentru a lua exemple ceva mai complicate decît cel citat de Frege,



ar servi pentru redarea enunţului: „Orice pisică se teme de un cîine" iar



pentru o redare a enunţului: „Există un cîine de care se teme orice pisică". Evident, cele două aserţiuni sînt deosebite şi ambele desfid orice încadrare în schema aristotelică. În fapt, complexitatea posibilă a aserţiunilor exprimabile în scrierea lui Frege nu cunoaşte limită. Într-adevăr, deşi Frege nu are decît trei semne de bază ce prezintă importanţă în această ordine de idei, şi anume linia condiţiei, linia negaţiei şi cuantorul universal, aceste semne se pot combina într-o infinitate de moduri diferite. În timp ce logicienii de dinaintea lui vorbeau ca şi cum ar fi posibil să dăm o listă completă a formelor absolut specifice ale propoziţiilor, Frege oferă o schemă care este în acelaşi timp mai simplă ca orice propunere anterioară şi totuşi, într-un anumit sens, este inepuizabilă.

Dar posibilitatea includerii unui cuantor în domeniul de acţiune al altora impune anumite precauţii în alegerea literelor gotice. Deşi în general este legitimă înlocuirea unei litere gotice prin alta în cadrul întregii expresii în care apare, este important ca *deosebirile* de literă să fie păstrate atunci cînd un cuantor este inclus în domeniul de acţiune al altuia. Astfel, în exemplele de mai sus, dacă înlocuim oriunde "e" prin „a" sau „a" prin „e", rezultatul ar fi sau absurd, sau ceva cu totul diferit de ceea ce urmăream. Cauza acestei restricţii impuse libertăţii noastre de alegere este lesne de înţeles. Dacă un semn funcţional are mai multe locuri de argumente ce urmează să fie completate în acelaşi fel, este important să indicăm acest fapt într-un mod

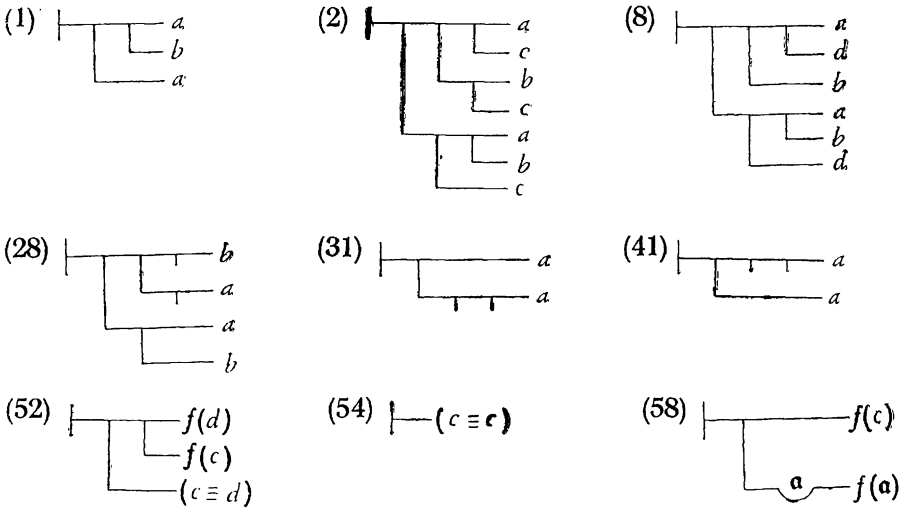
oarecare, iar metoda evidentă, adoptată acum în mod universal, rezidă în marcarea acestor locuri, şi numai a acestora, prin aceeaşi literă. Într-adevăr, pe baza acestei convenţii este limpede că cele două locuri de argumente dintr-un semn cum este „$\mathfrak{a}$ se teme de $\mathfrak{a}$" trebuie completate prin acelaşi argument, dacă în genere ele sînt completate, deşi cele două locuri din „$\mathfrak{a}$ se teme de $\mathfrak{e}$" nu trebuie neapărat completate prin argumente diferite. Prin urmare, atunci cînd un cuantor apare în domeniul de acţiune al altuia şi există putinţa unei confuzii, sîntem obligaţi să ţinem seama de sus-menţionata distincţie între litere.

Deşi bogăţia sistemului lui Frege se datorează în mare măsură faptului că cuantorul său universal nu este obligat să apară întotdeauna imediat după linia judecăţii, cazurile în care el apare totuşi în acest mod sînt deosebit de importante, deoarece numai ele admit substituţia. Ca să facem o paralelă cu limbajul obişnuit de care ne-am ocupat deja, un om care afirmă: „Dacă orice este umed, noi nu putem aprinde focul", nu acceptă prin aceasta toate afirmaţiile de felul acesteia: „Dacă iarba este umedă, noi nu putem aprinde focul". Într-adevăr, oricare din aceste din urmă afirmaţii pot fi false, deşi ceea ce afirma persoana respectivă era adevărat. Pentru marcarea cazurilor care admit substituţii şi în acelaşi timp pentru simplificarea notaţiei sale, Frege introduce un al doilea mod de exprimare a universalităţii, şi anume prin intermediul unei litere cursive care nu este precedată de un cuantor. De exemplu, în loc de „$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})$" putem scrie: „$\vdash \Phi(a)$",

oriunde aceasta este convenabil; iar de la această din urmă formulă ne putem înapoia, după plac, la prima, dar cînd înlocuim o literă cursivă printr-una gotică trebuie să fim siguri că litera gotică aleasă nu figurează deja în nici o parte a enunţului nostru. Această măsură de precauţie este necesară deoarece noul nostru cuantor va fi astfel situat încît să includă în domeniul său de acţiune orice alţi cuantori care pot figura în cadrul expresiei. Esenţial este faptul că atunci cînd universalitatea se exprimă într-o scriere de genul celei a lui Frege, prin litere fără cuantori (adică se exprimă prin variabile libere, cum sînt ele numite în terminologia logicienilor moderni), fiecare literă are ca domeniu propriu de acţiune întreaga expresie în cadrul căreia apare. Notaţia datează cel puţin de pe vremea lui Aristotel, dar Frege a fost primul logician care a analizat-o cu grijă şi şi-a dat seama că pentru exprimarea universalităţii într-un domeniu de acţiune limitat, ca, de exemplu, după un semn al negaţiei, este necesar un alt procedeu.

După ce a explicat simbolismul său, Frege trece la formularea unor teze logice. Există, spune el, unele principii care nu pot fi

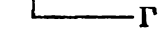
exprimate în scrierea lui, deoarece sînt presupuse de această scriere. Este vorba de regulile de întrebuinţare a semnelor şi de regulile de inferenţă. Există însă principii ale gîndului pur care pot fi exprimate în scrierea sa, şi el îşi propune să dea unele exemple şi să indice conexiunile lor. Cu alte cuvinte, el vrea să arate, în linii mari, cum logica poate fi prezentată ca un sistem deductiv, iar în acest scop el încearcă să găsească unele principii logice care, luate împreună, posedă forţa tuturor celorlalte principii. După cum s-ar aştepta orice cunoscător al istoricului axiomatizării geometriei, Frege descoperă că sînt posibile diverse aranjamente; el optează însă în favoarea unei scheme care conţine 9 axiome, toate foarte simple şi evidente. Primele trei privesc numai noţiunea exprimată prin linia condiţiei, iar următoarele trei introduc noţiunea de negaţie. Două axiome privesc identitatea conţinutului, iar una priveşte universalitatea exprimată printr-o literă gotică într-o concavitate. Formulate în scrierea sa şi prevăzute cu numerele pe care le au în sistemul său, axiomele sînt după cum urmează:



În accepţiile termenilor „primar" şi „general", care au fost explicate şi adoptate în secţiunile anterioare, primele şase formule aparţin logicii primare, iar a noua este o adăugare cerută de logica generală, pe cînd a şaptea şi a opta aparţin unei teorii şi mai extinse, teoria identităţii.

Vom constata că toate axiomele sînt formulate prin intermediul literelor cursive (adică al variabilelor libere). Potrivit explicaţiilor

date de Frege, acest procedeu este o simplă abreviere a exprimării prin intermediul literelor gotice şi al cuantorilor universali, şi trebuie presupus că Frege considera acest procedeu ca adecvat în cazul de faţă, deoarece ar facilita substituţia. Dar aceasta nu poate constitui o explicaţie suficientă. Într-adevăr, dacă literele gotice ar fi întrebuinţate pretutindeni, am pierde diferenţa interesantă şi importantă dintre primele şase axiome, care, în forma lor prezentă, nu presupun cuantificarea universală, şi a noua axiomă, care presupune această cuantificare. Cu alte cuvinte, logica primară nu ar mai apărea ca o parte proprie independentă a logicii generale, iar a noua axiomă ar înceta să deţină statutul aparte de care se bucură acum. Asupra acestei chestiuni vom mai reveni. În prezent este de ajuns să notăm faptul că în demonstrarea teoremelor pe baza axiomelor sale, Frege are nevoie de un principiu de substituţie, care vine să se adauge principiului detaşării, pe care Frege preferă să-l considere ca unica sa regulă de inferenţă. Dealtfel, aceste două reguli nu sînt singurele pe care le întrebuinţează. Într-adevăr, afirmaţia sa că ne putem întoarce după plac de la o literă cursivă la o literă gotică cu un cuantor echivalează de fapt cu o a treia regulă de inferenţă. În cursul explicării utilizării literelor cursive, Frege introduce şi o a patra regulă, aceea că din

putem deduce


dacă „Γ" este o abreviere

a unei expresii în care „*a*" nu apare iar „*a*" ocupă numai poziţii de argument în versiunea completă a lui „$\Phi(a)$".[4] Împreună cu aceste patru reguli, axiomele sale constituie într-adevăr un ansamblu complet, în sensul tehnic al acestei expresii, deşi suficienţa lor nu a putut fi demonstrată pe vremea lui Frege.

Scrierea lui Frege prezintă avantajele pe care el le revendică, şi în special acela că facilitează inferenţele prin detaşare; dar ea ocupă un spaţiu întins şi este greu de tipărit. Pentru a ilustra o deducţie în sistemul său, vom introduce deci în locul acestei scrieri simbolismul lui Peano, dar, pentru a face traducerea cît mai uşoară cu putinţă, vom menţine notaţia sa literală şi vom lua un exemplu care nu necesită decît un singur semn nou, şi anume o potcoavă pusă între antecedent şi consecvent, în vederea desemnării unei legături filoniene. Exemplul prezintă un interes special deoarece arată în mod izbitor complexitatea la care putem ajunge pornind de la lucruri simple. Pornind de la primele două axiome ale lui Frege ca premise, vom deduce a treia axiomă, demonstrînd astfel în treacăt că sistemul său poate fi simpli-

[4] *Bs.*, § 11.

ficat. În cele ce urmează, toate propoziţiile de la [3] la [8] inclusiv au fost stabilite de către Frege însuşi, dar restul demonstraţiei se datorează lui Łukasiewicz[5], iar numerotaţia ne aparţine. Pentru abrevierea unor asemenea demonstraţii, Frege şi succesorii săi au introdus diverse procedee, dar pentru facilitarea înţelegerii vom formula fiecare pas în mod complet, împreună cu justificarea sa. Astfel, referirea de după [3] indică faptul că [3] este dedus din [1] prin substituirea expresiei din faţa barei verticale pentru litera care stă după această bară, iar referirea de după [4] indică faptul că formula se deduce din [3] şi [2] prin detaşare, adică *modus ponens*.

[1] $a \supset (b \supset a)$ Axiomă.

[2] $[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]$ Axiomă.

[3] $\{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset ((b \supset a) \supset \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\})$
Din [1]: $[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]/a\,;\ b \supset a/b.$

[4] $(b \supset a) \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}$
Din [3] şi [2].

[5] $((b \supset a) \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}) \supset \supset (\{(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]\} \supset \{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\})$
Din [2]: $b \supset a/c\,;\ c \supset (b \supset a)/b\,;\ (c \supset b) \supset (c \supset a)/a.$

[6] $\{(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]\} \supset \{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}$
Din [5] şi [4].

[7] $(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]$ Din [1]: $b \supset a/a\,;\ c/b.$

[8] $(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]$ Din [6] şi [7].

[9] $\{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset \{[(b \supset a) \supset (c \supset b)] \supset \supset [(b \supset a) \supset (c \supset a)]\}$ Din [2]: $b \supset a/c\,;\ c \supset b/b\,;\ c \supset a/a.$

[10] $[(b \supset a) \supset (c \supset b)] \supset [(b \supset a) \supset (c \supset a)]$ Din [9] şi [8].

[11] $\{[(c \supset b) \supset a] \supset [b \supset (c \supset b)]\} \supset \{[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)\}$
Din [10]: $c \supset b/b\,;\ b/c.$

[12] $[a \supset (b \supset a)] \supset \{c \supset [a \supset (b \supset a)]\}$ Din [1]: $a \supset (b \supset a)/a\,;\ c/b.$

[13] $c \supset [a \supset (b \supset a)]$ Din [12] şi [1].

[14] $[(c \supset b) \supset a] \supset [b \supset (c \supset b)]$ Din [13]: $(c \supset b) \supset a/c\,;\ b/a\,;\ c/b.$

[15] $[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)$ Din [11] şi [14].

[16] $\{[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)\} \supset (\{d \supset [(c \supset b) \supset a]\} \supset \supset [d \supset (b \supset a)])$
Din [8]: $(c \supset b) \supset a/b\,;\ b \supset a/a\,;\ d/c.$

[17] $\{d \supset [(c \supset b) \supset a]\} \supset [d \supset (b \supset a)]$ Din [16] şi [15].

[18] $\{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset \supset [b \supset (c \supset a)]\}$ Din [17]: $c \supset (b \supset a)/d\,;\ c \supset a/a.$

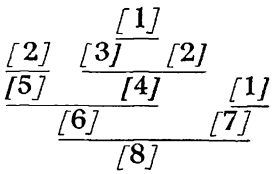
---

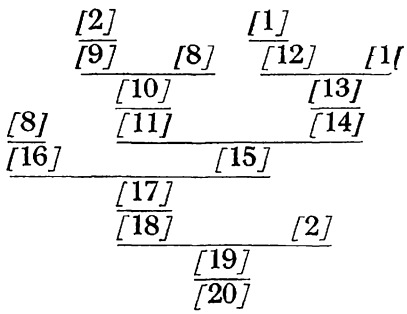
[5] „Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis*, V (1936), pp. 111—131, în special p. 127. (A se vedea *Din istoria logicii propoziţiilor*, în *Logică şi filozofie*, Ed. politică, 1966, p. 119—143).

[19] $[c \supset (b \supset a)] \supset [b \supset (c \supset a)]$ Din [18] şi [2].

[20] $[d \supset (b \supset a)] \supset [b \supset (d \supset a)]$ Din [19]: d/c.

Ultimul pas este desigur o modificare banală, care nu are alt scop decît restaurarea notaţiilor pe care Frege le utilizase în formularea celei de-a treia axiome a sa. Dar descoperirea substituţiilor care permit ceilalţi paşi nu este cîtuşi de puţin o realizare banală. Utilizînd linii orizontale pentru indicarea deducţiilor, indiferent dacă este vorba de deducţii din una sau din două premise, putem reprezenta partea fregeeană a demonstraţiei prin prima dintre următoarele figuri, iar continuarea prin a doua:





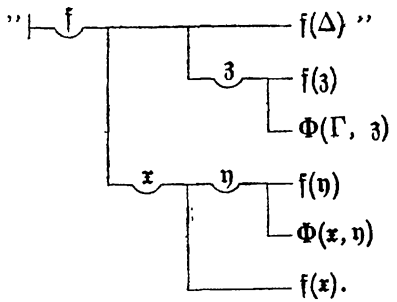
Pînă aici Frege reuşise să-şi dezvolte sistemul fără să recurgă la vreo definiţie abreviativă, exceptînd aceea prin care sînt introduse litere cursive. Dar în a treia parte a lucrării sale, el recunoaşte necesitatea practică a utilizării unor definiţii şi spune că ele trebuie date în forma „$\vdash \Gamma \equiv \Delta$", noua expresie urmînd în fiecare caz după semnul identităţii. Scopul celor două linii verticale de la început este să arate clar că definiţiile nu sînt judecăţi, ci convenţii despre simbolism. Pentru ceea ce urmărim acum nu este însă necesar să considerăm în mod amănunţit a treia parte din *Begriffsschrift*. Frege intenţionează aici să arate în mod preliminar modul în care scrierea sa poate fi utilizată în vederea formulării exacte a noţiunilor cerute de matematică, şi el alege ca exemplu teoria generală a şirurilor. Exemplul este interesant deoarece, aşa cum am văzut în capitolul precedent, inducţia matematică depinde de ordonarea în şir a numerelor naturale, iar această ordonare nu poate fi explicată fără teoria relaţiilor, pe care Frege a încorporat-o pentru prima dată în mod satisfăcător în logică.

Pentru orice relaţie Φ putem defini o altă relaţie Φ' astfel încît Γ este în relaţia Φ' faţă de Δ dacă şi numai dacă Γ este în relaţia Φ faţă de Δ sau faţă de ceva care este în relaţia Φ faţă de Δ, sau faţă de

ceva care este în relaţia Φ faţă de ceva care este în relaţia Φ faţă de Δ sau... etc. În limbajul logicienilor de mai tîrziu, se spune că Φ′ este *ancestralul propriu* al lui Φ, deoarece dacă Φ este relaţia de la părinte la copil, Φ′ este relaţia de la strămoş la urmaş. Frege însuşi nu utilizează această terminologie, dar exprimă relaţia derivativă spunînd: „Δ urmează lui Γ în şirul Φ", iar problema pe care şi-o pune este de a defini relaţia derivativă printr-o expresie finită, adică fără să facă uz de idiomul „etcetera", care presupune la rîndul său înţelegerea unei ordini de şir. Frege ajunge la rezultatul dorit, spunînd că „Δ urmează lui Γ în şirul Φ" înseamnă acelaşi lucru ca: „Δ posedă orice proprietate care aparţine (I) oricărui obiect faţă de care orice posesor al proprietăţii este în relaţia Φ şi (II) oricărui obiect faţă de care Γ este în aceeaşi relaţie Φ".

Cele două condiţii menţionate în această definiţie nu sînt numerotate, cum se întîmplă în versiunile ulterioare (inclusiv în versiunea pe care am utilizat-o în capitolul precedent), dar este clar că orice proprietate care satisface ambele condiţii trebuie să revină oricărui obiect faţă de care Γ se raportează prin ancestralul propriu al relaţiei Φ. Într-adevăr, a doua condiţie reclamă ca proprietatea să revină succesorilor imediaţi ai lui Γ, iar prima condiţie reclamă ca să fie transmisă de la toţi succesorii lui Γ la succesorii lor imediaţi sau, cum spune însuşi Frege, reclamă ca ea să fie ereditară în şir. Definiţia conduce deci la identificarea succesorilor lui Γ, în cadrul şirului Φ, prin aceea că aceştia posedă *toate* proprietăţile care sînt ereditare în şirul începînd de la Γ. Nu încape îndoială că pot exista unele proprietăţi care sînt ereditare într-un şir şi totuşi aparţin şi unor obiecte din afara şirului, după cum un nas lung poate fi ereditar într-o familie, aparţinînd totuşi şi unor persoane din afara familiei. Am văzut însă că aceasta nu poate fi adevărat despre *toate* proprietăţile ereditare, deoarece există cel puţin o asemenea proprietate, şi anume aceea de a fi succesor într-un şir, care aparţine numai membrilor şirului. Trebuie observat însă că definiţia lui Frege acoperă numai succesorii lui Γ în cadrul şirului Φ. Dacă vrem să utilizăm expresia „şir Φ" astfel încît să includem aici pe însuşi Γ, trebuie să definim un membru ca un obiect care este sau identic cu Γ sau este succesor al lui Γ în şirul Φ. Uneori, cuvîntul „ancestral" este utilizat pentru relaţia în care Γ se află faţă de toţi membrii, inclusiv faţă de sine, şi tocmai din acest motiv vorbim, în conexiune cu teoria lui Frege, despre ancestralul *propriu*.

Exprimat în mod complet în scrierea lui Frege, adică fără să se facă uz de abrevierile introduse de Frege în propoziţiile (69) şi (76), un enunţ stipulînd că Δ urmează lui Γ în şirul Φ ia forma:



Acesta este un exemplu bun de utilizare a cuantorilor cu domenii de acţiune diferite, şi el arată totodată modul în care în anumite contexte o funcţie poate fi tratată la rîndul ei ca un argument pentru o funcţie de un ordin mai înalt. Într-adevăr, litera gotică „f" corespunde expresiei „fiecare proprietate" în parafraza din limbajul obişnuit. Introducînd notaţia sa pentru cuantificare în prima parte din *Begriffsschrift*, Frege remarcă această posibilitate şi observă totodată că dacă o literă cursivă apare ca un simbol funcţional trebuie să ţinem seamă în măsură cuvenită de acest fapt atunci cînd efectuăm substituţii. Frege nu consideră însă necesară adoptarea unor măsuri speciale pentru asemenea cazuri în formularea axiomelor logicii, din a doua parte a cărţii.

2. *Sens şi referinţă: obiecte şi funcţii*

În *Grundgesetze*, Frege a păstrat toate simbolurile din *Begriffsschrift*, cu excepţia lui „≡", pe care l-a înlocuit acum prin semnul matematic obişnuit al egalităţii. În sine, modificarea notaţiei nu are importanţă, dar ea marchează o schimbare în vederile lui Frege despre semnificaţie, iar explicaţia acestui fapt va servi ca o introducere nimerită la teoriile sale de mai tîrziu. El însuşi a pornit de aici, cînd a scris articolul intitulat *Über Sinn und Bedeutung*.

Pe la începutul cărţii sale *Begriffsschrift*, Frege făcea distincţie între judecată sau aserţiune şi ceva căruia îi spunea conţinut. Frege nu a specificat exact cum trebuia înţeles acest din urmă cuvînt, dar în mod evident el consideră conţinutul ca fiind opus nu numai judecăţii, ci şi semnelor de exprimare, şi folosea a doua deosebire atunci cînd

explica enunțuri ca: „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară". Este evident că această remarcă este cu totul diferită ca tărie de: „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de ziuă"; și totuși, dacă Luceafărul de ziuă este identic în fapt cu Luceafărul de seară, nu putem explica diferența dintre cele două enunțuri spunînd că unul conține o referire la Luceafărul de seară, în timp ce celălalt nu conține. Așa cum am văzut, Frege sugera că un enunț de identitate trebuie să se refere în mod real la expresiile care apar în cele două părți ale semnului identității și a încercat să facă clar acest lucru spunînd că „≡" urma să fie înțeles ca un simbol pentru identitatea de conținut între expresii. Mai tîrziu însă, el a ajuns să vadă că această soluție nu rezolvă satisfăcător dificultatea. Într-adevăr, el și-a dat seama că dacă enunțul inițial nu s-ar referi în mod real la planeta Venus, ci la conținuturile anumitor expresii, el ar aparține mai curînd filologiei decît astronomiei, ceea ce, evident, nu este cazul, deoarece descoperirea identității Luceafărului de ziuă cu Luceafărul de seară a fost realizată prin observații și calcule, și nu prin reflecție asupra utilizării cuvintelor. Am putea adăuga că pînă și în filologie dificultatea ar apare din nou, de îndată ce am încerca să aplicăm soluția propusă. Într-adevăr, a spune că expresia „Luceafărul de ziuă" are același conținut cu expresia „Luceafărul de seară", nu este oare echivalent cu a spune: conținutul expresiei „Luceafărul de ziuă" este identic cu conținutul expresiei „Luceafărul de seară"? Și dacă lucrurile stau astfel, nu trebuie oare să mergem mai departe și să spunem că enunțul nostru inițial nu se referă la expresiile „Luceafărul de ziuă" și „Luceafărul de seară", ci se referă la expresiile „Conținutul expresiei «Luceafărul de ziuă»" și „Conținutul expresiei «Luceafărul de seară»"? Dar nici măcar aceasta nu este suficient; soluția propusă implică un regres la infinit.

În opera sa de mai tîrziu, Frege încearcă să evite dificultatea prin faptul că renunță să vorbească despre conținut și emite o nouă distincție între sens (*Sinn*) și referință (*Bedeutung*). Cînd spunem că Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară, descripțiile noastre se referă la unul și același lucru, dar se referă în moduri diferite, deoarece descripțiile nu au același sens. În emiterea enunțului, noi facem uz de cele două descripții exact în același mod în care am fi făcut uz de ele în orice alt enunț astronomic, și nu avem nevoie de vreun expedient de felul unui nou semn al identității, care ar sugera prin însăși noutatea sa că vorbim în fapt despre cuvinte și nu despre lucruri. Într-adevăr, semnul identității întrebuințat în matematică are exact semnificația cerută. Cînd se afirmă că $2 + 2 = 4$, „2 + 2" și „4" sînt utilizate ambele pentru indicarea unui număr. Aceste expresii sînt într-adevăr nume proprii ale unui număr, dar nume avînd sensuri diferite,

singura deosebire importantă dintre acest enunț și exemplul nostru împrumutat din astronomie fiind aceea că în primul caz adevărul afirmației poate fi stabilit *a priori*.

În germana obișnuită, cuvintele pe care le-am tradus prin „sens" și „referință" nu sînt utilizate pentru efectuarea unei opoziții, cum intenționează Frege. *Sinn* are un domeniu de accepții tot atît de larg ca și englezul „sense", iar *Bedeutung* corespunde aproape exact lui „meaning" (semnificație). În multe contexte, preferarea unui termen în locul altuia nu depinde decît de considerente stilistice. Dar verbul simplu *deuten*, din care sînt derivate *bedeuten* și *Bedeutung*, poate fi întrebuințat pentru „point" (a indica), cel puțin în sensul metaforic al acestui cuvînt englez, și Frege pare să fi reținut această particularitate ca o justificare pentru accepția tehnică pe care i-o dă lui *bedeuten*. Frege nu explică motivele sale, deoarece nu admite niciodată că accepția pe care o dă termenului se abate de la germana obișnuită; dar el dezvăluie orientarea gîndirii sale cînd spune într-un loc că, deși o literă gotică sau cursivă nu *bedeutet* nimic, ea *andeutet* argumentul unei funcții[6]. Într-adevăr, *andeuten*, care înseamna „a arăta spre", este un alt derivat al lui *deuten*; se pare că Frege consideră acest fapt ca avînd o anumită importanță. Dar, indiferent care au putut fi motivele pentru care utilizează așa cum am văzut cuvîntul *Bedeutung*, nu încape îndoială că el i-a conferit o semnificație specială pe care n-o posedă în germana obișnuită și de aceea ne este desigur greu să-i găsim o traducere adecvată. Nu putem utiliza cuvîntul „semnificație", deoarece nu este corect să spunem că expresia „Luceafărul de ziuă" are ca semnificație unul din corpurile cerești, deși putem spune că o persoană care utilizează această expresie înțelege (adică intenționează) să se refere la unul din corpurile cerești. Au fost propuse „nominatum"[7] și „denotatul" (denotation)[8], fiecare dintre acești termeni avînd avantajele sale. Într-adevăr, atunci cînd Frege vorbește despre *Bedeutung* a unei expresii, el pare gata să susțină că simbolul considerat este un nume sau, în orice caz, o cvasidenumire; și putem spune, fără îndoială, că expresia „Luceafărul de ziuă" denotă un corp ceresc. Dar nici una din aceste exprimări nu pare să fie întru totul satisfăcătoare. „Nominatum", de asemenea, este o expresie evident artificială, iar „denotation" poate deruta, deoarece a fost utilizat ca termen tehnic de către John Stuart Mill în contrast cu „connotation" (conotatul), care nu coincide exact cu distincția lui Frege

[6] *Gg.*, I, § 17.

[7] R. Carnap, *Meaning and Necessity*. (A se vedea traducerea română — „Semnificație și necesitate", Editura Dacia, 1972 — Nota trad.).

[8] Alonzo Church, "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, LXXX (1951), pp. 100—112.

dintre *Bedeutung* şi *Sinn*. „Referinţă" nu este nici el un termen absolut satisfăcător, deoarece este cam confuz să vorbim despre un lucru ca despre referinţa unui semn, dar probabil că această traducere nu dă loc la neînţelegeri. Dealtfel, din cînd în cînd putem modifica modul nostru de exprimare. Însuşi Frege explică într-un loc distincţia sa, spunînd că un nume propriu (care poate fi un cuvînt sau un semn izolat, sau o combinaţie de cuvinte sau de semne) *exprimă* sensul său, dar *reprezintă* sau *desemnează* referinţa sa.

În întrebuinţarea obişnuită a limbajului pentru emiterea unor enunţuri, punerea unor întrebări, darea unor ordine etc., se presupune că orice semn complet distinct are atît sens, cît şi referinţă. Referinţa este un obiect de o speţă oarecare, dar nu neapărat un obiect perceptibil; Frege are grijă întotdeauna să combată ideea că nu există nimic în afară de ceea ce poate fi perceput, şi el include în mod expres printre obiectele sale lucruri ca numerele, locurile, momentele şi perioadele de timp. Pe de altă parte, sensul este ceva prin care obiectul poate fi desprins şi propus atenţiei noastre. Sensul nu este o reprezentare, dacă înţelegem prin aceasta o imagine sau ceva specific unui gînditor individual. Într-adevăr, orice comunicare depinde de exprimarea unui sens de la un om la altul, iar în împrejurări speciale semnele pot avea un sens public chiar dacă nu au vreo referinţă. Aceasta se întîmplă, de exemplu, atunci cînd cuvintele sînt întrebuinţate într-o povestire. Un romancier ne poate asigura în prefaţa cărţii sale că opera nu conţine nici o referire la o persoană reală, dar, cu toate acestea, noi putem înţelege ceea ce a scris. Ceva similar se întîmplă şi atunci cînd cineva relatează afirmaţiile unei alte persoane fără să atribuie la rîndul său referinţe cuvintelor întrebuinţate de acel altcineva. De exemplu, cineva care a făcut studii clasice poate folosi cuvintele „Zeus" şi „Athena" în mod inteligibil într-o expunere a mitologiei eline, deşi nici el, nici cititorii săi nu cred că au existat persoane ca cele descrise sub aceste denumiri. Acestea sînt însă cazuri speciale. În vorbirea obişnuită, se presupune că toate numele au referinţe, iar într-un limbaj logic perfect, destinat ştiinţei, fiecare expresie construită pentru a funcţiona ca un nume propriu ar avea în fapt o referinţă. Într-adevăr, erorile apar atunci cînd expresiile ce presupun adevărul unor enunţuri existenţiale sînt folosite fără demonstrarea acelor enunţuri. De exemplu, expresia „şirul cel mai lent convergent" are un sens, dar nu se referă la nimic, iar o propoziţie care-l conţine nu reuşeşte, din această cauză, să slujească unui scop util. Nu putem susţine nici măcar că cel care rosteşte această expresie ar comite un enunţ fals, deoarece a presupune nu este totuna cu a aserta.

Pînă aici, teoria lui Frege nu suscită prea multe controverse. Poate că unii cititori ar fi surprinşi de întrebuinţarea pe care el o dă expresiei

„nume propriu" pentru a cuprinde expresii ca „2 + 2", dar dacă cineva obiectează în această privinţă, el poate substitui „desemnare" pentru „nume propriu", fără să aducă astfel doctrinei vreo modificare esenţială. Situaţia se schimbă atunci cînd Frege merge mai departe şi argumentează că propoziţiile au atît sens cît şi referinţă. Într-adevăr, aceasta presupune tratarea propoziţiilor ca şi cum ele ar fi nume sau desemnări, ceea ce fără îndoială că este straniu. Frege însuşi recunoaşte că este bizar să vorbim despre referinţa unei propoziţii, dar el argumentează că trebuie să procedăm astfel din următorul motiv. O propoziţie inteligibilă are în mod incontestabil un sens, iar acesta este gîndul pe care îl exprimă, gînd care, desigur, nu este opera subiectivă a gîndirii celui ce vorbeşte sau ascultă, ci este conţinutul ei obiectiv, care poate fi gîndit de mai mulţi. Dar printre propoziţiile inteligibile există unele propoziţii care conţin desemnări ce nu au o referire, sau în orice caz desemnări pentru care nu putem garanta o referinţă. Să considerăm, de exemplu, propoziţia „Odiseu a fost aruncat la ţărmul Ithacăi pe cînd dormea". Atîta timp cît ne mulţumim să tratăm această propoziţie ca o parte componentă a unei opere de artă, nu trebuie să ne intereseze dacă numele „Odiseu" are o referinţă, dar dacă îl considerăm enunţ veritabil, atunci trebuie să admitem că numele „Odiseu" desemnează ceva despre care predicatul poate fi afirmat sau negat. Dar gîndul rămîne acelaşi, indiferent dacă „Odiseu" are referinţă sau nu, şi astfel cerinţa pe care am pus-o în al doilea caz pentru referinţă ca şi pentru sens trebuie să fie legată într-un fel sau altul de căutarea adevărului. După Frege, ea indică faptul că ne aşteptăm ca propoziţia ca întreg să aibă o referinţă, şi anume valoarea ei de adevăr, sau împrejurarea că propoziţia este adevărată sau falsă. Pe scurt, „fiecare propoziţie declarativă în care intră în joc referinţa cuvintelor trebuie deci să fie concepută ca un nume propriu; şi anume referinţa ei, dacă există, este Adevăratul sau Falsul"[9].

În *Begriffsschrift*, Frege sugerase că linia judecăţii ar putea fi luată ca echivalentă predicatului comun al tuturor judecăţilor, şi anume „... este un fapt". Acum însă el respinge această idee.

„Putem spune chiar direct: «Gîndul că 5 este un număr prim este adevărat». În cazul unei examinări mai atente se poate observa însă că în felul acesta nu s-a spus nimic mai mult decît în propoziţia simplă «5 este un număr prim». Asertarea adevărului rezidă în ambele cazuri în forma propoziţiei enunţate, chiar şi atunci cînd ea nu posedă puterea ei obişnuită; de exemplu, rostită de un artist pe scenă, propoziţia «Gîndul că 5 este un număr prim este adevărat» conţine un gînd, şi anume acelaşi gînd ca şi simpla propoziţie «5 este un număr prim». De aici, se poate conchide că relaţia gîndului faţă

[9] *Über Sinn und Bedeutung*, p. 34. (Compară şi traducerea, diferită de a noastră, din *Sens şi semnificaţie*, în *Logică şi Filozofie*, Editura politică, 1966, p. 62 — Nota trad.).

de adevăr nu poate fi comparată cu cea a subiectului față de predicat ... O valoare de adevăr poate fi o parte a unui gînd la fel de puțin ca și Soarele, deoarece aici nu avem de-a face cu un sens, ci cu un obiect."[10]

Dar o valoare de adevăr, argumentează el, poate fi referința unei propoziții. Într-adevăr, este evident că valoarea de adevăr depinde de referințele părților propoziției și că ea rămîne neschimbată cînd oricare dintre acești componenți este înlocuit printr-o altă expresie avînd aceeași referință. Așa cum spunea Leibniz, „eadem sunt quae sibi mutuo substitui possunt salva veritate". Într-adevăr, „ce altceva s-ar mai putea oare găsi, în afara valorii de adevăr, care să aparțină propoziției în mod universal, să depindă cumva de referința părților componente și să nu se schimbe în cazul unei substituții de felul indicat?"[11].

Toate acestea se aplică însă numai propozițiilor complete, întrebuințate în modul obișnuit. Cînd o formă verbală care ar putea fi utilizată pentru emiterea unui enunț apare ca o propoziție subordonată după „ a spune" sau „a crede", sau după un alt verb de același fel, situația se schimbă. Într-adevăr, acum această formă se referă la ceea ce în contextul vorbirii directe ar constitui sensul ei. Să considerăm, de exemplu, propoziția compusă „Copernic credea că orbitele planetelor sînt cercuri". Evident, adevărul întregului nu se schimbă dacă după „că" substituim o altă expresie a aceluiași gînd. Dar valoarea de adevăr a întregului nu ar rămîne în mod necesar neschimbată dacă după „că" am substitui o formă verbală care ar exprima un gînd diferit, dar ar avea întîmplător aceeași valoare de adevăr ca și enunțul „Orbitele planetelor sînt cercuri". Într-adevăr, adevărul sau falsitatea enunțului despre Copernic nu depinde de adevărul sau falsitatea a ceea ce, după cum se afirmă, credea Copernic, ci depinde numai de faptul dacă el credea sau nu credea în ceea ce este desemnat de propoziția subordonată; or, după Frege, această din urmă propoziție desemnează un gînd.

Trebuie admis însă că în anumite împrejurări o expresie se poate referi la o valoare de adevăr tot atît de bine ca la un gînd. Aceasta se întîmplă cînd cineva spune: „Copernic credea pe drept cuvînt că orbitele planetelor sînt circulare"; atunci cuvintele care urmează lui „că" sînt folosite de fapt de două ori, o dată ca o propoziție subordonată și o dată ca o propoziție independentă. Dealtfel, doctrina mai cuprinde și alte complicații. Într-adevăr, dacă, așa cum susține Frege, nici un nume nu poate avea referință fără să aibă sens, atunci chiar

[10] *Ibid.*, p. 34—35 (vezi și *Logică și filozofie*, p. 63).

[11] *Ibid.*, p. 35. Frege pare să citeze din memorie începutul din *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis*, unde Leibniz scria „Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate", *Philosophische Schriften* (ed. Gerhardt) VII, p. 228.

și o propoziție subordonată care funcționează exclusiv în această calitate trebuie să exprime ceva distinct de gîndul pe care îl desemnează; dar în teoria lui Frege nu există nimic care să indice ce poate fi acest lucru desemnat. S-ar putea ca Frege să fi ignorat dificultatea menționată din cauză că propozițiile subordonate de felul celor considerate, adică propozițiile subiective, nu apar în formulele logice din *Grundgesetze*; oricum ar fi, nu avem de ce să discutăm în continuare, în acest context, această dificultate.

Deși Frege a extins în mod destul de surprinzător accepția expresiei „nume propriu", el nu urmărea să susțină că toate semnele ar fi de același gen. Dimpotrivă, el a insistat cu tărie asupra unei distincții între numele proprii și numele — sau semnele — funcțiilor, iar la acest stadiu el înțelegea prin semn al unei funcții ceea ce anterior numise funcție, adică înțelegea o expresie „incompletă" sau „nesaturată", care poate fi completată prin unul sau mai multe nume proprii, pentru a alcătui astfel un nou nume propriu. De exemplu, „$(\ )^2$" și „Tatăl lui ..." sînt semne funcționale în cadrul cărora locurile libere sînt indicate prin paranteze necompletate și puncte. Dar, pentru comoditatea expunerii, Frege introduce o convenție nouă, prin care locurile libere vor fi indicate prin litere grecești mici. Spre deosebire de celelalte litere ale scrierii sale, acestea nu trebuie înțelese ca abrevieri sau ca părți ale unei notații a universalității, ci pur și simplu ca semne indicatoare prin care păstrăm locuri deschise pentru semnele de argument veritabile. De exemplu, trebuie scris „tg ξ este o funcție trigonometrică" atunci cînd vorbim despre funcție ca distinctă de valorile ei, deși putem scrie „$\text{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$", cînd vrem să spunem că pentru orice argument al funcției, valoarea lui tg ξ este identică cu raportul dintre valoarea lui sin ξ pentru același argument și valoarea lui cos ξ pentru același argument. Motivul pentru care se insistă asupra acestui mod de scriere este că se urmărește să se arate clar că funcția însăși este o entitate incompletă sau nesaturată. Uneori, matematicienii folosesc cuvîntul „funcție" cînd ar fi mai potrivit să vorbească fie despre un semn funcțional, fie despre o valoare a funcției; dar lucrurile simbolizate nu trebuie niciodată confundate cu simbolurile, iar în rîndul lucrurilor, funcțiile simbolizate nu trebuie niciodată confundate cu obiectele, căci, conform accepției conferite de Frege, printre obiecte se includ toate lucrurile care nu sînt funcții, adică se includ nu numai bețe, pietre și oameni, ci și numere sau valori de adevăr. La întrebarea „ce este o funcție?" el răspunde că esența funcției trebuie căutată într-o anumită conexiune sau coordonare între obiectele care sînt argumentele funcției și obiectele care sînt valorile corespunzătoare ale funcției. Frege are însă o terminologie

specială pentru funcțiile ale căror valori, potrivit teoriei sale, sînt valori de adevăr. Astfel, funcția reprezentată prin semnul „ξ este un om" este caracterizată adesea ca fiind conceptul „om" sau ca fiind conceptul *Om*, iar despre funcția cu două locuri de argumente reprezentată prin semnul „ξ este tatăl lui ζ" spunem că este o relație.

Cînd Frege vorbește despre o funcție în scrierile sale de după *Begriffsschrift*, el înțelege prin aceasta întotdeauna ceva independent de gîndire și limbaj. El nu folosește cuvîntul „concept" ca termen psihologic; deși introduce noțiunea generală de funcție vorbind mai întîi despre semne funcționale, el privește această procedură ca un simplu artificiu de expunere. Cu toate acestea, el admite în mai multe ocazii că întîmpină dificultăți serioase cînd încearcă să expună clar ce vrea să spună. De exemplu, el afirmă:

„În cercetările logice avem adesea nevoie să enunțăm ceva despre un concept și să exprimăm aceasta în forma uzuală pentru atare enunțuri, adică să facem ca ceea ce se enunță să fie conținutul predicatului gramatical. În consecință, ne-am aștepta ca referința subiectului gramatical să fie conceptul; dar acesta, dată fiind natura sa predicativă, nu poate apărea ca atare în acest rol, ci trebuie mai întîi să fie transformat într-un obiect sau, mai precis, trebuie reprezentat printr-un obiect ..."[12].

De asemenea:

„Dintr-o anumită necesitate de ordin lingvistic, expresia mea, luată literal, îmi trădează gîndul, întrucît numesc un obiect acolo unde este vizat un concept ... S-ar putea crede că această dificultate ar fi creată în mod artificial ... și că s-ar putea ... să considerăm căderea unui obiect sub un concept ca o relație în care unul și același lucru poate apărea o dată în calitate de obiect iar altă dată în calitate de concept. Cuvintele „obiect" și „concept" ar servi atunci numai pentru a indica diferitele poziții în cadrul relației. Lucrul poate fi făcut; dar dacă cineva își închipuie că în felul acesta poate evita dificultatea, se înșală. Dificultatea este numai deplasată; căci, nu toate părțile unui gînd pot fi completate, ci cel puțin una trebuie să fie într-un fel sau altul nesaturată sau predicativă; în caz contrar, ele nu ar adera între ele ... Aceeași dificultate pe care încercam să o evităm în cazul conceptului apare și la relație"[13].

Unele din aceste observații ar putea sugera că dificultatea este caracteristică pentru referirile la funcții de genul celor numite concepte și relații, dar Frege continuă prin a spune că aceeași neplăcere survine în orice încercare de a explica limpede noțiunea de funcție așa cum este utilizată ea în analiza matematică. Atunci cînd trebuie să analizăm ceea ce este esențialmente incomplet sau nesaturat[14], nu putem evita o anumită inadecvare a expresiei lingvistice.

Filosoful se găsește pus într-o situație foarte jenantă cînd se vede constrîns să afirme că gîndul său nu poate fi exprimat adecvat, și vom arăta că dificultatea în care se află pus Frege se datorează unui

---

[12] *Über Begriff und Gegenstand*, p. 197.

[13] *Ibid.*, pp. 204—205.

[14] A se vedea ideea stoică despre predicat ca *lekton* incomplet.

defect serios al teoriei sale asupra limbajului. Este însă interesant să vedem cum încearcă Frege să evite unele dificultăți ale referirii la o funcție $\Phi(\xi)$, vorbind în loc de funcție despre domeniul sau intervalul ei de valori (*Wertverlauf*) $\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$. În această nouă notație, vocala greacă mică între paranteze marchează un loc de argument, ca de obicei, dar vocala corespunzătoare ce apare în față cu spirit moale deasupra operează, după cum este convenit, astfel încît să facă din întreg un nume al unui *obiect*. Din păcate, nu este ușor de înțeles exact ce este acest obiect. Cînd introduce pentru prima dată noțiunea, Frege consideră o funcție matematică simplă $\xi^2 - 4\xi$ și observă că modul în care diversele valori posibile ale acestei funcții sînt asociate cu diferite argumente posibile poate fi reprezentat de o curbă pe o hîrtie milimetrică[15]. Întrucît funcția $\xi(\xi - 4)$ are întotdeauna aceeași valoare pentru același argument ca și funcția $\xi^2 - 4\xi$, ea determină în mod evident aceeași curbă și Frege declară că el va exprima această stare de lucruri spunînd că cele două funcții au același domeniu de valori. În general, oricare ar fi $\Phi(\xi)$ și $\Psi(\xi)$, enunțul că $\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\varepsilon}\,\Psi(\varepsilon)$ trebuie înțeles ca avînd aceeași referință ca și enunțul că $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} - \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$, deși primul enunț este un enunț singular de identitate între două obiecte, în timp ce al doilea este un enunț universal care spune că valoarea unei funcții este identică cu valoarea celeilalte funcții, pentru oricare argument dat. Pe baza acestei explicații, ar fi firesc să conchidem că un domeniu sau un parcurs de valori este, ca să spunem așa, extensiunea unei funcții. Într-adevăr, dacă concepem o funcție ca ceva ce corelează obiecte, și anume corelează obiectele care sînt argumentele sale cu obiectele care sînt valorile sale, am putea concepe cumva corelația completată luată în sine ca fiind un nou obiect, și anume o mulțime de perechi ordonate. Or, Frege utilizează într-adevăr cuvîntul „extensiune" *(Umfang)* în această ordine de idei, dar nu exact așa cum am sugerat. El ne spune că pentru un concept (adică pentru o funcție de un argument ale cărei valori sînt numai valori de adevăr) domeniul este extensiunea în sensul uzual al logicienilor, adică este mulțimea tuturor obiectelor care cad sub acest concept. În cazul altor funcții, Frege indică domeniile respective acolo unde ele sînt introduse, motivînd acest mod de a opera de la caz la caz, prin faptul că condiția fundamentală pentru recunoașterea identății a două domenii nu este în sine suficientă pentru determinarea esenței unui domeniu. Așadar, să nu căutăm în terminologia lui Frege

---

[15] *Über Funktion und Begriff*, p. 9.

profunzime acolo unde nu e. Atunci cînd Frege vorbeşte despre fixarea domeniului sau parcursului valorilor, pe el îl interesează în mod special descoperirea unui *obiect* care poate reprezenta în anumite privinţe toate funcţiile care iau aceleaşi valori pentru aceleaşi argumente, iar în cadrul impus de această condiţie el consideră că alegerea unui obiect sau a altuia este o chestiune de comoditate.

Oricum ar fi, obiectul pe care Frege îl numeşte domeniu de valori nu trebuie confundat, desigur, cu mulţimea valorilor pe care funcţia le poate lua pentru diverse argumente. Aceasta reiese din faptul că un concept poate lua ca valoare numai o anumită valoare de adevăr, în timp ce domeniul ei, după Frege, este mulţimea obiectelor care cad sub concept. De asemenea, domeniul unei funcţii, aşa cum îl înţelege Frege, nu trebuie confundat cu mulţimea tuturor argumentelor posibile care pot fi plasate în locul pentru argument din cadrul semnului funcţional. Într-adevăr, potrivit concepţiei lui Frege, *orice* obiect trebuie considerat drept un argument posibil al funcţiei reprezentate de semnul respectiv. Aşadar propoziţia „2 este un om" are sens, şi putem spune despre ea, în cel mai rău caz, că desemnează falsul. Frege susţine chiar că o funcţie matematică cum este $\xi + 1$, trebuie definită astfel încît să admită şi alte argumente în afara numerelor. Desigur, Frege admite că nu vede nici o utilizare pentru o expresie cum este „Soarele + 1", dar subliniază că într-un limbaj logic perfect trebuie să asigurăm o referinţă a acestei expresii, căci în caz contrar, concepte ca $\xi + 1 = 10$ nu vor fi definite precis, şi legi logice ca principiul terţului exclus nu se vor aplica la aceste expresii în mod riguros. Este relativ indiferent care anume regulă o vom stipula pentru cazurile ieşite din comun, dar noi trebuie să le plasăm într-un anumit cadru, pentru a garanta că conceptele noastre sînt bine definite şi că orice nume propriu are o referinţă. O aplicare interesantă a acestui principiu poate fi găsită în analiza pe care o face Frege semnului introdus de el ca un substitut pentru articolul hotărît din vorbirea obişnuită.

Una din întrebuinţările importante ale articolului hotărît este folosirea lui pentru construirea unor descripţii ca „Omul care a descoperit orbitele eliptice ale planetelor", şi tocmai această utilizare îl interesează pe Frege. În teoria sa despre sens şi referinţă, Frege recunoaşte că rostirea unei atare expresii presupune existenţa unui lucru şi numai a unuia care cade sub un anumit concept, dar refuză să spună că cel ce rosteşte expresia ar aserta şi această presupunere. Or, ţinînd seama de ceea ce urmăreşte Frege, nu este suficient ca o expresie care funcţionează ca un nume propriu să aibă referinţă doar atunci cînd există un singur lucru care cade sub un anumit concept; de aceea, Frege introduce o funcţie $\backslash\, \xi$, definită prin următoarele sti-

pulări: (I) pentru orice argument identic cu un domeniu $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Delta)$, unde Δ este un obiect, valoarea funcției este Δ; (II) pentru orice argument care nu satisface această condiție, valoarea funcției coincide cu argumentul. Dintre aceste două cazuri, cel care corespunde întrebuințării obișnuite a articolului hotărît este primul caz. Să presupunem, într-adevăr, că $\Phi(\xi)$ este un concept sub care cade un obiect și numai unul Δ. Atunci, evident, valoarea lui $\Phi(\xi)$ pentru un argument oarecare este identică cu valoarea funcției $\xi = \Delta$ pentru același argument. Dar aceasta ne dă dreptul să afirmăm că $\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Delta)$, și astfel avem rezultatul dorit

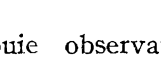
$$|\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = |\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Delta) = \Delta,$$

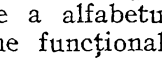
adică $|\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$ este unicul membru al lui $\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$ dacă aceasta din urmă este ceea ce logicienii de mai tîrziu au numit clasă-unitate. Pentru menținerea principiului terțului exclus, este necesar însă să asigurăm o referință pentru „$|\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$" în cazul cînd $\Phi(\xi)$ nu este o funcție sub care cade un obiect și numai unul, iar acest obiectiv este obținut prin a doua stipulare. Căci, întrucît *ex hypothesi* nu există nici un Δ astfel încît $\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Delta)$, avem $|\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\alpha}\Phi(\alpha)$. Așadar, dacă limba noastră ar fi reformată în conformitate cu legislația lui Frege pentru propria lui scriere, o persoană care ar afirma: „Regele Franței este pleșuv", ar putea fi acuzată că face un enunț fals. Căci, deși *nu* am putea spune că el afirmă implicit că există un rege și numai unul al Franței, am putea spune că el face o observație care în împrejurările politice actuale echivalează cu „Clasa regilor Franței este pleșuvă"; iar această din urmă afirmație (care, fără îndoială, trebuie distinsă de „Regii Franței sînt pleșuvi") este desigur neadevărată, potrivit concepției lui Frege, indiferent dacă există sau nu regi ai Franței.

3. *Logica din „Grundgesetze"*

Dezvoltînd noțiunea sa de funcție în întreaga ei generalitate, Frege o ia ca bază în expunerea logicii sale și noul program implică o reinterpretare a semnelor pe care le introdusese în lucrarea sa *Begriffsschrift*. Desigur, potrivit noii sale concepții, linia judecății nu este un semn funcțional, deoarece nu mai poate fi interpretată ca o abreviere pentru predicatul „este un fapt"; dar mai există un sens în care se poate spune că acest semn este în afara logicii. Scopul său, într-adevăr, este pur și simplu să arate ceea ce asertează autorul; iar logica nu se ocupă de asertare, ci de ceea ce poate fi asertat. Gramatica sistemului reclamă însă ca linia judecății să fie urmată de o orizon-

tală de felul celei ce se numea înainte o linie a conținutului, iar aceasta este, desigur, un semn funcțional. Atunci cînd argumentul său este Adevăratul, ——ξ are ca valoare Adevăratul, iar în toate celelalte cazuri Falsul. De exemplu, „——2 + 2 = 4" nu este propriu-zis un enunț, ci un nume al Adevăratului, iar ——„2 + 2 = 5" și „——2" sînt amîndouă denumiri ale Falsului. Ultimul exemplu poate să pară oarecum surprinzător, dar aici avem o altă aplicare a principiului lui Frege după care orice obiect trebuie considerat ca un argument posibil al oricărei funcții dacă din punct de vedere gramatical este posibil să plasăm numele lui în locul pentru argument al semnului funcțional. Frege însuși nu vorbește, în această ordine de idei, despre o posibilitate gramaticală, dar necesitatea acestei noțiuni se poate întrevedea analizînd cele două semne funcționale care apar imediat după aceea în construcția sistemului său, și anume linia negației și linia condiției. Ambele aceste semne prezintă particularitatea că nu pot să apară decît în conexiune cu orizontalele, încît funcțiile pe care le reprezintă pot admite ca argumente numai valori de adevăr. Întrucît valorile proprii ale acestor funcții sînt și ele valori de adevăr, ele sînt, ca să spunem așa, funcții de la valori de adevăr la valori de adevăr, așa cum ξ^2 este o funcție de la numere la numere; din acest motiv, ele au fost numite uneori de către logicienii de mai tîrziu funcții de adevăr. Pe de altă parte, $\xi = \zeta$ este o funcție care poate lua ca argumente obiecte de orice fel.

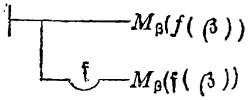
Pînă acum am menționat numai funcții care iau ca argumente unul sau mai multe obiecte; Frege recunoaște însă că pot exista funcții de nivelul doi, sau funcții de funcții, și citează ca exemple  și $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$.

Trebuie observat că denumind aceste funcții, el indică locul argumentului prin intermediul unei litere grecești mici din acea parte a alfabetului care este de obicei rezervată abrevierilor de semne funcționale. Un alt exemplu de funcție de nivel doi este  , funcție numită uneori existență, dar care s-ar numi mai propriu posesia unui caz sau însușirea de a avea Adevăratul ca valoare pentru cel puțin un argument. Încă în *Grundlagen*, Frege remarcase că argumentul ontologic al existenței lui Dumnezeu era greșit deoarece confunda un concept de nivel doi cu un concept de nivel unu pe care l-ar putea implica un alt concept de nivel unu, ca o notă sau trăsătură a acestuia din urmă[16]. Pentru aprecierea justeței

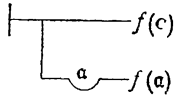
[16] *Gl.*, § 53.

acestei critici, ajunge să ne gîndim numai la faptul că Descartes încerca să-şi argumenteze concepţia spunînd că divinitatea implică în mod necesar existenţa tot aşa cum triunghiularitatea implică în mod necesar proprietatea de a avea suma unghiurilor interne egală cu două unghiuri drepte.

Dar abia cînd a scris *Grundgesetze,* Frege a elaborat o notaţie adecvată pentru a vorbi în general despre funcţii de nivel doi. Şi anume:



pentru: „fiecare funcţie de nivel doi care este valabilă pentru toate funcţiile de nivel unu de un singur argument este valabilă pentru orice funcţie de nivel unu de un singur argument". Această formulă corespunde, desigur, axiomei:



pe care o enunţase în *Begriffsschrift* pentru funcţiile de nivelul unu, dar aici expresia este mai complicată deoarece trebuie să asigure nu numai o distincţie a funcţiilor după nivel, ci şi o distincţie între funcţii după numărul argumentelor lor. Litera grecească mică dintre parantezele interioare serveşte ca de obicei pentru indicarea unui loc de argument, şi apariţia ei aici este importantă deoarece arată că funcţiile de nivel unu, pe care le considerăm acum ca argumente, sînt de aşa natură încît ele însele au numai un singur argument. Majuscula cursivă „*M*" este o variabilă liberă care indică faptul că vorbim despre funcţii de nivel doi, iar indicele inferior serveşte pentru arătarea faptului că funcţiile în cauză sînt de aşa natură încît angajează funcţii de nivel unu de un singur argument. Dacă am dori să generalizăm cu privire la proprietăţile de nivel doi (cum este tranzitivitatea) care pot să revină numai la relaţii între doi termeni (adică la funcţii cu două argumente ale căror valori sînt întotdeauna valori de adevăr), va trebui să scriem două litere greceşti mici între parantezele interioare şi să atribuim doi indici majusculei cursive. Dar cu aceasta complicaţiile nu se termină; ele apar de la sine cînd începem să discutăm funcţiile de funcţii. Într-adevăr, putem considera $\overset{\mathfrak{f}}{\frown}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ şi $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$ ca funcţii de nivel trei, încercînd apoi să ela-

borăm o notaţie pentru a vorbi despre toate aceste funcţii. Sau, de asemenea, putem să considerăm funcţii de nivel inegal, cum este aceea de a cădea sub un concept. Frege notează aceste posibilităţi, dar nu le discută în detaliu. Este într-adevăr clar că lui îi displace pînă şi complicaţia implicată în simbolismul său pentru enunţurile universale referitoare la funcţii de nivel doi de funcţii de nivel unu de un singur argument. Într-adevăr, el nu utilizează decît o singură dată axioma specială enunţată mai sus şi se felicită pentru faptul că a fost în stare să evite alte complicaţii, vorbind despre parcursurile valorilor şi nu despre funcţiile care le determină[17].

Pentru Frege, introducerea notaţiei sale pentru parcursuri a constituit cea mai importantă inovaţie făcută în *Grundgesetze*, deoarece aceasta îl elibera de inconvenientele referirii la funcţii de niveluri diverse şi îi permitea să spună ceea ce voia să spună fără referire la obiecte[18]. Desigur, majoritatea obiectelor la care se referă nu sînt perceptibile dar, spre deosebire de funcţii, toate obiectele sînt entităţi *complete*, iar după Frege presupunerea că nu pot fi alte obiecte decît cele pe care le vedem sau le pipăim este doar o slăbiciune omenească.

Pentru a trage toate foloasele din notaţia sa pentru intervale, el găseşte însă necesar să introducă o altă funcţie, avînd următoarea definiţie:

$$\text{"}\Vdash \backslash \grave{\alpha}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \\ \quad\quad\quad\quad \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \quad\quad\quad\quad u = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = a \cap u.\text{"}$$

Ca întotdeauna în definiţiile lui Frege, *definiendum*-ul apare aici în partea dreaptă şi, întrucît este un semn funcţional cu două locuri de argumente, este scris cu două litere cursive care figurează şi în partea stîngă. Exprimat în cuvinte, efectul lor este să asigure (I) că pentru orice obiect Δ şi orice funcţie $\Phi(\xi)$, expresia „$\Delta \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" va avea aceeaşi referinţă ca „$\Phi(\Delta)$" şi (II) că pentru orice obiect Δ şi orice obiect Γ care nu este un parcurs, expresia $\Delta \cap \Gamma$ va fi o denumire pentru clasa nulă. Aşadar, dacă trecem cu vederea a doua stipulare, care reprezintă doar o prevedere pentru cazuri supărătoare, expresia „$\xi \cap \zeta$" corespunde destul de îndeaproape expresiei „ξ este un membru al lui ζ". Trebuie însă să avem grijă să nu le identificăm, deoarece în schema lui Frege funcţia $\Phi(\xi)$ nu este neapărat un concept. De exemplu, ea poate fi funcţia numerică ξ^2, în care caz $3 \cap \grave{\varepsilon}(\varepsilon^2) = 3^2$. Sau, de asemenea, poate fi funcţia

[17] *Gg.*, I, § 25.
[18] *Gg.*, I, §§ 9 şi 25.

$\grave{\varepsilon}(\xi > \varepsilon)$ ale cărei valori sînt ele însele domenii, în care caz unul din argumentele noii funcţii va fi un *dublu* domeniu de valori, să spunem $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha > \varepsilon)$. Al doilea din aceste exemple este deosebit de important, deoarece Frege întrebuinţează noua sa notaţie ca un mod de exprimare a relaţiilor. Căci

$$3 \cap \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha > \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(3 > \varepsilon)$$

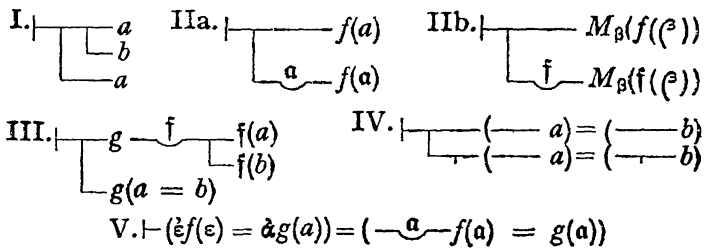
şi astfel

$$\begin{aligned} 2 \cap (3 \cap \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha > \varepsilon)) &= 2 \cap \grave{\varepsilon}(3 > \varepsilon) \\ &= 3 > 2. \end{aligned}$$

Evident, nu avem nimic de cîştigat din acest mod de scriere într-un caz atît de simplu ca cel pe care l-am ales pentru ilustrare, dar se pare că el oferă marele avantaj al simplităţii în cazurile cînd alte moduri de scriere ar presupune aplicarea cuantorilor la funcţii relaţionale de nivel mai înalt, şi din acest motiv Frege îl utilizează pe scară largă în dezvoltarea ulterioară a sistemului său.

Pentru aceea ce urmărim acum,. nu este necesar să considerăm detaliile structurii edificate de Frege pe temelia pe care am descris-o, dar axiomele şi regulile în care el formulează logica lui *Grundgesetze* merită să fie consemnate.

Ca axiome sau legi fundamentale, Frege stabileşte următoarele şapte aserţiuni[19]:



Trebuie să observăm că, în afară de linia orizontală, cerută pentru exprimarea oricărei aserţiuni în cadrul scrierii, toate celelalte semne de bază au cîte o singură axiomă, care determină folosirea lor, şi că ordinea introducerii este, se pare, după complexitatea crescîndă. Astfel, IV apare acolo unde apare, deoarece Frege consideră acum potrivit să fixeze semnificaţia liniei negaţiei prin intermediul semnului identităţii introdus în III. Dar el nu pune nici un accent special pe acest aranjament şi singura axiomă pe care o comentează mai

[19] *Gg.*, I, § 47.

amplu este V. Despre aceasta el observă că trebuie acceptată ca o lege distinctă a logicii deoarece este esențială pentru dezvoltarea sistemului său și nu poate fi dedusă din alte legi de bază. Cînd logicienii vorbesc despre extensiunile conceptelor, ei presupun întotdeauna această lege, deși de obicei nu în mod explicit. Legea are o importanță fundamentală în orice încercare de construire a unui calcul al logicii în maniera lui Leibniz sau Boole și este tot atît de importantă în expunerea fundamentelor aritmeticii, deoarece numerele de toate tipurile, chiar și numerele naturale, trebuie definite ca extensiuni de concepte[20].

În afară de mijloacele pentru funcții, despre care nu se face mențiune în *Begriffsschrift,* acest sistem de axiome pentru logică diferă de sistemul anterior al lui Frege prin faptul că nu este destinat să fie utilizat împreună cu *modus ponens* și principiul substituției ca unicele reguli de inferență. Din considerente practice de convenabilitate și conciziune în efectuarea deducțiilor, Frege înlocuiește acum unele axiome anterioare și chiar unele din teoremele sale prin noi reguli de inferență. Dar el prezintă aceste din urmă reguli ca elemente ale unei colecții generale de reguli pentru utilizarea scrierii sale; pentru a arăta cît de exactă este gîndirea sa, vom rezuma toate aceste reguli, exceptînd ultimile șase, care sînt simple convenții cu privire la folosirea parantezelor[21]. În cele ce urmează, cuvîntul „enunț" trebuie înțeles ca referindu-se întotdeauna la un enunț al sistemului (adică la o axiomă sau o teoremă dedusă din axiome), expresiile „clauză inferioară" și „clauză superioară" ca referindu-se la o condiție și, respectiv, la ceea ce este astfel condiționat, iar expresia „schemă cu litere cursive" ca referindu-se la o expresie ce conține una sau mai multe litere cursive și poate fi transformată într-un nume (desemnînd sau un obiect, sau o funcție, după cum este cazul) prin substituții adecvate pentru aceste litere.

1. *Amalgamarea orizontalelor.* Orizontalele legate de linia negației, linia condiției și cuantorul universal pot fi amalgamate între ele sau cu o orizontală simplă de pe același rînd.

2. *Rearanjarea condițiilor.* Ordinea clauzelor inferioare ale unui enunț poate fi schimbată în mod arbitrar.

2. *Contrapoziția.* O clauză inferioară și o clauză superioară își pot schimba întotdeauna locurile dacă valorile de adevăr ale ambelor sînt modificate în același timp (adică prin negație).

4. *Amalgamarea condițiilor similare.* O clauză inferioară care apare de mai multe ori în același enunț nu trebuie scrisă decît o singură dată.

5. *Înlocuirea unei litere cursive printr-o literă gotică.* O literă cursivă poate fi înlocuită într-un enunț în care apare prin una și aceeași literă gotică — cu alte cuvinte o literă de

[20] *Gg.*, I, § 9.
[21] *Gg.*, I, § 48.

obiecte printr-o literă de obiecte și o literă de funcții printr-o literă de funcții, cu singura condiție ca litera gotică să fie introdusă în același timp într-o concavitate dinaintea unei clauze superioare în afara căreia litera cursivă respectivă nu figura. Dacă însă această clauză superioară conține întregul domeniu de acțiune al unei litere gotice iar litera cursivă figura înăuntrul acelui domeniu de acțiune, atunci noua literă gotică aleasă trebuie să difere de cea veche.

6. *Inferență* (a). Dacă un enunț are o clauză inferioară care se deosebește de un alt enunț numai prin absența liniei judecății, putem afirma în calitate de concluzie enunțul care rezultă din primul prin suprimarea clauzei inferioare.

7. *Inferență* (b). Dacă una și aceeași alăturare de semne (nume proprii sau schemă de obiecte cu litere cursive) intră într-un enunț în calitate de clauză superioară iar în alt enunț ca o clauză inferioară, putem aserta ca concluzie un enunț care are drept clauză superioară clauza superioară a celui de-al doilea, iar ca clauze inferioare toate clauzele inferioare ale ambelor enunțuri, cu excepția celei deja menționate. În această tranziție, clauzele inferioare similare se pot amalgama conform regulii (4).

8. *Inferență* (c). Dacă două enunțuri au aceeași clauză superioară și o clauză inferioară a unuia diferă de o clauză inferioară a celuilalt numai prin faptul că înaintea sa stă o linie a negației, putem aserta în calitate de concluzie un enunț care are ca clauză superioară clauza superioară a ambelor și are ca clauze inferioare toate clauzele inferioare ale ambelor enunțuri, cu excepția celor două menționate mai sus.

9. *Citarea enunțurilor cu substituție pentru litere cursive.* Cînd cităm un enunț, putem în același timp să efectuăm o inferență simplă fie prin substituirea aceluiași nume propriu sau a aceleiași scheme de obiecte cu litere cursive pretutindeni unde apare o anumită literă de obiecte cursivă, fie prin substituirea aceluiași nume al unei funcții sau scheme de funcție cursive pretutindeni unde apare o anumită literă de funcție cursivă, cu singura condiție ca în acest din urmă caz să păstrăm nivelul și numărul argumentelor funcției pe care o indica litera de funcție cursivă inițială.

10. *Citarea enunțurilor cu înlocuirea literelor gotice.* Cînd cităm un enunț, putem înlocui o literă gotică într-o concavitate și în toate locurile de argumente ale funcției respective printr-o altă literă gotică de același fel (adică printr-o literă de obiecte sau o literă de funcții, după cum este cazul), cu singura condiție ca să nu abolim prin aceasta nici o deosebire de litere în enunțul inițial acolo unde domeniul de acțiune al unei litere conținea domeniul de acțiune al alteia iar prima literă figura în domeniul de acțiune al celei de a doua.

11. *Citarea enunțurilor cu înlocuire a vocalelor grecești.* Cînd cităm un enunț, putem înlocui o vocală grecească de sub un spirit moale precum și în toate locurile de argumente ale funcției respective printr-o altă vocală grecească, supusă aceleiași condiții ca și în regula precedentă.

12. *Citarea definițiilor.* Cînd cităm o definiție, putem înlocui linia definiției prin linia judecății, efectuînd totodată modificările permise în citarea enunțurilor, conform ultimelor trei reguli.

După Frege, toate adevărurile aritmeticii sînt deductibile din axiomele sale, prin aplicarea regulilor sale. Este însă evident că aritmetica tratează noțiuni, în special cea de număr, pentru care nu avem expresii simple din rîndul semnelor de bază ale lui Frege. De aceea, o condiție esențială a succesului demersului său era să se arate modul în care aceste noțiuni se pot defini prin complexe de semne de bază, iar din motive de claritate s-ar cere să se construiască un șir de definiții în care fiecare element ulterior le presupune pe cele anterioare. Este însă binecunoscut faptul că în construirea definițiilor ca și a inferen-

ţelor pot fi comise erori; de aceea, Frege, îngrijindu-se, ca de obicei, de rigoare, încearcă să preîntîmpine acest pericol stabilind şapte principii, care trebuie respectate ori de cîte ori în sistemul său sînt introduse prin definiţie expresii noi[22]. Trei dintre aceste principii sînt foarte generale, iar celelalte patru privesc diverse cazuri speciale care apar în sistemul său. Din nou vom rezuma:

1. Orice nume construit corect pe baza numelor definite trebuie să aibă un referent, căci în caz contrar ar rămîne nedeterminate problemele privind aplicabilitatea semnelor.

2. Nu este permis ca unul şi acelaşi semn să fie definit în două moduri diferite, deoarece în caz contrar s-ar putea ridica problema dacă cele două definiţii concordă.

3. Un nume definit trebuie să fie simplu, adică să nu fie compus din alte nume, deoarece în caz contrar concordanţa explicaţiilor acestor nume ar putea fi pusă sub semnul întrebării.

4. Un nume propriu introdus printr-o definiţie trebuie să fie înlocuibil pretutindeni unde apare prin definiens; nu este permis niciodată să fie utilizat ca un nume al unei funcţii, deoarece de la această întrebuinţare nu putem reveni la numele de bază.

5. Un nume introdus pentru o funcţie de nivel unu de un singur argument trebuie să conţină un singur loc de argument, căci dacă ar avea mai multe locuri de argument, ele ar putea fi completate în mod diferit, ceea ce ar avea ca rezultat faptul că numele ar ajunge să reprezinte o funcţie de mai multe argumente. În definiţie, toate locurile de argument ale definiens-ului trebuie completate cu una şi aceeaşi literă cursivă, care trebuie întrebuinţată şi pentru a indica locul de argument al definiendum-ului.

6. În mod similar, un nume introdus pentru o funcţie de nivel unu de două argumente trebuie să conţină două şi numai două locuri de argumente. În definiţie, toate locurile pentru argumente înrudite ale definiendum-ului trebuie completate cu una şi aceeaşi literă cursivă, care urmează să fie utilizată şi pentru a indica unul din cele două locuri de argument ale definiendum-ului; locurile pentru argumente neînrudite trebuie completate cu litere diferite.*

7. Rezultă că o definiţie nu poate conţine niciodată în vreo parte a ei o literă cursivă care nu apare şi în cealaltă parte. Dacă substituirea unor nume proprii pentru litere cursive în definiens îl transformă pe acesta într-un nume propriu corect construit, atunci, conform convenţiilor sistemului, denumirea funcţiei care apare ca definiendum are întotdeauna o referinţă.

4. *Realizările lui Frege*

Begriffsschrift este primul sistem de logică formală cu adevărat cuprinzător. Aristotel se preocupa în principal de anumite varietăţi comune de judecăţi generale. E adevărat că el a formulat principiile non-contradicţiei şi terţului exclus, care aparţin unei părţi a logicii mai profunde decît teoria sa despre silogism; dar el nu a reuşit

[22] *Gg.*, I, § 33.

* „Atunci definiţia spune că numele propriu care apare la dreapta prin introducerea în locurile de argumente a unor nume proprii avînd referent, trebuie întotdeauna să aibă acelaşi referent cu cel care va apare în stînga, atunci cînd în locurile corespunzătoare se vor introduce aceleaşi nume proprii" (Frege, *Gg.*, I, § 33 — Nota trad.).

să-şi dea seama de necesitatea unei expuneri sistematice a logicii primare. Această expunere a fost realizată, cel puţin parţial, de către Hrisip ; dar nici acesta şi nici logicienii medievali care au scris despre *consequentiae* nu au reuşit să arate clar relaţia dintre logica primară şi logica generală. Recunoscînd paralelismul între logica primară şi anumite propoziţii ale logicii generale cu privire la atribute sau clase, Leibniz şi Boole au elaborat într-un mod abstract un calcul ce părea să acopere ambele domenii ; dar nici unul dintre aceşti autori nu a lărgit concepţia tradiţională a logicii pentru a include teoria relaţiilor. Dezvoltînd unele sugestii ale lui De Morgan, Peirce a explorat acest domeniu nou şi, la scurt timp după publicarea lui *Begriffsschrift,* a elaborat chiar în mod independent o teorie a funcţiilor, prevăzută cu o notaţie adecvată pentru exprimarea tuturor principiilor formulate de Frege ; dar el nu şi-a sistematizat niciodată ideile şi nici nu a formulat un număr de principii de bază, ca cele expuse în secţiunea precedentă. Opera lui Frege, pe de altă parte, conţine toate elementele esenţiale ale logicii moderne ; nu comitem nici o nedreptate faţă de predecesorii sau de urmaşii săi dacă spunem că anul 1879 este data cea mai importantă în istoria materiei noastre.

Dintre toate noutăţile introduse de Frege, cea mai importantă a fost utilizarea cuantorilor. În expunerea noastră cu privire la contribuţia la logică a lui Peirce, am atras deja atenţia asupra semnificaţiei acestui pas, dar este indicat ca, ajunşi aici, să subliniem încă o dată că utilizarea cuantorilor pentru legarea variabilelor este principala trăsătură distinctivă a simbolismului logicii moderne şi procedeul care o face să fie superioară nu numai limbajului obişnuit, ci şi simbolismului de tip algebric întrebuinţat de Boole. În felul acesta sîntem capabili cel puţin să înţelegem şi să prezentăm clar într-o schemă raţională simplă o mulţime de complicaţii care i-au intrigat pe logicienii din epocile anterioare şi care erau rezolvate cel mult prin teorii *ad-hoc,* cum este cea argumentelor κατὰ πρόσληψιν, cea a modalităţilor *de re* şi *de dicto,* cea despre *suppositio personalis confusa et distributiva singulata,* precum şi despre multe alte varietăţi de *suppositio,* cea a simbolului *v* al lui Boole şi cea a algebrei relativelor. Mai mult, pînă şi teoria aşa-zis simplă a celor patru speţe de enunţ categoric devine mai uşor de înţeles cînd ne dăm seama de faptul că, indiferent de ce mai poate comunica în plus, „Orice om este muritor" implică în mod necesar închiderea universală a expresiei funcţionale „dacă *x* este om, *x* este muritor". Abia după ce s-a clarificat acest lucru, devine clar şi raportul dintre logica lui Aristotel şi cea a stoicilor. Pe scurt, nu este exagerat să spunem că utilizarea cuantorilor în vederea legării variabilelor a fost una dintre cele mai mari invenţii teoretice ale secolului nouăsprezece.

Exceptînd poate *Grundlagen*, operele lui Frege nu au fost niciodată citite pe scară largă. Fără îndoială, unii oameni care au deschis cărțile sale au fost înspăimîntați de simbolismul lor. Bertrand Russell, de exemplu, mărturisește că la primul său contact cu volumul I din *Grundgesetze* el nu a reușit, tocmai din acest motiv, să sesizeze importanța cărții sau măcar să-i înțeleagă conținutul[23]. Dar aspectul rebarbativ al scrierilor sale nu poate fi considerat drept cauza unică sau cel puțin principală a faptului că logicienii au recunoscut cu întîrziere marile merite ale lui Frege. Adevărul este, după cum se pare, că Frege a prezentat prea multe noutăți dificile dintr-o dată, făcînd totodată prea puține concesii slăbiciunii omenești. Cea mai mare parte din textul german al scrierilor sale logice este clar, dar expunerea propriilor sale concepții, spre deosebire de critica la adresa concepțiilor altor autori, este foarte condensată, și un cititor nebinevoitor poate avea impresia că Frege a fost extrem de critic față de utilizarea limbajului de către alții, dar s-a făcut că nu vede natura deconcertantă a multora dintre formulările sale privitoare la valori de adevăr, funcții și intervale de valori. Ca și alți inovatori din logică, Frege a fost adesea privit ca un producător de subtilități inutile. Dar aceasta nu înseamnă că opera sa nu a avut nici o influență. Dimpotrivă, scrierile sale sînt o adevărată mină din care succesorii lui au extras, în diferite epoci, un material nou.

În perioada cînd lucra la terminarea cărții sale *Principles of Mathematics* (al cărei prim și singur volum a fost publicat în 1903), Russell a întreprins un studiu mai amănunțit al logicii lui Frege și a scris un Appendix care este poate prima recenzie favorabilă mai amplă a operei lui Frege de la *Begriffsschrift* pînă la primul volum din *Grundgesetze*. În volumul I din *Principia Mathematica*, publicat de A. N. Whitehead și B. Russell în 1910, influența lui Frege este manifestă ; pînă și acele doctrine ale lui Russell în care acesta îl contrazice pe Frege (de ex. teoria sa asupra descripțiilor și teoria tipurilor) au fost cel puțin sugerate de dificultățile din opera lui Frege. Ceva mai tîrziu, Ludwig Wittgenstein a devenit un admirator al lui Frege, cu rezultate ce pot fi văzute în diverse locuri din *Tractatus Logico-Philosophicus* (publicat pentru prima dată în 1921, ca articol în *Annalen der Naturphilosophie* ale lui Ostwald). De curînd, doctrina lui Frege despre sens și referință, care mulți ani fusese considerată a fi partea cea mai sterilă a operei sale, a fost reconsiderată în mod favorabil de către Rudolf Carnap[24] și Alonzo Church[25].

---

[23] *Principles of Mathematics*, p. VI.
[24] *Semnificație și necesitate*, în special § 8 și §§ 28—30.
[25] *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, §§ 01—04.

După cum se pare, logicienii au recunoscut meritele ideilor lui Frege numai atunci cînd ei înşişi au fost gata să discute problemele ridicate de el. Aceasta nu înseamnă că istoria logicii în secolul XX este simpla relatare a asimilării treptate a operei sale în corpul doctrinei acceptate; în fapt, au intervenit unele inovaţii foarte importante, la care Frege nu s-a gîndit niciodată. Dar realizările sale au fost atît de mari, încît o bună parte din ceea ce vine după el poate fi pus în legătură în modul cel mai adecvat cu opera sa.

În capitolul următor vom considera dezvoltările formale din logică de după Frege, deschizînd fiecare problemă cu o scurtă menţiune a poziţiei sale. Apoi vom trece la discutarea unor probleme din filosofia logicii care au fost suscitate de opera sa, şi în special probleme privitoare la sens şi referinţă. Într-un al treilea capitol vom relua istoria filosofiei matematicii, pornind de la publicarea celui de-al doilea volum din *Grundgesetze,* care conţine un *Nachwort* cu privire la descoperirea de către Russell a unei contradicţii în sistemul lui Frege.

IX

DEZVOLTĂRI FORMALE DUPĂ FREGE

1. *Varietăţi de simbolism*

Detaliile aparatului pe care l-a inventat Frege pentru prezentarea logicii sînt extrem de ingenioase. Sîntem de acord că scrierea lui este complicată, dar faptul că el utilizează caractere tipografice din diferite garnituri îi permite să deosebească diferitele roluri ale literelor pe care denumirea tehnică de „variabilă" le confundă adesea ; insistenţa sa în ce priveşte demarcarea dintre utilizarea şi menţionarea simbolurilor este demnă de admirat. În această secţiune vom examina schimbările care s-au efectuat după el şi pînă în zilele noastre în vederea unei mai mari simplităţi şi clarităţi. În acest sens, este convenabil să începem cu convenţiile semnelor de citare.

Deşi ţelul lui Frege, atunci cînd îşi elaborează scrierea, este de a da un *substitut* pentru limbajul uzual în ce priveşte prezentarea matematicii, de fapt el introduce această scriere cu ajutorul limbajului uzual şi în această etapă el nu ezită s-o trateze ca pe un *supliment* al acestui limbaj. Cu alte cuvinte, exact cum chimiştii amestecă semnele lor speciale cu cuvintele din limba maternă, tot astfel Frege scrie adesea propoziţii în care, alături de cuvinte germane, utilizează semnele sale speciale. În mod firesc, aceste semne apar în acest context fără semnele citării. Cînd însă, pe de altă parte, el doreşte să *menţioneze* semnele sale speciale în cursul unei propoziţii formulate în germană, el le cuprinde între semne de citare, exact aşa cum ar fi cuprins cuvinte germane dacă ar fi avut de vorbit despre ele. În capitolul precedent, pentru a da o imagine fidelă a operei sale, am urmat această practică de-a lungul întregii expuneri a logicii lui Frege. Totuşi, ar fi o eroare să credem că introducerea semnelor citării ar fi modul unic, sau măcar optim de evitare a confuziei dintre utilizarea simbolurilor speciale şi menţionarea lor. O metodă mai simplă constă în a renunţa de la bun început la orice folosire a simbolismului special ca supliment la limbajul uzual, precizînd astfel că ori de cîte ori apar simboluri speciale ele trebuie să fie considerate ca fiind citate. Clasiciştii adoptă de obicei această practică atunci cînd discută cuvintele dintr-un text clasic (deşi uneori şi ei îşi permit să *utilizeze* cuvinte din elină sau latină, aşa cum am făcut noi în capitolele anterioare, unde nu

exista pericolul vreunei confuzii reale), iar un exemplu de aplicare a acestei practici la logică (practică foarte apropiată de cea a lui Boole) se poate găsi în secțiunea noastră cu privire la algebra logicii. În toate aceste cazuri este folositor ca semnele supuse discuției să se deosebească tipografic de cele din limbajul uzual, de exemplu tipărind cursiv toate literele din simbolismul special. Dar simplitatea acestui procedeu se plătește în multe cazuri prin formulări mai greoaie, astfel încît tehnica lui Frege pare să fie mai naturală. De exemplu, în loc de a spune „$a + b$ este clasa care are ca membri toate lucrurile care sînt membri fie ai clasei a, fie ai clasei b", trebuie să spunem „$a + b$ desemnează clasa care are ca membri toate lucrurile care sînt fie membri ai clasei desemnate prin a, fie membri ai clasei desemnate prin b". Alegerea uneia dintre cele două metode este o chestiune de gust. În continuare, noi vom urma practica din secțiunea privitoare la algebra logicii și nu practica lui Frege, deoarece prima pare a fi mai economică pentru ceea ce urmărim. Dar, pentru a păstra avantajele ambelor procedee ne vom permite uneori să combinăm cuvinte din limba noastră cu semne speciale din logică; iar atunci cînd vom proceda astfel, vom tipări cuvintele respective cu caractere cursive, pentru a arăta că în context ele secundează scrierea specială supusă discuției.

Utilizarea de către Frege a literelor de diferite caractere pentru expunerea regulilor de bază din sistemul său este un instrument foarte convenabil, care ar putea fi adoptat în mod avantajos de către toți logicienii, independent de punctul lor de vedere cu privire la citare. De exemplu, el ne spune:

«Din două enunțuri "$\vdash \begin{array}{l}\Gamma \\ \Delta\end{array}$" și „$\vdash \Delta$" putem deriva enunțul „$\vdash \Gamma$"»[1].

Aici este evident că literele sînt variabile libere al căror domeniu de acțiune este întregul enunț în care Frege își formulează regula *modus ponens*. Dar, după cum spune și el, aceste litere nu aparțin propriu-zis scrierii sale conceptuale. Funcțiunea lor nu este de a exprima universalitatea în enunțurile aparținînd acestei scrieri, ci de a exprima universalitatea în enunțurile cu privire la enunțurile aparținînd scrierii. Din acest motiv, ele trebuie să aibă proprietatea specifică de a depăși semnele de citare în cadrul cărora sînt cuprinse. Aceasta i-a șocat pe anumiți critici care consideră că semnele citării pot fi utilizate numai pentru a făuri un nume din ceea ce intervine

[1] *Grundgesetze der Arithmethik*, I, § 14.

în cuprinsul lor. Dar o asemenea obiecție consideră posibilitățile limbajului într-un mod prea strîmt. Dacă specificăm de la bun început, după cum face Frege, că majusculele grecești stau în această relație împreună cu semnele citării cu care figurează în textul nostru, atunci acest procedeu nu are nimic impropriu. Semnele citării au fost făcute pentru om și nu omul pentru semnele citării.

În practică ne vom dispensa de semnele citării pentru motivul arătat mai sus și vom utiliza majuscule cursive în locul majusculelor eline ale lui Frege. Scrierea cursivă sugerează legătura cu scrierea specială pe care o utilizăm pentru logică (adică o legătură care ar putea fi indicată în altă convenție prin includerea aceloraşi semne de citare), dar utilizarea literelor mari sugerează puterea de depășire de care tocmai am vorbit. Deoarece utilizarea lor principală constă în prezentarea unor reguli prin intermediul unor scheme cum ar fi

$$\frac{P \quad \textit{Dacă} \quad P \quad \textit{atunci} \quad Q}{Q}$$

pare mai convenabil să-l urmăm pe W. V. Quine, caracterizîndu-le ca litere de scheme[2]. Într-un caz ca cel menționat, forma luată în considerare ar putea fi indicată prin referire la proprietățile comune ale unui număr de exemple proprii prezentate în detaliu, dar utilizarea literelor de scheme aduce un spor de claritate, lăsînd totodată la latitudinea cititorului, după cum spune Frege, să găsească un exemplu adecvat, prin interpretarea literelor, ori de cîte ori el găsește că așa este mai convenabil. Eventual am putea spune că aceste majuscule *reprezintă* semne ale scrierii nu în sensul de a fi desemnări ale unor asemenea semne (ceea ce desigur că nu sînt), ci mai curînd în sensul în care se spune că tunurile care trag în gol reprezintă tunuri reale în cadrul exercițiilor tactice.

În lucrarea lui Hilbert și Ackermann *Grundzüge der theoretischen Logik* precum și în lucrarea lui Hilbert și Bernays *Grundlagen der Mathematik* se folosesc în acest scop literele gotice, dar cu o rafinare adițională întrucît literele mari reprezintă *expresii* de propoziții și funcții propoziționale, iar literele mici reprezintă *desemnări* de tot felul. Întrucît, așa cum vom vedea în capitolul următor, nerecunoașterea distincției dintre expresii (în sens strict) și desemnări a dat naștere la confuzii, introducerea unei convenții pentru a deosebi literele care le reprezintă este o realizare a tehnicii lui Frege, dar

[2] *Methods of Logic*, p. 29, 91 și urm. Quine nu adoptă convenția lui Frage, prin care literele de schemă sînt întotdeauna litere mari și ca atare tipografic distincte de variabilele din scriitura specială.

acest țel se poate obține mai economic rezervînd pentru diferite scopuri litere din diferitele porțiuni al alfabetului. În cele ce urmează vom folosi literele *P*, *Q*, *R*, *S* și *T* ca reprezentative pentru expresiile propoziționale, literele *F*, *G*, *H*, *J* și *K* ca reprezentative pentru expresiile de funcții propoziționale, iar literele *X*, *Y*, *Z*, *V*, *W* ca reprezentative pentru desemnări. Dacă vrem să considerăm o schemă comună pentru acele formule din scriere care diferă numai în ce privește variabilele pe care le conțin (de exemplu în scrierea lui Frege

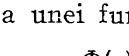
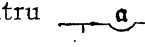
schema comună pentru $\overset{x}{\smile}\ x + 1 = 1 + x$ și $\overset{n}{\smile}\ n +$

$+ 1 = 1 + n$), atunci le putem reprezenta prin litere speciale cu același statut ca și literele noastre de scheme, cu condiția ca să stabilim într-un fel sau altul în mod clar că semnele reprezentative sînt variabile aparținînd scrierii. Dacă însă ne mulțumim să tratăm variabilele din scriere ca o parte a aparatului formal semnificînd doar înlănțuirea de locuri goale, ne putem mulțumi cu varietățile de litere de scheme pe care le-am menționat mai sus, întrucît acestea sînt suficiente pentru enunțările pe care trebuie să le facem în calitate de logicieni.

Pentru o bună înțelegere a utilizării literelor de scheme este esențial să ne dăm seama că ele nu sînt nici variabile ale scrierii speciale supuse cercetării, nici simboluri de felul celor pe care le introduc mulți logicieni moderni sub numele de variabile sintactice sau metalingvistice (adică simboluri care marchează locurile goale, convenabile pentru desemnarea semnelor din scrierea de bază)[3]. Literele de scheme trebuie să fie considerate mai curînd, așa cum a propus Frege, ca abrevieri pentru orice semne sau complexe de semne de caracter convenabil pe care cititorul le poate selecționa din scrierea de bază. Ele sînt cu adevărat variabile, dar de un tip specific. Deși ele intervin împreună cu semnele citării (sau în orice caz în pasaje în care s-ar putea folosi semnele citării), ele nu sînt niciodată citate ca atare (adică menționate) chiar dacă sînt singure, afară de cazul cînd, ca în alineatul precedent, le denumim în mod expres litere. Locurile goale pe care ele le marchează trebuie să fie tratate ca și cum ar fi efectuate în cadrul materialului citat *după ce el a fost citat*. De aici rezultă că ele constituie un instrument al discursului de nivelul al doilea și că universalitatea pe care o pot exprima aparține unui asemenea discurs, și nu celui citat. Această utilizare impune o convenție specială cu privire la citare, dar o convenție care este simplă și naturală. De fapt, este convenția pe care o urmează stoicii atunci cînd își prezintă

[3] R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, § 4; W. V. Quine, *Mathematical Logic*, §§ 4–6.

logica lor primară cu ajutorul unor expresii ca „primul" și „al doilea", precum și succesorii lui Aristotel atunci cînd expun teoria silogismului cu ajutorul unor șabloane de raționament.

În cazul scrierii lui Frege, instrumentul de bază este utilizarea literelor gotice pentru a marca locurile goale din expresii. După cum se exprimă el, acest procedeu este inseparabil de utilizarea literelor gotice în concavitățile liniilor orizontale ca prefixe sau cuantori universali. Dar se poate concepe cu ușurință o modificare a scrierii sale astfel încît ea să cuprindă nu numai cuantori universali, dar și prefixe de alt tip. De exemplu, Frege ar fi putut scrie  pentru închiderea existențială a unei funcții propoziționale, adică drept un echivalent pentru  . De asemenea, el ar fi putut folosi litere gotice în locul vocalelor grecești mici pentru notarea parcursurilor de valori. De exemplu, el ar fi putut scrie $\hat{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$ în loc de $\hat{\alpha}\Phi(\alpha)$ ca semn pentru clasa căruia un lucru îi aparține atunci și numai atunci cînd are caracteristica exprimată prin Φ. Asemenea modificări se găsesc de fapt în scrierea pe care Whitehead și Russell au utilizat-o în lucrarea lor *Principia Mathematica*. În conformitate cu convenția folosită de ei și de majoritatea autorilor de după ei, semnele pentru locurile goale sînt litere cursive mici (*p*, *q*, *r*, *s* și *t* în locurile goale care sînt de completat cu expresii propoziționale, *f*, *g*, *h*, *j* și *k* în locurile goale care sînt de completat cu expresii funcționale și *x*, *y*, *z*, *v* și *w* în locurile goale care sînt de completat cu desemnări) și avem totodată diferite prefixe cu ajutorul cărora aceste litere pot fi legate, rezultatele fiind cele arătate în tabela următoare:

$(x)F(x)$..... *Orice am lua, F (acela).*
$(\exists x)F(x)$..... *Există un anumit F (care).*
$\hat{x}F(x)$..... *Clasa tuturor lucrurilor F (care).*
$(\imath x)F(x)$ ..... *Unicul lucru F (care).*

În primele două exemple, semnul complex realizat prin adăugarea prefixului este o expresie, pe cînd în celelalte două este o desemnare. Evident, utilizarea acelorași caractere pentru marcarea locurilor goale în toate aceste cazuri nu aduce nici un dezavantaj, ci, dimpotrivă, avem încă un cîștig de claritate.

Prin traducerile incluse în tabela de mai sus am încercat să punem în evidență faptul că literele cursive servesc aici nu numai pentru a marca locurile goale, dar și pentru a le lega cu prefixe. După cum

spune W. V. Quine[4], rolul lor în logica simbolică este analog celui pe care în limbajul uzual îl are pronumele. Unii logicieni încearcă să precizeze aceasta citind $(x)F(x)$ ca şi cînd ar fi o abreviere a expresiei *pentru orice x, F(x)* şi oferind lecturi similare pentru celelalte semne compuse din lista de mai sus. Ca instrument tehnic, o asemenea exprimare ar putea fi nevinovată şi convenabilă, dar ea este nesatisfăcătoare în calitate de explicaţie, deoarece cuprinde un amestec nefericit de simbolism tehnic şi limbaj uzual. Cînd în limba obişnuită citim „pentru orice...", ne gîndim la o lacună care ar trebui completată printr-un termen general cum ar fi „om", dar nu la aceasta ne referim în toate locurile pe care le marcăm cu x. Pe de altă parte, dacă ne permitem să concepem pe F ca termen general, adică în calitate de adjectiv, putem obţine versiuni care sună natural, şi anume: *fiecare lucru este F, un anumit lucru este F, clasa tuturor lucrurilor F* şi *unicul lucru F*. Dar nici asemenea citiri nu sînt cu totul corecte, deoarece o expresie funcţională nu este un termen general cum ar fi „pătrat", ci mai curînd ceva care aduce a „...este pătrat".

Cînd vrea să vorbească despre o funcţie (adică s-o considere ca subiect al vorbirii sale), Frege utilizează un semn compus de forma $\Phi(\xi)$, în care litera grecească mică este un semn de loc gol destinat să arate natura nesaturată a funcţiei şi în acelaşi timp să indice felul în care funcţia intră în discurs. Totuşi, el uită să observe că întregul semn $\Phi(\xi)$ trebuie să fie o *desemnare* a unei funcţii şi, ca atare, nu poate să fie incomplet în acelaşi fel în care este incompletă o *expresie* funcţională. În asemenea contexte, Whitehead şi Russell utilizează semnul compus $F(\hat{x})$. Acest semn are meritul de a păstra caracterul obişnuit al semnului pentru locul gol, dar cu modificarea necesară pentru a arăta utilizarea specială care se atribuie acum întregului semn. Situaţia ar fi şi mai clară dacă am permite ca expresia funcţională să apară în înfăţişarea sa obişnuită, dar cu un prefix introdus în mod explicit în scopul de a alcătui desemnări. Corespunzător cu abstractorul de clasă pe care l-am amintit mai sus am putea avea un abstractor de funcţie $\check{x}$. Atunci $\check{x}\ F(x)$ ar fi o prescurtare pentru *funcţia satisfăcută de orice lucru F(care)*, şi cel care ar folosi acest semn n-ar fi în pericolul de a presupune, aşa cum o face Frege, că vorbirea despre funcţii trebuie să impună în mod inevitabil o gramatică proastă. Totuşi, pentru uniformitate, vom aplica în cele ce urmează practica lui Whitehead şi Russell[5].

În toate contextele pe care le-am considerat pînă acum, semnele pentru locurile goale intervin în cadrul unor expresii funcţionale

[4] *Mathematical Logic*, § 12. A se vedea şi G. Peano, *Formulaire*, 1897, p. 23.
[5] În acest sens, A. Church utilizează notaţia $\lambda\ xFx$.

care la rîndul lor apar ca părți ale unor semne complexe mai întinse; aici fiecare variabilă, cum este numită de obicei, are un prefix sau un alt semn care o leagă. Dar în contextul pentru care noi păstrăm caracterele cursive, Frege utiliza semne de locuri libere pentru a exprima universalitatea fără ajutorul prefixelor. După cum explică el, o expresie care conține litere cursive trebuie să fie considerată ca o abreviere a unei expresii similare, cu unica deosebire că cuprinde litere gotice în locul celor cursive iar la început posedă cuantori universali care guvernează întregul. Aceeași explicație pentru variabile reale (adică variabile libere utilizate pentru exprimarea universalității) se poate găsi și în introducerea lui Russell la ediția a doua din *Principia Mathematica*. Rezultă că o expresie care conține variabile reale nu poate apare niciodată în calitate de parte proprie a unei expresii propoziționale mai întinse (în afară de cazul cînd este marcată prin semnele citării sau în alt mod similar) adică în alți termeni: domeniul de acțiune al universalității exprimate prin utilizarea unei variabile libere trebuie să fie întreaga expresie în care figurează ea. Deoarece lucrurile stau astfel, nu mai este strict necesar să utilizăm caractere tipografice speciale pentru semnele de locuri goale, care exprimă universalitatea fără ajutorul prefixelor. Rolul adițional care le revine este indicat deja de faptul că expresiile în care intervin apar ca enunțuri complete. Astfel, ori de cîte ori este clar din context că o expresie $F(x)$ trebuie să fie considerată ca o propoziție, trebuie s-o înțelegem ca o abreviere pentru $(x)F(x)$. Dacă însă termenul ar fi adesea citat cu semnele citării sau, așa cum o facem aici, ar fi complicat să indicăm de fiecare dată ce anume a fost citat, și în asemenea împrejurări ar fi util să adoptăm convenția că x rămîne doar un semn de loc gol, în afară de cazul cînd este modificat într-un anumit fel (de exemplu, folosit cu caractere grase) pentru a arăta că are rolul adițional de a exprima universalitate. Dar nici măcar aceasta nu este necesar în lucrările lui Frege sau în *Principia Mathematica*, unde Whitehead și Russell urmează practica lui Frege de a folosi semnul de aserțiune în fața tuturor enunțurilor lor simbolice. Prezența acestui semn este suficientă pentru a arăta că orice variabilă liberă conținută în expresia care urmează trebuie să fie înțeleasă ca și cînd ar fi legată printr-un cuantor universal plasat la începutul întregii expresii. În realitate, s-a susținut că acesta este și unicul rol util al semnului de aserțiune și că acest semn ar putea fi considerat ca o abreviere pentru „Expresia care rezultă din cea următoare atunci cînd ea este prefixată cu cuantori universali pentru a lega toate variabilele libere este o teoremă"[6].

[6] W. V. Quine, *Mathematical Logic*, § 16.

Deşi utilizarea literelor pentru exprimarea universalităţii fără ajutorul cuantorilor apare la Frege ca un instrument de abreviere, istoriceşte ea este cea mai veche utilizare a variabilelor în logică şi matematică, şi tocmai de aceea literele care apar în acest rol au fost denumite variabile reale, în timp ce cele legate prin prefixe au fost denumite variabile aparente. Marele merit al acestei notaţii constă în faptul că ea permite construirea unor enunţuri universale care pot fi manipulate în multe privinţe fără nici o grijă, ca şi cum ar fi enunţuri singulare. Probabil că acesta şi este unul dintre motivele pentru care se spune uneori că o variabilă reală denotă în mod ambiguu una din valorile sale şi mulţimea lor, adică oricare şi toate lucrurile denotate fără ambiguitate de către semnele adecvate pentru a completa locul gol marcat de către variabila reală. Felul acesta de a vorbi este nefericit, dar este adevărat că o variabilă reală poate fi tratată pentru multe ţeluri ca şi cum ar reprezenta semnele convenabile pentru locurile libere. De fapt, am şi folosit acest avantaj în utilizarea pe care am dat-o majusculelor cursive. În adevăr, singura deosebire dintre literele mari şi literele mici, folosite ca variabile reale, constă în aceea că primele sînt rezervate pentru utilizarea în enunţuri de nivelul al doilea; dar aceasta atrage drept consecinţă faptul că ele au un domeniu de acţiune maxim şi pot chiar depăşi semnele citării, atunci cînd acest lucru este necesar pentru semnificaţia întregului considerat ca enunţ universal.

Dacă am încerca să formulăm o regulă ca *modus ponens* cu ajutorul literelor mici, aceasta ne-ar putea duce la o confuzie serioasă. De exemplu, ar fi absurd să propunem schema

$$\frac{p,\ \textit{Dacă}\ p\ \textit{atunci}\ q}{q}$$

deoarece, conform cu convenţia care guvernează utilizarea literelor mici, p, cînd apare singur într-un loc convenabil pentru o propoziţie, trebuie să fie luat ca enunţ universal echivalent cu $(p)p$, adică echivalent cu aserţiunea cu privire la toate propoziţiile. Evident, variabilele de care avem nevoie pentru formularea regulii trebuie să aibă ca domeniu de acţiune întreaga propoziţie care prezintă regula, şi aceasta este la noi trăsătura distinctivă a majusculelor. În anumite contexte însă, distincţia dintre minuscule şi majuscule poate fi ignorată fără vreo pagubă. De exemplu, în matematică egalitatea

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

poate fi considerată ca enunţ universal cu privire la numere, dar în aceeaşi măsură o putem considera drept o schemă de validare, adică enunţarea ei se poate considera ca o permisiune de a înlocui

orice semn de forma $1 + 2 + 3 + \ldots + N$ printr-un semn de forma $\frac{N(N+1)}{2}$. Dacă punem formula ca o concluzie sau ca o premisă pentru alte cercetări în teoria numerelor, atunci o înţelegem în primul mod, dacă însă, pe de altă parte, ne referim la ea ca la ceva care sancţionează o trecere de la un enunţ în care figurează $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ la un enunţ în care în locul corespunzător figurează $\frac{100(100+1)}{2}$, o înţelegem în al doilea fel. Nu este nici un pericol în utilizarea uneia şi aceleiaşi formule în două scopuri, întrucît contextul arată destul de clar care este interpretarea cerută.

Simbolismul lui Frege este greoi nu numai datorită varietăţii de caractere pe care o pretinde, dar şi pentru că el impune aşezarea formulelor în două dimensiuni; de aceea el a fost înlocuit în prezent prin notaţii care nu pretind decît aranjarea liniară a unui număr relativ redus de semne. Sistemul acceptat de către cei mai mulţi este cel introdus de Peano în lucrarea sa *Notations de logique mathématique* din 1894, sistem pe care el l-a dezvoltat în ediţiile succesive ale opului său *Formulaire de mathématique* şi care apoi a fost perfecţionat de către Whitehead şi Russell în lucrarea lor *Principia Mathematica* din 1910. Dar se mai utilizează şi alte sisteme, aşa că vom prezenta acum un tabel pentru semnele principale din sistemele mai bine cunoscute, utilizînd literele mari pentru semnele de locuri goale în toate coloanele în afară de ultima, unde trebuie să păstrăm utilizarea literelor mici proprie lui Łukasiewicz, pentru a evita confuzia cu literele pe care el le foloseşte ca operatori.

	Peano-Russell	Hilbert	Variante	Łukasiewicz
Negaţie	$\sim P$	$\bar{P}$	$-P$, $\neg P$	Np
Conjuncţie	$P \cdot Q$	$P \,\&\, Q$	PQ, $P \wedge Q$	Kpq
Disjuncţie	$P \vee Q$	$P \vee Q$	PQ	Apq
Condiţional	$P \supset Q$	$P \rightarrow Q$		Cpq
Bicondiţional	$P \equiv Q$	$P \sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	Epq
Cuantificare universală	$(x)F(x)$	$(x)F(x)$	$\forall x F(x)$, $\bigwedge x F(x)$	$\Pi x \Phi x$
Cuantificare existenţială	$(\exists x)F(x)$	$(Ex)\ F(x)$	$\exists x F(x)$, $\bigvee x F(x)$	$\Sigma x \Phi x$

Funcţia de adevăr, care în lista de aici figurează sub denumirea de condiţional, este, desigur, condiţionalul lui Filon.

Pentru a reduce la minim întrebuinţarea parantezelor (sau, ceea ce este echivalent, întrebuinţarea punctelor groase), cei care utilizează

notațiile care apar în primele trei coloane ale tabelei de mai sus au convenit ca semnul negației (atunci cînd este imprimat înaintea altora) să fie înțeles în sensul că operează numai asupra expresiei care îl urmează imediat, cazul contrar trebuind să fie arătat cu ajutorul parantezelor; de asemenea, s-a convenit că conjuncția, disjuncția, condiționalul și bicondiționalul leagă în această ordine de tărie; adică dacă dorim, putem scrie

$$\sim P \cdot Q \vee R \supset S \equiv T$$

în loc de

$$\{[(\sim P \cdot Q) \vee R] \supset S\} \equiv T.$$

Utilizarea semnului lui Hilbert pentru negație face posibilă omiterea unor paranteze, deoarece lungimea barei suprapuse arată destul de clar întinderea expresiei care urmează să fie negată; alte mici economii s-au realizat scriind $(x)Fx$ sau $\forall xFx$ în loc de $(x)[F(x)]$, unde domeniul de acțiune al cuantorului constă exclusiv în semnul funcțional care îi succede imediat. Dar, chiar și așa, nevoia de paranteze poate aduce complicații, și acesta este un motiv puternic pentru a încerca un procedeu de notație care să nu pretindă deloc parantezele. Aceasta a făcut-o Łukasiewicz. Fiecare dintre literele mari, pe care el le utilizează în calitate de conective sau operatori, precede simbolurile la care se aplică, și, întrucît numărul acestora este clar din definiția operatorului, nu încape ambiguitate pentru interpretările formulelor corect formate. De exemplu, $CKCpqpq$ se poate citi doar ca o formă echivalentă pentru $[(p \supset q) \cdot p] \supset q$, deoarece al doilea C poate să fie aplicat numai la două simboluri complete, care trebuie să fie neapărat literele alăturate p și q, iar K pretinde la fel două simboluri complete, care trebuie să fie neapărat simbolurile alăturate Cpq și p. Însă acest avantaj se obține pe seama unei distanțări radicale de construcțiile utilizate în limbajele uzuale și de aceea el trebuie să fie plătit printr-o dificultate la citire. Fără îndoială că în practică dificultatea poate fi depășită, dar majoritatea logicienilor s-au mulțumit să folosească notații care pretind paranteze, iar în cele ce urmează noi vom folosi numai cea mai cunoscută, adică notația lui Peano, Whitehead și Russell, însă însoțită de regulile cu privire la variabile pe care le-am prezentat în această secțiune.

O modificare mult mai radicală—și care tinde mult mai departe—a simbolismului logic a fost propusă în 1924 de către M. Schönfinkel[7].

---

[7] „Über die Bausteine der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, XCII (1924), pp. 305—316. A se vedea și traducerea în limba română, *Despre elementele constitutive ale logicii matematice*, în *Logică și filozofie*, pp. 105—118, Editura politică, București, 1967. Pentru dezvoltări ulterioare a se vedea H. Curry și R. Feys, *Combinatory Logic* (vol. I, 1958).

Ea a dat naştere la un mod cu totul nou de a considera logica, şi, ca atare, i s-ar fi putut rezerva o secţiune specială, dar noi o vom prezenta aici deoarece nu putem spera decît să indicăm trăsăturile cele mai interesante ale acestui simbolism nou.

Schönfinkel începe prin a arăta că tentativa lui Sheffer de a reduce numărul de constante logice poate fi continuată cu un pas mai departe dacă introducem $Fx|^{x}Gx$ în sens de $(x) \sim (Fx \cdot Gx)$. Într-adevăr, este evident că semnul x trebuie să însemne acelaşi lucru ca şi bara simplă atunci cînd apare între expresii care amîndouă nu conţin nici un x liber; iar dacă i se permite să apară între expresii care conţin un x liber, atunci se poate folosi pentru a forma expresii echivalente cu toate expresiile cuantificate din logica generală. Însă el susţine mai departe că a descoperit o cale de simplificare a simbolismului logic cu mult mai drastică, cea care înlătură toate variabilele, fie ele propoziţionale, funcţionale sau individuale. Variabilele care se utilizează de obicei pentru scrierea formulelor logice nu sînt decît semne auxiliare pentru a marca referirile indirecte, şi dacă putem găsi o altă cale pentru această cerinţă le putem abandona cu totul. Fără îndoială că utilizarea variabilelor va continua în practică, dar din punct de vedere teoretic este interesant de văzut cum pot fi ele eliminate.

După Schönfinkel, trebuie în primul rînd să extindem noţiunea noastră de funcţie astfel încît să permitem ca valorile variabilelor şi valorile funcţiilor să fie ele înseşi funcţii. Atunci, pentru $F(x,y)$ putem scrie $(Fx)y$ sau mai pe scurt Fxy, concepînd Fx în acest complex ca un semn pentru o operaţie care ea însăşi este rezultatul aplicării operaţiei al cărui semn este F la un argument al cărui semn este x. Dacă parantezele nu arată cumva contrariul, atunci se presupune că operaţia indicată de primul semn se aplică la obiectul indicat de al doilea semn, iar rezultatul astfel obţinut este aplicat la obiectul indicat de-al treilea semn şi aşa mai departe. Acum introducem cîteva funcţii (operaţii) speciale, pe care le definim prin următoarele egalităţi:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \mathsf{I}x = x\\
&(2)\ \mathsf{C}xy = x\\
&(3)\ \mathsf{T}fxy = fyx\\
&(4)\ \mathsf{Z}fgx = f(gx)\\
&(5)\ \mathsf{S}fgx = fx(gx).
\end{aligned}
$$

Aici I înseamnă operaţia de identitate care lasă neschimbat argumentul respectiv, C este funcţia de două argumente a cărei valoare este totdeauna egală cu primul dintre argumentele ei, T este operaţia de inversare a succesiunii argumentelor unei funcţii (adică ceea ce în teoria relaţiilor se numeşte de obicei conversiune), Z este operaţia

de compunere a funcţiilor cu ajutorul căreia, de exemplu, noţiunea de unchi este compusă din noţiunile de frate şi părinte, iar S este funcţia de trei argumente a cărei valoare se calculează lăsînd primul şi al doilea argument să opereze separat pe cel de-al treilea, iar apoi lăsînd ca rezultatul primei operaţii să opereze rezultatul celei de-a doua. Dintre aceste cinci funcţii, a doua şi a cincea sînt conceptele cele mai puţin familiare, dar ele sînt de un interes deosebit, pentru că celelalte trei funcţii se pot defini cu ajutorul lor prin următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} \mathsf{I} &= \mathsf{SCC} \\ \mathsf{Z} &= \mathsf{S(CS)C} \\ \mathsf{T} &= \mathsf{S(ZZS)(CC)}. \end{aligned}$$

De exemplu, avem:

$$\begin{aligned} \mathsf{Z}fgx &= \mathsf{S(CS)C}fgx \\ &= \mathsf{CS}f(\mathsf{C}f)gx \\ &= \mathsf{S(C}f)gx \\ &= \mathsf{C}fx(gx) \\ &= f(gx). \end{aligned}$$

Acum, dacă scriem $\mathsf{U}fg$ ca o abreviere pentru $fx|^x\ gx$, putem exprima orice truism logic prin intermediul doar a trei semne: C, S şi U, fiecare variabilă intervenind doar odată, şi anume la sfîrşitul formulei, de unde poate fi înlăturată dacă nu este esenţială pentru fixarea semnificaţiei întregii formule. Se poate omite chiar U însuşi deoarece şi intrările sale se pot reduce la una singură la sfîrşit, unde unicul ei rol se rezumă la acela de a arăta că ceea ce scriem ţine de logică. Ceea ce este particular în fiecare truism poate fi deci exprimat printr-o simplă aranjare a două semne: C şi S. De exemplu avem:

$$\begin{aligned} p|^x(p|^x p) &= \mathsf{U}p(\mathsf{U}pp) \\ &= \mathsf{U}p(\mathsf{U}p(\mathsf{C}p(\mathsf{C}p))) \\ &= \mathsf{U}p(\mathsf{U}p(\mathsf{SCC}p)) \\ &= \mathsf{U}p(\mathsf{SU(SCC)}p) \\ &= \mathsf{SU(SU(SCC))}p \\ &= \mathsf{SU(SU(C(SCC)U))}p \\ &= \mathsf{SU(SS(C(SCC))U)}p \\ &= \mathsf{SS(SS(C(SCC)))U}p. \end{aligned}$$

Introducînd o nouă funcţie particulară D pe care o definim direct prin egalitatea

$$\mathsf{D}fx = fxx$$

sau indirect (adică cu ajutorul lui C şi S) prin egalitatea

$$\begin{aligned} \mathsf{D} &= \mathsf{SS(CI)} \\ &= \mathsf{SS(C(SCC))}, \end{aligned}$$

putem reduce întreaga expresie de mai sus la SSD. Dar niciodată nu s-a pretins că logica combinatorie, aşa cum se numeşte în prezent acest domeniu de cercetare, ar oferi formule de mare claritate intuitivă. Pînă în prezent, tehnica lui Schönfinkel este importantă mai cu seamă pentru lumina pe care o aruncă asupra rolului variabilelor şi a noţiunii de substituţie în simbolismul logicii matematice. Se prea poate ca ea să se dovedească utilă şi în analiza exactă a tiparelor limbajelor obişnuite, dar deocamdată aceasta este o simplă conjectură.

2. *Metode de prezentare: axiome şi reguli*

În simbolismul modern, prima mulţime de axiome propusă de Frege pentru logica generală (fără teoria identităţii) se poate rescrie după cum urmează:

(1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
(3) $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$
(4) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(5) $\sim \sim p \supset p$
(6) $p \supset \sim \sim p$
(7) $(x)f(x) \supset f(y)$.

În *Begriffsschrift,* el spune că utilizează doar un singur principiu de inferenţă pentru derivarea teoremelor din aceste axiome, dar am văzut că de fapt el foloseşte patru principii de inferenţă. Dintre acestea, (I) este un principiu de substituţie pentru variabile reale, asemănător cu cel din regula (9) din lucrarea sa *Grundgesetze,* iar celelalte trei corespund cu următoarele scheme:

(II) $\dfrac{P \quad P \supset Q}{Q}$ (III) $\dfrac{F(x)}{(x)F(x)}$

(IV) $\dfrac{P \supset F(x)}{P \supset (x)F(x)}$, cu condiţia ca x să nu intervină liber în P.

Majoritatea logicienilor de mai tîrziu au inclus în sistemele lor axiome sau reguli foarte apropiate de (7), (III) şi (IV), deşi (III) — după cum vom vedea mai tîrziu — este redundantă. Dar logica primară, care este determinată prin (1)—(6), (I) şi (II) a fost prezentată în diferite moduri sub denumiri ca „teoria deducţiei", „calculul propoziţiilor", „teoria propoziţiilor elementare", „teoria funcţiilor de adevăr" şi „teoria compunerii enunţurilor". Aceste variaţii în ce priveşte prezentarea merită atenţie, deoarece cel puţin unele din ele sînt importante pentru filosofia logicii.

Am văzut deja că a treia dintre axiomele lui Frege este redundantă, întrucît ea poate fi derivată din primele două. Dacă aceste două sînt prezente, atunci putem să înlocuim ultimele trei printr-o singură axiomă nouă relativă la negaţie, şi anume:

$$(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p).$$

Şi mai interesantă este posibilitatea de a înlocui toate axiomele lui Frege pentru logica primară prin următoarea mulţime completă de trei axiome:

(1) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

(2) $(\sim p \supset p) \supset p$

(3) $p \supset (\sim p \supset q)$.

Interesul este cu atît mai mare cu cît prima dintre aceste trei este principiul tranzitivităţii pentru conexiunea condiţională a lui Filon, a doua este o versiune a principiului *consequentia mirabilis*, care a fost formulat pentru întîia oară de către stoici, iar a treia axiomă este o formulare nouă a uneia dintre tezele paradoxale care erau atribuite lui John Duns Scottus, şi anume că orice propoziţie poate fi derivată dintr-o conjuncţie autocontradictorie. Aceste descoperiri şi cîteva alte rezultate foarte interesante (cum ar fi acela că este suficientă o singură axiomă, deşi nu prea clară din punct de vedere intuitiv) se datorează toate lui Łukasiewicz şi şcolii sale care, începînd din anii 20 ai secolului nostru, a cercetat minuţios logica primară, cu referire specială la sistemele bazate pe cele două noţiuni primitive ale lui Frege: negaţia şi condiţionalul lui Filon[8]. Dar sistemul care a atras cel mai mult atenţia în veacul nostru nu este cel al lui Frege, ci sistemul din *Principia Mathematica*.

---

[8] J. Łukasiewicz şi A. Tarski „Untersuchungen über den Aussagenkalküll, *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III*, vol. XXIII (1930), pp. 30—50. Rezultatele acestei şcoli sînt expuse pe larg în cartea lui A. N. Prior, *Formal Logic*.

Ca și Frege, Whitehead și Russell au lucrat cu două principii de inferență pentru logica primară: principiul substituției și principiul detașării (adică *modus ponens* pentru condiționalul lui Filon), dar ei au considerat ca primitive noțiunile de negație și disjuncție și au dat următoarea mulțime de axiome:

$$(1)\ (p \vee p) \supset p$$
$$(2)\ q \supset (p \vee q)$$
$$(3)\ (p \vee q) \supset (q \vee p)$$
$$(4)\ [p \vee (q \vee r)] \supset [(q \vee (p \vee r)]$$
$$(5)\ (q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)].$$

În 1926, Bernays a arătat că (4) se poate deriva din celelalte și era, așadar, superfluă[9]. Însă, în afară de aceasta, acest binecunoscut sistem prezintă o anumită lipsă de eleganță. Dacă luăm ca primitive semnele negației și disjuncției, atunci tot ele ar trebui să fie utilizate pentru formularea axiomelor și regulilor de inferență, excluzînd de aici toate celelalte semne. Desigur că în acest sistem am putea înlocui peste tot $P \supset Q$ prin $\sim p \vee Q$, dar dacă procedăm în acest fel, atunci axiomele și regulile rezultate ar fi întrucîtva mai complicate decît cele din sistemele lui Frege și Łukasiewicz.

După cum am văzut în capitolul cu privire la algebra logicii, Peirce și Scheffer și-au dat seama de posibilitatea de a defini negația și toate conectivele logicii primare cu ajutorul unei singure noțiuni primitive. În 1917, Nicod, luînd ca nedefinită expresia P/Q (cu semnificația: *nu atît P cît și Q*) arăta că întregul calcul s-ar putea baza pe o singură axiomă

$$[p|(q|r)] \mid ([t|(t|t)] \mid \{(s|q)|[(p|s)|(p|s)]\})$$

cu

$$\frac{P \quad P|(Q|R)}{R}$$

ca regulă de inferență în locul regulii tradiționale *modus ponens*[10]. În introducerea sa la ediția a doua din *Principia Mathematica*, publicată în 1925, Russell a propus ca această formulare să ia locul sistemului din prima ediție, dar ar fi greu să spunem că reducerea realizată de către Nicod ar fi o simplificare care ușurează asimilarea teoriei.

---

[9] „Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der *Principia Mathematica*", *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 305–20.

[10] "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, XIX (1917), pp. 32–41.

Dacă ceea ce se urmăreşte este claritatea şi naturaleţea prezentării argumentelor, cea mai bună mulţime de axiome de utilizat împreună cu principiile de substituţie şi detaşare este cea dată de către Hilbert şi Bernays în 1934[11].

I. (1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $[p \supset (p \supset q)] \supset (p \supset q)$
(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

II. (1) $p \cdot q \supset p$
(2) $p \cdot q \supset q$
(3) $(p \supset q) \supset [(p \supset r) \supset (p \supset q \cdot r)]$

III. (1) $p \supset p \vee q$
(2) $q \supset p \vee q$
(3) $(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)]$

IV. (1) $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
(2) $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$
(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$

V. (1) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(2) $p \supset \sim \sim p$
(3) $\sim \sim p \supset p$.

Aici axiomele se grupează la un loc după semnele care figurează în ele. Mai întîi apar axiomele în care figurează numai semnul condiţionalului filonian, apoi acelea care cuprind, pe lîngă acest semn, şi semnul conjuncţiei şi aşa mai departe. Locul privilegiat al semnului condiţional care figurează ca unic semn în grupa întîi şi ca unul din cele două semne în fiecare din celelalte grupe se datorează, desigur, faptului că el intervine şi în regula detaşării. Dacă avem această regulă, fiecare axiomă ia locul unei reguli adiţionale de inferenţă. De exemplu, prima axiomă are aceeaşi putere ca şi regula cu schema

$$\frac{P}{Q \supset P}.$$

E adevărat că în acest sistem numărul axiomelor este mare; dar aceasta nu prezintă un dezavantaj, deoarece fiecare semn distinctiv se introduce într-un fel care poate fi uşor înţeles, de exemplu semnul disjuncţiei printr-o grupă de trei axiome duale celor trei axiome ale conjuncţiei. După dorinţă, se poate reduce numărul axiomelor, definind unele semne cu ajutorul altora; dar aici nu avem vreun cîştig

[11] *Grundlagen der Mathematik*, I, p. 66.

real, deoarece de fapt o definiție nu este decît un cuplu de reguli de inferență care leagă semnul definit de unul nedefinit. Așa cum sînt ele, aceste axiome sînt toate independente și este interesant de notat că: I(1), V(1), V(2) și V(3) provin din sistemul lui Frege, I(3) din sistemul lui Łukasiewicz, iar III(5) din *Principia Mathematica*.

În toate aceste sisteme, pentru derivarea teoremelor din axiome este necesar un principiu de substituție. Faptul că un asemenea principiu poate fi formulat riguros este incontestabil, dar se pare totuși că ar fi impropriu de a pune ceva de acest gen ca o regulă a logicii primare în același rînd cu regula detașării. Atunci cînd derivăm un enunț din altul printr-un proces de substituție, validitatea inferenței noastre depinde de universalitatea premiselor, dar în logica primară obiectul de studiu este raționamentul care nu cuprinde noțiunea de generalitate și de aceea este neadecvat ca axiomele unei asemenea teorii să fie propoziții universale. Aceasta nu înseamnă că în logica primară logicianul trebuie să se abțină de la orice generalizare și să se limiteze la exemple. În calitate de logician, el poate furniza enunțuri universale; dar în această porțiune a lucrului său, aceste enunțuri ar trebui să fie numai de ordinul al doilea, ca de exemplu enunțul că este validă orice argumentare după schema

$$\frac{P \quad P \supset Q}{Q}.$$

În particular, atunci cînd vorbește despre axiomele logicii primare, el nu trebuie să presupună, cum a făcut Frege, că acestea trebuie să fie universale și în număr finit, ci trebuie mai curînd să fie pregătit să admită ca axiome orice propoziții care au înfățișarea unor forme valide, cum ar fi de exemplu forma $P \supset (Q \supset P)$, care corespunde cu prima axiomă a lui Frege $p \supset (q \supset p)$. Acest procedeu de a da scheme de axiome mai curînd decît axiome se datorează lui J. von Neumann[12], dar se poate spune că el realizează intenția inițială a lui Frege de a prezenta logica, sau cel puțin logica primară, cu ajutorul unei singure reguli de inferență. Din nefericire, această simplificare nu oferă vreun avantaj *practic* celui care utilizează logica, deoarece sarcina de a determina cînd anume poate fi un enunț admis ca axiomă, suscită cu această nouă dispensă exact aceleași dificultăți ca și aceea de a determina cînd anume un enunț poate fi derivat dintr-o axiomă după vechiul sistem. Dar reforma are marele merit filosofic de a demarca în mod clar enunțurile de ordinul întîi de enunțurile de ordinul al doilea.

[12] „Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, XXVI (1927), pp. 1—46.

Probabil că Frege şi cei care l-au urmat în utilizarea principiului substituţiei au fost influenţaţi de analogia cu algebra, unde, după cum am văzut, una şi aceeaşi formulă poate fi utilizată uneori ca enunţ universal cu privire la numere şi alteori ca o permisiune de-a face anumite transformări. Dar ei declară uneori că expresia universalităţii cu ajutorul variabilelor libere este doar o abreviere pentru exprimarea universalităţii cu ajutorul variabilelor legate; şi dacă acest mod de a descrie notaţia este luat în serios, atunci teoria logicii devine mult mai complicată decît au admis-o ei în prezentările lor iniţiale. Într-adevăr, dacă formula axiomă $p \supset (q \supset p)$ trebuie să fie înţeleasă ca fiind o abreviere pentru $(p)(q)\ [p \supset (q \supset p)]$, atunci cel mai simplu caz de derivare va fi de fapt o aplicare a unei reguli de logică generală corespunzătoare cu schema $\frac{(p)F(p)}{F(Q)}$. Însă singurele concluzii pe care le putem obţine prin această metodă sînt enunţuri ca *Pămîntul este plan* $\supset$ (*Luna este o bucată de brînză verde* $\supset$ *Pămîntul este plan*), adică exemplificări ale principiului nostru logic pe un material non-logic, iar logicienii care utilizează principiul substituţiei nu se interesează de obicei de rezultate de acest fel. De cele mai multe ori, teoremele pe care ei vor să le stabilească prin substituţia variabilelor sînt noi enunţuri universale cum ar fi $r \cdot s \supset (\sim t \supset r \cdot s)$, enunţ care nu se poate deriva prin aplicarea regulii simple menţionate mai sus, ci pretinde un raţionament mult mai complicat din logica generală. Fără îndoială că procedura necesară se poate formaliza riguros[13], dar este mai intuitiv să adoptăm instrumentul lui von Neumann al schemelor de axiome şi să argumentăm după cum urmează:

Orice enunţ de forma $P \supset (Q \supset P)$ este necesarmente adevărat. Dar orice enunţ de forma $R \cdot S \supset (\sim T \supset R \cdot S)$ este de forma $P \supset (Q \supset P)$.

Prin urmare, orice enunţ de forma $R \cdot S \supset (\sim T \supset R \cdot S)$ este necesarmente adevărat.

Indubitabil, acest raţionament depinde de un principiu din logica generală (principiul silogistic *Barbara*), dar în acest context el este incontestabil, deoarece nu poate fi îndoială că ţine mai degrabă de o argumentare asupra logicii primare decît de însăşi logica primară.

Consideraţii similare se pot aduce împotriva prezentării lui Frege, a utilizării variabilelor funcţionale în formularea axiomelor pentru logica generală. Dacă formula $(x)f(x) \supset f(y)$ trebuie să fie înţeleasă

[13] Problema a fost examinată serios pentru prima oară de către S. Leśniewski. Prezentarea cea mai accesibilă a logicii sale se poate găsi în lucrarea sa „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Fundamenta Mathematica*, XIV (1929), pp. 1—81.

ca o abreviere pentru $(f)[(x)f(x) \supset f(y)]$, atunci este imposibil să prezentăm teoria funcţiilor de nivelul întîi fără a utiliza teoria funcţiilor de nivelul al doilea. În rezumat, unicul mod de a clarifica articulaţiile teoriei logicii constă în utilizarea unor variabile speciale cum ar fi literele noastre mari, pentru a exprima generalitatea din discursul logicianului spre deosebire de generalitatea pe care acesta o analizează.

Trebuie însă să recunoaştem că orice referire la axiomele logicii, fie că acestea sînt în număr mic ca în sistemul lui Frege, fie că sînt o infinitate ca la von Neumann, are ceva bizar. Înainte de Frege, logicienii considerau că sarcina lor este să examineze cum rezultă teoremele din axiome în domenii ca geometria, dar în mod obişnuit ei nu încercau să prezinte logica însăşi ca sistem deductiv cu propriile sale axiome şi teoreme. Desigur, nu Frege a fost primul care a susţinut că anumite principii logice se pot deriva din altele. Aristotel reducea şi el toate silogismele valide la *Barbara* sau *Celarent,* iar Hrisip deducea modurile complexe din cele pe care le considera nedemonstrabile. Dar, urmînd unele propuneri ale lui Leibniz şi Boole, Frege oferea un sistem în care axiomele şi teoremele nu sînt adevăruri cu privire la ceea ce urmează din ceea ce este dat, ci truisme logice cu acelaşi statut ca legea necontradicţiei sau legea terţului exclus. Dacă dorim să utilizăm logica sa pentru construirea unui sistem deductiv de tipul obişnuit, adică a unui sistem deductiv în care axiomele nu sînt truisme logice, atunci trebuie mai întîi ca la stocul nostru de axiome să adăugăm axiomele sale, în calitate de premise suplimentare, iar apoi să operăm toate inferenţele în conformitate cu principiul substituţiei, principiul detaşării sau cu una din cele două reguli ale lui Frege pentru raţionamentul cu cuantori. Este adevărat că atunci cînd a pornit să scrie *Grundgesetze,* Frege a decis, pentru motive de convenienţă practică, să adopte noi tipare de inferenţă, care să-i permită să se dispenseze de toate axiomele sale pentru logica primară, cu excepţia celei dintîi, dar el nu a explicat niciodată în mod clar de ce are în general nevoie logica de axiome. Poate că iar după Whitehead şi Russell considerau că este firesc să aibă anumite axiome, deoarece altfel n-ar fi avut sens să afirme că aritmetica este o dezvoltare a logicii. Dar, oricum ar fi, după o scurtă perioadă în care programul de prezentare a logicii întregi ca sistem deductiv a fost acceptat fără obiecţii, logicienii şi-au dat seama că truismele din logica primară pot fi certificate ca atare, fără derivare din axiome.

Baza noii metode este enumerarea sistematică a posibilităţilor de adevăr pentru un număr de propoziţii simple, adică enumerarea tuturor combinaţiilor posibile de valori de adevăr pentru aceste pro-

poziții, Astfel, pentru o propoziție avem două posibilități, pentru două avem patru posibilități și, în general, pentru n propoziții avem 2^n posibilități. Cu ajutorul unui tabel care arată cele două posibilități pentru o singură propoziție putem defini negația punînd pur și simplu sub $\sim P$ „f" acolo unde sub P se află „a" și „a" acolo unde sub P se află „f". În antichitate, Filon din Megara aplica aceeași metodă atunci cînd prezenta enunțurile condiționale. El spunea că orice asemenea enunț era adevărat dacă sau antecedentul și consecventul erau amîndouă adevărate, sau antecedentul era fals și consecventul adevărat, sau antecedentul și consecventul erau amîndouă false, dar că enunțul era fals dacă antecedentul său era adevărat iar consecventul său fals. Aceasta conduce la o definiție a conectivului „dacă" asemănătoare cu cea pentru semnul lui C răsturnat, în următoarea succesiune de definiții tabulare:

P	$\sim P$
a	f
f	a

PQ	$P \cdot Q$	$P \vee Q$	$P \supset Q$	$P \equiv Q$
a a	a	a	a	a
a f	f	a	f	f
f a	f	a	a	f
f f	f	f	a	a

Dar, după cîte știm, asemenea liste de posibilități nu s-au construit în formă tabulară decît abia în secolul trecut, atunci cînd Boole le-a utilizat pentru a explica procesul de dezvoltare prin care orice expresie din sistemul său se poate transforma într-o sumă de produse (adică o disjuncție de conjuncții); Frege a utilizat tabelele în mod explicit pentru definiția diferitelor funcții de adevăr. Dacă luăm în considerare două și numai două propoziții (așa cum am procedat în definițiile de mai sus), posibilitățile pot fi reprezentate prin diferitele locuri dintr-o matrice pătrată ca aceea arătată aici, iar definiția se construiește completînd aceste locuri într-un mod convenabil, dar tabularea în linii are avantajul că se poate aplica la orice număr de propoziții și se poate folosi apoi pentru calcul, așa cum se va explica acum.

$\supset$	Q: a	Q: f
P: a	a	f
P: f	a	a

Începînd cu cel mai simplu tabel al posibilităților, care este suficient pentru definirea negației, deoarece negația este o funcție de adevăr de un singur argument, putem construi fiecare tabel mai complicat rescriind tabelul imediat precedent de două ori, o dată cu „a" în fața fiecărei linii și apoi cu „f" în fața fiecărei linii. Sînt posibile — și s-au utilizat — și alte aranjări, dar esențial este să urmăm un proce-

deu regulat care să ne dea certitudinea că fiecare combinație de valori de adevăr apare o dată și numai o dată. După cum se vede, în exemplele noastre am folosit pentru argument numai literele mari. Se poate susține că construcția definiției tabulare a unei funcții de adevăr este de fapt formularea simultană a unui număr de reguli de inferență. De exemplu, construcția definiției tabulare pentru conjuncție este echivalentă cu formularea regulilor exprimate prin următoarele trei scheme de inferență:

P	Q	R
a	a	a
a	a	f
a	f	a
a	f	f
f	a	a
f	a	f
f	f	a
f	f	f

$$\frac{P \quad Q}{P \cdot Q} \qquad \frac{P \cdot Q}{P} \qquad \frac{P \cdot Q}{Q}.$$

În adevăr, pentru a obține oricare din aceste trei scheme din definiția tabulară, ajunge să privim liniile în care premisa sau amîndouă premisele, după cum e cazul, se asociază cu „a" verificînd că în toate aceste linii concluzia este „a".

Nu este greu de găsit în lucrarea lui Boole ideea că o propoziție necesar adevărată trebuie să se dezvăluie ca atare în procesul dezvoltării sale, dar abia pe la 1920 diferiți logicieni, lucrînd în mod independent, au definit funcțiile de adevăr cu ajutorul tabelelor de adevăr și au constatat astfel că un calcul simplu este suficient pentru a determina ori de cîte ori o propoziție complexă exprimată cu ajutorul semnelor funcțiilor de adevăr este cu necesitate adevărată, cu necesitate falsă sau contingentă. Cea mai bună prezentare cunoscută a acestei *proceduri de decizie* pentru logica primară este probabil acea dată de L. Wittgenstein în *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicat pentru întîia dată în 1921, dar o discuție mai amănunțită a acestei tehnici apare într-un articol publicat de E. L. Post în același an [14]. Drept exemplu, să considerăm verificarea primei axiome a lui Frege, sau mai bine zis a schemei de axiome corespunzătoare.

		(1)	(3)	(1)	(2)	(1)
P	Q	P	$\supset$	$(Q$	$\supset$	$P)$
a	a	a	a	a	a	a
a	f	a	a	f	a	a
f	a	f	a	a	f	f
f	f	f	a	f	a	f

[14] "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *The American Journal of Mathematics*, vol. XLIII (1921), pp. 163—185. La acea dată, metoda era cunoscută și lui Łukasiewicz.

Trebuie să distingem aici exact patru cazuri posibile, deoarece avem de-a face numai cu două argumente. Pentru a atribui o valoare de adevăr consecventului din schemă în fiecare din cele patru cazuri e necesar doar să consultăm definiţia tabulară a condiţionalului filonian, care este desigur o specificare a condiţiilor pentru fals, iar după ce s-a realizat această operaţie, indicată prin (2), o a doua aplicare a aceleiaşi definiţii, indicată prin (3), este suficientă pentru a arăta că schema în ansamblu furnizează valoarea „adevărat" în toate circumstanţele posibile, adică, după cum spune Wittgenstein, este o schemă tautologică.

Evident, metoda poate fi aplicată în mod mecanic (adică literalmente de către un mecanism) pentru orice formulă construită cu ajutorul funcţiilor de adevăr din logica primară, iar atunci cînd ea furnizează răspuns afirmativ, validitatea rezultatului nu depinde de corectitudinea vreunei formule anterioare aleasă pentru a servi ca axiomă. Dar ar fi o greşeală să presupunem că metoda pretinde doar definiţii arbitrare pentru semnele funcţiilor de adevăr. Descoperirea că aplicarea definiţiilor furnizează „a" sub conectivul principal al unei formule în toate liniile tabelului nostru conduce la o demonstraţie a adevărului necesar al formulei respective numai dacă am stabilit anterior că liniile tabelului epuizează toate posibilităţile în ce priveşte adevărul sau falsul propoziţiilor care sînt argumentele funcţiei de adevăr pe care o exprimă formula în cauză. Faptul că un tabel construit în chipul explicat mai sus epuizează în adevăr posibilităţile este evident, dar numai pentru cineva care înţelege principiul construcţiei şi îşi dă seama că fiecare propoziţie trebuie să fie sau adevărată, sau falsă.

Metoda tabelelor de adevăr pentru certificarea truismelor s-ar putea considera ca o rafinare a tehnicii lui von Neumann, deşi ea este anterioară acestei tehnici. În loc de a specifica un număr de scheme de axiome, putem utiliza cuvîntul „tautologie" ca o descriere generală, deşi nu efectivă, a tuturor propoziţiilor care urmează să fie admise ca axiome în logica primară. Tocmai aceasta este procedura pe care o urmează W. V. Quine în a sa *Mathematical Logic*[15]. Dacă se obiectează totuşi că nu este propriu-zis sarcina logicianului de a certifica truismele ca atare, indiferent dacă o face prin metoda lui Frege sau prin orice altă procedură modernă, ci că sarcina lui este mai curînd de a formula principiile de inferenţă care sînt valide pentru toate cercetările posibile, atunci putem adapta prezentarea tabelelor de adevăr pentru a veni în întîmpinarea acestui deziderat. În adevăr, a spune că o propoziţie atrage după sine alta înseamnă a spune că orice stare de lucruri posibilă care ar putea fi considerată ca o verifi-

[15] § 16, *100.

care pentru prima ar trebui să fie considerată ca o verificare pentru a doua, fapt ce se poate citi din tabelele de adevăr, dacă implicația aparține logicii primare. De exemplu, se poate vedea că în fiecare linie în care sub capul $P \cdot Q$ din tabelul definițiilor apare „a", sub capul $P \vee Q$ apare de asemenea „a". Am putea în adevăr să luăm implicația sau necesitatea relativă ca noțiune de bază pentru a fi exprimată cu ajutorul tabelelor de adevăr și să spunem că toate truismele, adică propozițiile absolut necesare, sînt tocmai propozițiile implicate de orice altă propoziție. Am văzut deja că definițiile tabulare ale funcțiilor de adevăr pot fi interpretate ca formulări succinte ale unor reguli și se pot spune multe în favoarea acestui punct de vedere; în primul rînd pentru că el concordă cu concepția tradițională a logicii și, în al doilea rînd, pentru că noțiunea de definiție implicită cu ajutorul regulilor de inferență se poate aplica și în acea parte a logicii generale care nu poate fi prezentată cu ajutorul tabelelor de adevăr. În anumite privințe, o propoziție universală seamănă cu o conjuncție iar una existențială cu o disjuncție, numai că domeniul posibilităților din care alegem atunci cînd formulăm o propoziție generală de un fel sau altul poate fi infinit, iar atunci cînd lucrurile stau așa, tehnica tabulării nu se mai poate utiliza.

În lucrarea sa *Logische Syntax der Sprache*[16] (publicată pentru întîia oară în 1934) R. Carnap a făcut observația edificatoare că nu este deosebire de principiu între logicienii care folosesc pentru logică atît reguli cît și axiome și cei care oferă doar reguli de inferență. După cum a observat el, orice formulă care trebuie luată axiomatic urmează să fie prezentată împreună cu explicarea rolului ei, iar această explicare conduce de fapt la o regulă în cadrul căreia propoziția pe care o exprimă formula respectivă se poate infera din orice propoziție dată, sau, în terminologia tehnică a lui Carnap, din clasa nulă a premiselor, care este partea comună a tuturor claselor de premise. Pe scurt, logica este în esență o știință care constă din principii de ordinul al doilea.

Dacă combinăm această propunere cu instrumentul schemelor de axiome introdus de către von Neumann, putem lua ca o alternativă la versiunea logicii dată de către Frege în lucrarea sa *Begriffsschrift* următorul ansamblu de 6 reguli:

$$1.\ \frac{P \supset Q \quad P}{Q}$$

$$2.\ \frac{*}{P \supset (Q \supset P)}$$

[16] §§ 31 și 47.

3. $\dfrac{*}{[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]}$

4. $\dfrac{*}{(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)}$

5. $\dfrac{*}{(x)Fx \supset FY}$

6. $\dfrac{P \supset Fx}{P \supset (x)Fx}$, cu condiția ca x să nu apară liber în P.

În acest sistem, asteriscul tipărit deasupra liniei în unele scheme de inferență marchează un loc unde putem așeza orice premisă dorim, astfel încît introducerea sa echivalează cu enunțarea faptului că propozițiile din schemele indicate sub linia acestor scheme de inferență pot fi asertate fără nici o condiție. Dacă nu ne place acest fel de a vorbi, îl putem urma pe von Neumann, care descrie asemenea propoziții ca axiome; dar în afară de alte considerente, denumirea pare cît se poate de nefericită, deoarece în mod obișnuit se consideră că axiomele trebuie să fie independente unele de altele, în timp ce aceste propoziții nu pot fi independente una de alta, odată ce avem *modus ponens*. Dacă, de exemplu, R și S sînt semne propoziționale oarecare, regula (2) de mai sus ne permite, printre altele, următoarele trei aserțiuni:

$$R \supset (S \supset R)$$

$$(S \supset R) \supset [R \supset (S \supset R)]$$

$$[R \supset (S \supset R)] \supset \{(S \supset R) \supset [R \supset (S \supset R)]\}.$$

A doua dintre acestea se poate infera din prima și a treia prin regula (1). De aceea este preferabil să ne mulțumim a denumi asemenea aserțiuni *truisme* logice.

Atunci cînd aplicăm logica la un domeniu de studiu extralogic, literele mari din schemele noastre de inferență trebuie înlocuite prin expresii proprii pentru propoziții privitoare la obiectul de studiu respectiv, iar apoi se pot trage inferențele permise de către reguli. Dar atunci cînd ne ocupăm cu elaborarea logicii însăși, țelul nostru nu este de a deriva consecințe din premise care aparțin unei alte științe, ci doar de a deriva din regulile de inferență de la care pornim reguli noi, eventual mai complicate. Deoarece regulile sînt aserțiuni de ordinul al doilea, care se pot așeza în forma unor principii cu privire la relațiile dintre propoziții, derivarea regulilor din reguli trebuie să

cuprindă principii de ordinul al treilea, dar ea poate fi totuși prezentată într-un mod simplu cu ajutorul procedeului de deducție schematică pe care l-a folosit Hrisip cînd și-a elaborat logica elementară. Iată de exemplu o demonstrație a regulii simple $\frac{Fx}{(x)Fx}$ pe care am adoptat-o la această procedură după demonstrația inițială a lui Bernays[17]:

$$\dfrac{Fx \qquad \dfrac{\overset{*}{\overline{Fx \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx\}}}\,(2)}{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx}\,(1)}{\dfrac{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx}{[R \supset (S \supset R)] \supset (x)Fx}\,(6) \qquad \dfrac{\overset{*}{\overline{R \supset (S \supset R)}}\,(2)}{(x)Fx}\,(1)}$$

Numerele din dreapta liniilor orizontale arată schemele de bază care sînt folosite pentru diferitele treceri, și deci este clar că pentru a pregăti calea spre utilizarea regulii (6) de la mijlocul demonstrației trebuie să presupunem la început că literele R și S nu sînt abrevieri ale unor expresii în care x figurează liber. Nu avem însă alte restricții în ce privește interpretarea literelor de scheme (exceptînd, desigur, restricția generală pe care o pretinde păstrarea semnificației), astfel încît întregul schelet al argumentării conduce la o justificare a regulii $\frac{Fx}{(x)Fx}$. Utilizarea acestei reguli trebuie să fie corectă îndată ce, după cum este evident, este corect să utilizăm regulile (1), (2) și (6) în felul arătat mai sus.

În afară de metoda folosită pentru demonstrarea sa, exemplul nostru prezintă interes pentru că se referă la trecerea, în exprimarea universalității, de la variabile libere la cele legate. Deoarece universalitatea respectivă aparține propriu-zis propozițiilor din argumentarea considerată, aici nu ne depărtăm de la programul utilizării literelor de scheme, ori de cîte ori acest lucru este posibil, dar cititorul se poate întreba pe bună dreptate de ce am presupus că obținem formule cu variabile libere, pe baza cărora am putea argumenta în concordanță cu regula de mai sus. Răspunsul este că, pentru țelurile logicii generale, formulele în care variabilele libere au fost substituite în mod consistent pentru desemnări pot fi date ca exemple ale acelorași configurații ca și originalele respective. Cînd o examinăm pentru prima oară, această regulă de interpretare a expresiei „de aceeași configurație" este surprinzătoare, deoarece o formulă care exprimă universalitatea cu ajutorul unei variabile libere are în mod evident

[17] Hilbert și Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, cap. III, § 6, regula γ'.

un caracter logic cu totul diferit de acela al formulelor singulare pe care le implică. Ne putem însă justifica făcînd aici apel la faptul că ele sînt, din punct de vedere gramatical, asemănătoare în toate privinţele, cu excepţia utilizării variabilelor libere, după cum se poate arăta printr-o examinare amănunţită a exemplului de mai sus. Conform cu regula (2), putem aserta orice propoziţie care se poate exprima sub forma $P \supset (Q \supset P)$; deci, desigur, şi oricare propoziţie care se poate exprima sub forma $P \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset P\}$. Dar toate propoziţiile ale căror expresii diferă între ele doar aşa cum $FX \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset FX\}$ diferă de $FY \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset FY\}$, — unde X şi Y desemnează lucruri diferite — sînt de asemenea de forma considerată şi deci este permis să utilizăm expresia $Fx \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx\}$ pentru a le aserta simultan. Tocmai pentru că fiecare dintre ele poate fi asertată în virtutea regulii (2), poate fi asertată şi propoziţia universală exprimată prin introducerea unei variabile libere în locul unei desemnări. Probabil că ivirea unor asemenea raţionamente în matematică i-a condus pe matematicieni să spună uneori că o variabilă denotă în mod ambiguu toate diferitele ei valori. Putem explica meritele notaţiei într-un mod mai corect spunînd că ea este o expresie realmente adecvată a rezultatelor inducţiei intuitive; căci tocmai faptul că această trăsătură a propoziţiilor singulare justifică generalizarea noastră este reprezentat de configuraţia pe care o păstrăm în exprimarea generalizării.

Pentru a utiliza avantajul acestui procedeu în alte contexte, putem presupune că regula (5) ne permite să asertăm toate propoziţiile care se pot pune sub forma $(x)Fx \supset Fy$. Adică, ori de cîte ori acest lucru pare convenabil, putem scrie o variabilă liberă în locul unei desemnări proprii în locul indicat prin litera schematică Y din această regulă. Dacă, *mutatis mutandis*, ne permitem aceeaşi libertate în ce priveşte *toate* literele noastre schematice, regăsim în fapt un calcul de felul celui pe care ni-l oferă Frege, Whitehead şi Russell. Căci atunci putem scrie:

$$p \supset (q \supset p)$$
$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$
$$(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$$
$$(x)fx \supset fy$$

ca expresii pentru propoziţii care se obţin prin utilizarea regulilor (2), (3), (4) şi (5) şi să trecem la derivarea tuturor celorlalte formule asertabile pornind de la acestea în calitate de premise. În acest context, regulile obişnuite de substituţie ne vor sta desigur la dispoziţie ca reguli de derivare, deoarece fiecare formulă care rezultă dintr-o

substituire pentru o variabilă liberă trebue să fie exemplificarea unei scheme pentru care formula dată este o exemplificare, şi deci trebuie ea însăşi să poată fi certificată ca truism dacă formula dată este certificată ca atare în virtutea configuraţiei ei. S-ar putea obiecta că această cale de a obţine un calcul al logicii cu variabilă liberă apelează la instrumentul dubios de a se permite două feluri de exemplificări pentru schemele noastre de bază, şi anume: formule fără variabile libere şi formule cu variabile libere. Este însă important să ne dăm seama că un asemenea procedeu este oricum impus de metoda lui Frege de prezentare a logicii. În adevăr, după cum am văzut, în sistemul său şi al succesorilor săi substituţia pentru formulele care conţin variabile libere poate conduce fie la formule fără variabile libere, fie la alte formule, care conţin variabile libere. Atunci cînd considerăm logica drept o teorie abstractă, fără a ne interesa de aplicările ei, examinăm numai substituţiile de-al doilea fel; dar ori de cîte ori calculul logic se aplică la demonstrarea unor aserţiuni extralogice, substituţia de primul fel este esenţială. Dacă obiectăm împotriva unei atare duplicităţi, atunci unica ieşire convenabilă ar fi abandonarea programului de a prezenta logica primară ca o teorie care cuprinde propoziţii universale de ordinul întîi; ar trebui să ne limităm la *reguli* universale, aşa cum sînt cele formulate mai sus. Atunci variabilele libere apar în logica noastră numai aşa cum figurează în regula (6) şi în exemplul de derivare de mai sus, adică în scopul de a marca utilizarea inducţiei intuitive, care este necesară pentru teoria cuantificării sau logica generală, dar nu este pretinsă de către logica primară. Dar şi atunci se pune întrebarea care sistem de reguli este mai evident şi mai natural.

3. *Deducţie naturală şi desfăşurare*

În 1934, un sistem de reguli pentru o deducţie naturală a fost propus de către G. Gentzen[18]. În ultima parte a aceluiaşi memoriu Gentzen a arătat că orice demonstraţie dintr-un anumit sistem de logică se poate aduce la o formă normală în care lipseşte operaţia numită „tăietură" şi care, într-un anumit sens, este cea mai direct posibilă. Această teoremă, pe care el o numeşte teza sa principală (*Hauptsatz*), este importantă în legătură cu demonstraţia pe care o dă el mai departe că teoria numerelor este consistentă, şi poate că într-o vreme impor-

[18] „Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, XXXIX 1934), pp. 176–210, 405–431.

tanța demonstrației a determinat neglijarea sistemului. În simbolismul pe care l-am adoptat, regulile acestui prim sistem ar fi următoarele:

$$(1)\ \frac{P\quad Q}{P\cdot Q} \qquad (2a)\ \frac{P\cdot Q}{P} \qquad (2b)\ \frac{P\cdot Q}{Q}$$

$$(3a)\ \frac{P}{P \vee Q} \qquad (3b)\ \frac{Q}{P \vee Q} \qquad (4)\ \frac{P \vee Q \quad P/R \quad Q/R}{R}$$

$$(5)\ \frac{P/\dagger}{\sim P} \qquad (6a)\ \frac{P \sim P}{\dagger} \qquad (6b)\ \frac{\sim \sim P}{P}$$

$$(7)\ \frac{P/Q}{P \supset Q} \qquad (8)\ \frac{P \quad P \supset Q}{Q}$$

$$(9)\ \frac{Fx}{(x)Fx} \qquad (10)\ \frac{(x)Fx}{FY}$$

$$(11)\ \frac{FY}{(\exists x)Fx} \qquad (12)\ \frac{(\exists x)Fx \quad Fx/P}{P}$$

Aici fiecare regulă este prezentată cu ajutorul unei scheme; schemele din stînga sînt reguli pentru introducerea semnelor formale, cele din dreapta sînt reguli pentru eliminarea lor. În cea mai mare parte regulile sînt ușor de înțeles, dar există totuși unele aspecte care trebuie comentate.

Semnul † din regulile (5) și (6a) reprezintă „falsul" (sau mai bine zis „absurdul") și are unica schemă adițională $\frac{\dagger}{P}$ care, conform cu explicația lui Gentzen, înseamnă „dacă este valabil ceea ce este fals, atunci este valabilă orice propoziție". *Y* din regulile (10) și (11) este o literă schematică, la fel ca și celelalte majuscule, însă *x* de sub linia din regula (9) și la fel *x* din *Fx/P* din regula (12) sînt variabile libere, al căror domeniu de acțiune nu depășește linia orizontală. Semnul pe care l-am folosit în formularea regulilor (4), (5), (7) și (12) poate fi considerat ca o abreviere pentru „implică". Desigur că el vizează să prezinte linia orizontală ca o schemă de inferență; dar deoarece are rolul gramatical de verb, semnele din stînga și cele din dreapta trebuie interpretate ca nume, adică în calitate de desemnări pentru propoziții. De aceea, o redare completă a unui enunț implicativ ar avea forma §*P*/§*Q*, unde semnul § este o abreviere pentru „că" sau „propoziția că"; este însă convenabil să adoptăm convenția că semnul § poate fi absorbit de către / după cum în propoziția engleză „He says it is hot" (*El spune că este cald*) cuvîntul „că" este absorbit de către „says". În amîndouă cazurile obținem o simplificare fără ambi-

guităţi. Gentzen, care utilizează în loc de P/Q notaţia $\overset{[P]}{Q}$, spune că litera dintre parantezele drepte stă în locul unei supoziţii din care se derivă consecinţa[19]. Dar sensul este acelaşi; ceea ce numim uneori derivare a unei consecinţe dintr-o supoziţie este în realitate procesul prin care ne convingem că supoziţia impune consecinţa.

Pare destul de clar că de fapt Gentzen a prezentat logica într-un mod mult mai natural decît Frege, Whitehead şi Russell. Este adevărat că regulile sale sînt mai numeroase decît regulile şi axiomele din *Principia Mathematica*, dar aici fiecare semn este introdus separat, astfel încît devine posibilă demonstrarea echivalenţelor care în *Principia Mathematica* sînt folosite ca definiţii pentru semnele care nu sînt considerate ca primitive. Apoi, printr-o procedură simplă, asemănătoare cu aceea pe care a folosit-o Hrisip în elaborarea sistemului său de logică elementară, schemele de inferenţă de bază pot furniza altele. De exemplu, putem demonstra că $P \cdot Q / P \vee Q$ construind argumentarea cu osatura

$$\dfrac{\dfrac{P \cdot Q}{P}\ (2a)}{P \vee Q}\ (3a)$$

unde numerele din dreapta liniilor orizontale arată schemele de bază care au fost utilizate pentru a asigura trecerea. Dacă vrem, din orice schemă de inferenţă putem deriva o configuraţie de enunţuri-truisme, indiferent dacă acea schemă este de bază sau derivată, şi anume aplicînd regula (7), adică principiul condiţionalizării, folosit şi de către Hrisip.

Cu toate acestea, trebuie să admitem că sistemul de mai sus este întrucîtva neelegant. Într-un anumit fel, regulile (4), (5), (7) şi (12) depind de alte reguli. Ceea ce rezultă dintr-o supoziţie trebuie să rezulte în concordanţă cu o anumită regulă şi, evident, aceasta nu poate fi regula care se formulează tocmai cu ajutorul supoziţiei respective. De ce oare a considerat Gentzen că este necesar să introducă asemenea complicaţii tocmai aici? Răspunsul se poate găsi comparînd regulile pentru conjuncţie cu regulile pentru disjuncţie. Este binecunoscut că în algebra logicii semnele pentru conjuncţie şi disjuncţie sînt duale între ele şi totuşi regula (4), care stabileşte eliminarea semnului disjuncţiei, nu corespunde cu regula (1), care conduce la introducerea

[19] În acelaşi an, S. Jaśkowski a publicat în mod independent memoriul „Despre regulile supoziţiei în logica formală", *Studia Logica*, nr. 1 (Varşovia, 1934), care este o dezvoltare a unor rezultate obţinute încă în 1926 în seminarul condus de J. Łukasiewicz. Dezvoltările ulterioare ale deducţiei naturale urmează mai curînd metoda de expunere a lui Jaśkowski, dar procedura lui Gentzen sugerează teoria desfăşurării explicată mai jos.

semnului conjuncţiei, în acelaşi chip în care regulile pentru introducerea semnului disjuncţiei (3a) şi (3b) corespund cu regulile pentru eliminarea semnului conjuncţiei (2a) şi (2b). Dacă am încerca să scriem ceva care să corespundă în felul dorit, am obţine

$$\frac{P \vee Q}{P \quad Q},$$

adică o aşezare a semnelor care nu se poate interpreta ca o schemă de inferenţă, deoarece sub linie se află două expresii propoziţionale. Desigur, am putea introduce o convenţie astfel încît o asemenea aşezare de semne ca cea tipărită mai sus să poată fi considerată drept o îmbinare a două scheme de inferenţă, adică drept un fel de a spune că fiecare dintre expresiile propoziţionale de sub linie se poate infera din expresia de deasupra liniei. Dar noi nu urmărim aceasta, pentru că astfel s-ar crea o confuzie între $P \vee Q$ şi $P \cdot Q$. Pe scurt, trăsăturile curioase ale sistemului lui Gentzen par să-i fi fost impuse de către faptul evident că o inferenţă nu poate să aibă decît o singură concluzie, deşi ea poate avea două sau mai multe premise. Probabil că tocmai aceasta l-a determinat pe Pseudo-Scotus să nu completeze prezentarea sa a paradoxului *consequentiae* cu o demonstraţie simplă că o propoziţie formal-necesară se poate deriva formal din orice altă propoziţie[20].

Dacă vrem să îmbunătăţim rezultatul lui Gentzen, trebuie să urmăm o idee propusă în partea a doua a memoriului său şi să tratăm derivarea, adică inferenţa deductivă, ca un caz particular a ceea ce vom numi desfăşurare (development). Din nefericire, în această direcţie nu există o terminologie recunoscută. Dar se poate spune la figurat că aici se stabileşte domeniul în care trebuie să se afle adevărul, dacă se acceptă anumite premise. Dacă, după examinarea unor premise, exprimate eventual prin P şi Q, vom constata că anumite alte propoziţii, exprimate eventual prin R şi S, nu pot fi amîndouă false cînd premisele sînt amîndouă adevărate, atunci se poate spune că sîntem obligaţi la desfăşurarea acestor premise. Nici una dintre propoziţiile exprimate prin R şi S nu este o concluzie a inferenţei, dar se poate spune că ele sînt limitele desfăşurării respective. Deşi pentru convenienţă vom presupune că ele se exprimă prin propoziţii la modul indicativ, trebuie subînţeles că în contextul desfăşurării nu se asertează nimic. Pentru a limpezi aceasta putem, dacă preferăm, să scriem semne de întrebare după expresiile respective, dar aceasta nu este necesar în ceea ce urmează, deoarece formulele limitelor neasertate

[20] A se vedea volumul I, cap. IV, § 5.

se vor recunoaşte întotdeauna ca atare, datorită poziţiei pe care o ocupă în tabelele de desfăşurare pe care le vom construi.

O desfăşurare foarte simplă poate avea forma

$$\frac{P \quad Q}{R \quad S},$$

dar între formulele iniţiale, care exprimă premisele, şi formulele finale, care exprimă limitele, pot exista numeroase expresii intermediare, adică expresii care figurează atît deasupra liniei cît şi dedesubtul ei. Dacă o desfăşurare are o singură formulă finală, deşi aceasta se poate repeta de mai multe ori la capătul de jos al diferitelor ramuri descendente, desfăşurarea respectivă este o derivare a propoziţiei exprimate prin această formulă finală. Evident, o desfăşurare care nu este o derivare se poate continua întotdeauna astfel încît să devină o derivare: n-avem decît să adăugăm la fiecare ramură descendentă o formulă care este disjuncţia tuturor formulelor finale existente. Dacă o derivare nu are premise sau, mai exact, nu are premise care să nu poată fi înlocuite cu oricare altele, atunci această derivare este o demonstraţie. Aceste relaţii se lămuresc mai bine dacă luăm în consideraţie şi lucrăm cîteva exemple.

Exact după cum o derivare se spune că este validă dacă premisele impun concluzia, tot astfel putem spune că o desfăşurare este validă dacă premisele *cuprind* limitele la care conduce desfăşurarea. Aici îl urmăm pe Carnap, care în lucrarea sa *Formalization of Logic* a introdus denumirea de „cuprindere logică" (logical involution) pentru relaţia care are loc între două mulţimi de propoziţii atunci cînd este imposibil ca toate propoziţiile din prima mulţime să fie adevărate şi simultan toate propoziţiile din a doua să fie false. În acest caz, implicaţia trebuie să fie considerată ca o cuprindere a unei mulţimi care conţine un singur membru; şi după cum asertarea unei implicaţii ia o formă ca *P, Q/R,* tot astfel asertarea unei cuprinderi care nu este implicaţie ia o formă ca *P, Q/R, S,* unde virgulele dinainte şi de după / servesc pentru a separa expresiile propoziţiilor din mulţimile relevante. În ceea ce urmează vom utiliza convenţia că semnul / poate absorbi prefixele de forma §, care altfel ar fi ataşate la toate expresiile propoziţiilor scrise anterior şi posterior; dar este important să înţelegem că atunci cînd scriem / între expresii fără prefixe, aceasta nu înseamnă că le transformăm într-o particulă gramaticală sau conectiv distinct de verb. Pe scurt, o formulă de felul *P, Q/R, S* este doar o abreviere pentru o formulă după tiparul {§*P*, §*Q*} / {§*R*, §*S*} şi, ca atare, pentru o propoziţie cum ar fi *Mulţimea care constă din propoziţia că P are loc şi propoziţia că Q are loc cuprinde mulţimea care constă din propoziţia că R are loc şi propoziţia că S are loc.* Deoarece însă putem omite fără ambiguitate atît acoladele cît şi prefixele, vom

proceda întotdeauna astfel şi chiar ne vom permite libertatea de a rezerva acoladele pentru o utilizare specială, aşa cum vom preciza acum.

Schemele de desfăşurare de bază necesare pentru logica generală sînt următoarele:

(1) $\dfrac{P \quad Q}{P \cdot Q}$ (2a) $\dfrac{P \cdot Q}{P}$ (2b) $\dfrac{P \cdot Q}{Q}$

(3a) $\dfrac{P}{P \vee Q}$ (3b) $\dfrac{Q}{P \vee Q}$ (4) $\dfrac{P \vee Q}{P \quad Q}$

(5) $\dfrac{*}{P \sim P}$ (6) $\dfrac{P \sim P}{*}$

(7a) $\dfrac{*}{P \quad P \supset Q}$ (7b) $\dfrac{Q}{P \supset Q}$ (8) $\dfrac{P \quad P \supset Q}{Q}$

(9) $\dfrac{\{Fx\}}{(x)Fx}$ (10) $\dfrac{(x)Fx}{FY}$

(11) $\dfrac{FY}{(\exists x)Fx}$ (12) $\dfrac{(\exists x)Fx}{\{Fx\}}$

Asteriscul folosit în formularea regulilor (5), (6) şi (7a) seamănă cu Jolly Joker din jocurile de cărţi, căci el poate fi considerat ca un substitut pentru orice expresie propoziţională vrem. Am fi putut folosi în locul său o literă mare, să zicem R, dar asteriscul serveşte pentru scopul adiţional de a atrage atenţia asupra acestor reguli, care prezintă o importanţă deosebită în demonstraţie. În afară de această utilizare, unicele elemente noi sînt aici apariţia a două expresii sub liniile din regulile (4), (5) şi (7a) (adică în trei din locurile unde Gentzen considera necesar să introducă supoziţii) şi utilizarea semnului $\{Fx\}$ în regulile (9) şi (12) pentru a reprezenta mulţimea tuturor valorilor posibile ale funcţiei denumită $F\hat{x}$. Dar aceste modificări sînt suficiente pentru a asigura simetria şi a ne permite introducerea şi eliminarea semnelor formale prin reguli care par cele mai fireşti posibile. Astfel, regulile (5) şi (6) sînt versiuni ale principiului terţului exclus şi ale principiului non-contradicţiei, iar celelalte, cu o singură excepţie, sînt evidente.

Regula (7a), care la prima vedere pare întrucîtva curioasă, este de fapt echivalentă cu principiul după care condiţionalul lui Filon este implicat de negaţia antecedentului său. Dacă vrem, aceasta din urmă se poate obţine uşor ca regulă derivată.

(13) $\sim P / P \supset Q$.

Demonstraţie:

$$\dfrac{\sim P \quad \dfrac{P \qquad P \supset Q}{*}\,(6)}{*}\,(7a)$$

Dar (7a) este de preferat ca regulă de bază din motive de eleganță: eleganța pretinde ca fiecare semn formal să fie introdus separat, adică nici o regulă de bază să nu se refere la mai mult decît un singur semn.

În general, schemele de desfășurare noi se pot deriva întotdeauna din cele deja date, dacă transferăm o expresie propozițională de cealaltă parte a liniei orizontale și, simultan, adăugăm sau scoatem un semn de negație. Iată, de exemplu, un nou principiu de desfășurare derivat din regula (4):

(14) $\sim Q/P,\ \sim (P \vee Q)$.

Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vee Q}{P \quad Q}\,(4) \quad \sim Q}{*}\,(6).}{*} \qquad \dfrac{}{\sim (P \vee Q)}\,(5)$$

Virgula pe care am inserat-o între cele două expresii de după bară trebuie, desigur, să arate că aceste expresii se iau din extremitățile unor ramuri descendente separate. La fel, o virgulă așezată între două expresii anterioare barei arată că ele trebuie să fie considerate ca fiind luate din părțile cele mai de sus ale unor ramuri ascendente separate.

Cînd lucrăm la o desfășurare, este esențial ca formulele individuale care sînt deja conectate, fie direct printr-o singură linie orizontală, fie indirect prin mai multe linii orizontale, să nu fie din nou conectate în vreun fel. În caz contrar am putea obține configurații absurde, cum ar fi

$$\dfrac{\dfrac{P \vee Q}{P \quad Q}}{P \cdot Q}.$$

La fel, dacă Fx' se introduce sub $(\exists x)Fx$, el nu are voie să fie urmat de $(x)Fx$, căci schema absurdă

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx}}{(x)Fx}$$

cuprinde aceeași greșeală de a lega jos ceea ce fusese deja legat sus, și anume acele formule care exprimă valori ale funcției denumită $\hat{Fx}$. Desfășurarea este o generalizare a tehnicii pe care matematicienii o numesc demonstrație prin analiza cazurilor, iar cazurile odată demarcate ca alternative nu mai trebuie niciodată să fie considerate împreună.

Principiul condiționalizării, care intervine ca regulă de bază în sistemul lui Gentzen, se poate demonstra foarte ușor în acest nou sistem. Pentru aceasta, este necesar doar să fie demonstrabilă propoziția exprimată prin $P \supset Q$ îndată ce propoziția exprimată prin P impune propoziția exprimată prin Q, iar aceasta se arată după cum urmează:

(15) *Dacă* P/Q, *atunci* $*/P \supset Q$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{Q}\ \text{(Ipoteză)}}{P \supset Q}\ (7b)}{*}\qquad P \supset Q\ (7a)$$

Pentru a ilustra pe larg metoda desfășurării este convenabil să demonstrăm regulile și axiomele din versiunea uzuală a logicii generale. În primul rînd, vom arăta echivalența dintre $P \supset Q$ și $\sim P \vee Q$, adică echivalența care în *Principia Mathematica* este utilizată pentru a defini condiționalul lui Filon. Aceasta se poate obține prin două derivări.

(16) $P \supset Q/\sim P \vee Q$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{P \supset Q \quad \dfrac{P}{Q}\ (8)}{\sim P \vee Q}\ (3b)}{*}\qquad \dfrac{\sim P}{\sim P \vee Q}\ (5)\ (3a)$$

(17) $\sim P \vee Q/P \supset Q$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\sim P \vee Q}{\dfrac{\sim P}{P \supset Q}\ (13)\qquad \dfrac{Q}{P \supset Q}\ (7b)}\ (4).$$

Acum să observăm că avem *modus ponendo ponens*, adică regula detașării pentru condiționalul filonian, ca o regulă de bază, și anume (8). În al treilea rînd, construim demonstrații pentru cele patru axiome independente alese de Whitehead și Russell pentru logica elementară, adică mai exact: arătăm validitatea schemelor de axiome corespunzătoare.

(18) $*/(P \vee P) \supset P$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{(P \vee P) \supset P}\ (7b) \qquad \dfrac{P}{(P \vee P) \supset P}\ (7b)}{P \vee P}\ (4)}{*}\qquad (P \vee P) \supset P\ (7a)$$

(19) $*/P \supset (P \vee Q)$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{P \vee Q}\,(3a)}{P \supset (P \vee Q)}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{P \supset (P \vee Q)}\,(7a)}{}$$

(20) $*/(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{Q \vee P}\,(3b)}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7b) \qquad \dfrac{\dfrac{Q}{Q \vee P}\,(3a)}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7b)}{P \vee Q}\,(4) \qquad \dfrac{*}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7a)}{}$$

(21) $*/(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{P \vee R}\,(3a)}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q \supset R}{\sim Q \vee R}\,(16)}{\sim Q}\,(4) \qquad \dfrac{R}{|\cdot|}\,(3b)}{\sim (P \vee Q)}\,(14)}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(13)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7a)}{}$$

unde $|\cdot|$ este o notație prescurtată pentru

$$\dfrac{\dfrac{P \vee R}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b)$$

În sfîrșit, construim demonstrații pentru alte două scheme de axiome și două reguli de inferență, necesare pentru o versiune a logicii generale asemănătoare cu aceea prezentată de Hilbert și Ackermann, dar care în locul axiomelor utilizează schemele de axiome.

(22) $*/(x)Fx \supset FY$.
Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(x)Fx}{FY}\,(10)}{(x)Fx \supset FY}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{(x)Fx \supset FY}\,(7a)}{}$$

(23) $*/FY \supset (\exists x)Fx$.

Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{FY}{(\exists x)Fx}\,(11)}{FY \supset (\exists x)Fx.}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{FY \supset (\exists x)Fx}\,(7a)}{}$$

(24) Dacă P nu conține pe x ca variabilă liberă, atunci:

$$P \supset Fx/P \supset (x)Fx.$$

Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \supset Fx \quad P}{Fx}\,(8)}{(x)Fx}\,(9)}{P \supset (x)Fx}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{P \supset (x)Fx}\,(7a)$$

(25) Dacă P nu conține pe x ca variabilă liberă, atunci:

$$Fx \supset P/(\exists x)Fx \supset P.$$

Demonstrație:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx \supset P \quad Fx}\,(12)}{P}\,(8)}{(\exists x)Fx \supset P.}\,(7b) \qquad \dfrac{*}{(\exists x)Fx \supset P}\,(7a)$$

Toate aceste derivări sînt lesne de urmărit, cu excepția celor de la (24) și (25), care au nevoie de unele explicații. Atunci cînd enunțăm regula (9) sub forma $\dfrac{\{Fx\}}{(x)Fx}$ și regula (12) sub forma $\dfrac{(\exists x)Fx}{\{Fx\}}$, utilizăm acoladele pentru a preciza că avem de-a face cu clasa tuturor propozițiilor care sînt valori ale funcției exprimate prin Fx, adică ceea ce scriem sînt abrevieri pentru

$$\dfrac{Fx_1 \; Fx_2 \; Fx_3 \text{ etc.}}{(x)Fx}$$

și

$$\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx_1 \; Fx_2 \; Fx_3 \text{ etc.}},$$

unde Fx_1, Fx_2, Fx_3 etc. se presupune că reprezintă diferitele valori ale funcției. Dar este evident imposibil să construim tabele de desfășurare avînd un număr infinit de ramuri. Atunci cum putem utiliza

vreodată regulile noastre, care nu sînt finitiste? Evident, unica posibilitate este de a demonstra ceva cu generalitate completă pentru toate valorile funcției exprimate prin semnul Fx, utilizînd acest semn *ca și cum el ar exprima o valoare* și nu funcția însăși. În aceasta constă metoda de raționament cu ajutorul variabilelor libere asupra căreia am atras atenția în secțiunea anterioară. Dacă putem arăta în acest chip că propoziția exprimată prin P implică orice valoare a funcției exprimată prin Fx, putem demonstra că $P/(x)Fx$ cu ajutorul desfășurării

$$\frac{\dfrac{P}{Fx_1}\ \dfrac{P}{Fx_2}\ \dfrac{P}{Fx_3}\ \text{etc.}}{(x)Fx}.$$

Tot astfel, dacă putem arăta în acest chip că orice valoare a funcției exprimată prin Fx implică propoziția exprimată prin P, putem demonstra că $(\exists x)Fx/P$ prin desfășurarea

$$\frac{(\exists x)Fx}{\dfrac{Fx_1}{P}\ \dfrac{Fx_2}{P}\ \dfrac{Fx_3}{P}\ \text{etc.}}.$$

Desigur că în amîndouă cazurile este esențial ca litera P să fie cu adevărat expresia unei propoziții și nicidecum o abreviere a unei alte expresii care conține pe x ca variabilă liberă, adică așa cum intervine x în Fx. Toate acestea sînt prinse în formulările lui (24) și (25) de mai sus și tocmai de aceea aceste principii au un aspect mult mai complicat decît regulile (9) și (12).

În lucrarea sa *Methods of Logic*, care este o tentativă recentă de îmbunătățire a tehnicii investigației logice, Quine utilizează o variantă a metodei tabelelor de adevăr pentru logica propozițională, variantă care furnizează și exigențele adiționale ale logicii generale prin patru reguli asemănătoare celor de mai sus. În particular, el dă o regulă de generalizare universală și o regulă de particularizare existențială analoage regulilor noastre (9), respectiv (12) (cu deosebirea că ele nu conțin acolade pentru a indica referirea la toate valorile unei funcții) și prescrie o restricție pentru a preveni trecerile nelegitime cum sînt cele din schema

$$\frac{(\exists x)Fx}{\dfrac{Fx}{(x)Fx}}.$$

Este neîndoielnic că atunci cînd sînt folosite împreună cu procedeul supozițiilor introdus de Gentzen și Jaśkowski, aceste reguli simplifică construirea demonstrațiilor. Dar Quine însuși spune că proce-

dura sa este intrarea în Țara de dincolo de Oglindă[21]; și așa trebuie să i se pară, odată ce ea este prezentată ca o cale de a obține avantaje care, în stadiul anterior al logicii, se pot obține prin construcția desfășurărilor cu mai multe ramuri.

4. *Logica modală*

În lucrarea sa *Begriffsschrift*, Frege a înlăturat distincțiile modale ca fiind nerelevante pentru țelurile sale. După cum explică el, dacă cineva spune că ceva trebuie să fie în cutare fel, atunci utilizează cuvîntul „trebuie" pentru a sublinia că posedă cunoașterea unui adevăr universal din care se poate deduce propoziția respectivă; analog, dacă cineva spune că ceva poate să fie în cutare fel, el recunoaște că nu știe nimic din care ar putea rezulta negarea propoziției respective. Dacă Frege are dreptate, atunci cuvinte ca „trebuie" și „poate", „necesar" și „posibil" cuprind o referire camuflată la cunoașterea umană pentru care nu este loc în logica pură și, deci, ar fi o eroare să presupunem, împreună cu Aristotel și discipolii săi, că o parte a sarcinii logicianului ar fi aceea de a stabili reguli de inferență aplicabile numai la propozițiile modale. Dintre succesorii lui Frege în logică, mulți au fost de acord cu acest punct de vedere, alții însă au susținut că opera lui Frege trebuie să fie completată printr-o teorie a modalității, deoarece noțiunile de necesitate și imposibilitate nu aparțin, cum credea el, epistemologiei sau vreunei alte științe, cu excepția logicii însăși. În această secțiune vom examina ce anume este necesar pentru o asemenea completare.

În timpurile moderne, interesul pentru logica modală începe odată cu apariția lucrării lui C. I. Lewis *Survey of Symbolic Logic* în 1918. Această teorie este cunoscută îndeobște sub numele de logica implicației stricte, deoarece la origine ea a pornit de la implicația strictă, pe care Lewis a opus-o acelei prezentări a implicației pe care o considera greșită. În comentariile neformalizate la propriul lor sistem de logică, Whitehead și Russell au utilizat expresia *P implică material Q*, pentru $P \supset Q$ și au încercat să justifice acest mod de a vorbi subliniind că

$$\frac{P \quad P \supset Q}{Q} .$$

este indubitabil o schemă de inferență validă. Acest fel de a vorbi este nefericit, deoarece sugerează în mod greșit că semnul $\supset$ exprimă o conexiune de semnificații între semnele propoziționale care sînt

[21] *Methods of Logic* (ediția întîi), p. 161.

antecedentul şi consecventul său. Cei care îl utilizează în felul acesta ajung la paradoxurile că o propoziţie falsă, doar pentru că este falsă, implică orice propoziţie, şi că o propoziţie adevărată, doar pentru că este adevărată, este implicată de orice propoziţie. Lewis spunea însă că o propoziţie implică alta în sensul strict al cuvîntului, dacă şi numai dacă este *imposibil* ca prima să fie adevărată şi simultan a doua să fie falsă, iar pentru a exprima această relaţie între două propoziţii exprimate prin P şi Q el scria $P \prec Q$. În definiţia pe care a dat-o implicaţiei, Lewis l-a urmat pe H. MacColl, care dăduse anumite sugestii pentru logica modală în lucrarea *Symbolic Logic and its Applications*, publicată în 1906. Ca şi MacColl, Lewis admitea că, potrivit acestei definiţii, o propoziţie imposibilă trebuie să implice orice propoziţie, iar propoziţia necesară va fi implicată de orice propoziţie. Dar el susţinea că aceste două consecinţe n-ar fi de fapt paradoxale şi nu ar discredita opinia lui că relaţia pe care a numit-o de implicaţie strictă este tocmai relaţia care justifică inferenţa de la o premisă la o concluzie în raţionamentul deductiv. Unii critici au spus că implicaţia sa strictă* nu e unul şi acelaşi lucru cu implicaţia propriu-zisă (adică cu conversa lui „a urma din") deoarece ea poate avea loc pe o cale pur exterioară propoziţiilor respective, după cum ne arată paradoxurile. Dar nici unul dintre ei n-a reuşit să elimine aşa-zisele paradoxuri, fără a elimina în acelaşi timp unele raţionamente pe care le considerăm îndeobşte valide, de exemplu cele cu ajutorul cărora Pseudo-Scotus demonstra paradoxurile în evul mediu. Se pare că cei care au participat la dezbaterea problemei nu au sesizat asemănarea izbitoare a doctrinelor lor cu ideile vehiculate încă în antichitate, iar apoi în evul mediu.

Ultima prezentare a logicii modale a lui Lewis se poate găsi în cartea *Symbolic Logic*, pe care el a publicat-o în 1932 împreună cu C. H. Langford. Aici rombul este luat ca simbol nedefinit, iar P implică strict Q, $P \prec Q$, se introduce ca o abreviere pentru $\sim \Diamond (P . \sim Q)$. Celelalte două simboluri nedefinite sînt cele ale negaţiei şi conjuncţiei, iar formulele axiomatice pe care le utilizează în deducţiile sale sînt următoarele:

B1. $p \cdot q \prec q \cdot p$
B2. $p . q \prec p$
B3. $p \prec p \cdot p$
B4. $(p \cdot q) \cdot r \prec p \cdot (q \cdot r)$
B5. $p \prec \sim \sim p$
B6. $[(p \prec q) \cdot (q \prec r)] \prec (p \prec r)$
B7. $[p \cdot (p \prec q)] \prec q$
B8. $\Diamond (p . q) \prec \Diamond p$
B9. $(\exists p, q) [\sim (p \prec q) \cdot \sim (p \prec \sim q)]$.

Litera B care figurează în denumirea fiecărui postulat arată că e vorba despre postulatele dintr-o a doua mulţime, considerată ca

* Din motive de ordin tipografic folosim în intreaga lucrare pentru implicaţia strictă semnul $\prec$ în locul semnului —3.

distinctă de sistemul său din *Survey*. În afară de regula de substituţie pentru variabile şi regula de înlocuire reciprocă a expresiilor care sînt strict echivalente, se mai permit două metode de derivare: una după schema

$$\frac{P \quad P \prec Q}{Q},$$

iar a doua după schema

$$\frac{P \quad Q}{P \cdot Q}.$$

Evident, prima nu este decît prototipul detaşării sau *modus ponens* cu $P \prec Q$ în loc de $P \supset Q$; cît priveşte a doua, pe care Lewis o numeşte adjuncţie, ea este necesară în sistemul său din cauza modificării lui *modus ponens*. În *Principia Mathematica*, care permite inferenţa de la P şi $P \supset Q$ la Q, ne putem dispensa de regula lui Lewis de adjuncţie, din cauză că $p \supset [q \supset (p \cdot q)]$ este o teoremă. Dar Lewis, deşi admite această teoremă în sistemul său, nu o poate folosi ca premisă pentru derivarea lui $P \cdot Q$ din P şi Q deoarece din punctul său de vedere prezenţa aşa-numitei implicaţii materiale nu este suficientă pentru a justifica deducţia, iar $p \prec [q \prec (p \cdot q)]$ nu este teoremă în sistemul său. În prezenţa regulii de detaşare menţionată mai sus, fiecare din axiomele sale corespunde unei reguli de inferenţă dintr-o premisă. De exemplu, atunci cînd se ia versiunea lui Lewis a lui *modus ponens*, B2 corespunde cu regula 2(a) din sistemele prezentate în secţiunea precedentă.

Primele şapte din propoziţiile a căror listă am dat-o mai sus s-ar putea numi axiome de bază ale logicii modale a lui Lewis, deoarece ele constituie sistemul S1, pe care el îl consideră ca fiind cel mai strict, şi apar de asemenea ca axiome sau teoreme în toate sistemele pe care le concepe ca meritînd să fie puse în discuţie. Dar ele nu formează o mulţime completă în sensul tehnic al acestei expresii şi conduc la o uriaşă complicaţie a modalităţilor de ordin mai înalt, de exemplu la posibilitatea necesarului, necesitatea posibilităţii şi aşa mai departe. De aceea, O. Becker[22] şi alţii au propus diferite completări, dintre care cele mai interesante, dacă folosim notaţia lui Lewis, sînt:

C10. $\sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$ sau $\Diamond \Diamond p \prec \Diamond p$,
C11. $\Diamond p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p$ sau $\Diamond \sim \Diamond p \prec \sim \Diamond p$.

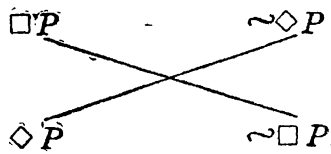
Ele au fost denumite respectiv principiul reducerii slabe şi principiul reducerii tari, deoarece amîndouă servesc la reducerea complexităţii

[22] „Zur Logik der Modalitäten", *Jahrbuch für Philosophie und phenomenologische Forschung*, XI (1930), pp. 497–548.

modalităţilor de ordin superior, deşi nu în aceeaşi măsură. Împreună cu axiomele de bază, C11 este deductiv echivalent cu C10 luat împreună cu principiul lui Brouwer $p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p$. Dacă utilizăm pătratul ca o abreviere pentru $\sim \Diamond \sim$ (adică în sensul că „este necesar ca") şi utilizăm principiile dublei negaţii şi contrapoziţiei pentru implicaţia strictă, putem exprima cele două principii de mai sus, fără a folosi negaţia, în felul următor:

$$\text{C10.}\ \Box p \prec \Box \Box p,$$
$$\text{C11.}\ \Diamond p \prec \Box \Diamond p.$$

Pentru fiecare din ele conversa se poate demonstra, astfel încît putem spune că primul principiu ne permite să identificăm necesitatea unei propoziţii cu necesitatea necesităţii sale, în timp ce al doilea ne permite să identificăm posibilitatea unei propoziţii cu necesitatea posibilităţii sale. Efectul adăugării primului principiu, adică a principiului mai slab, la axiomele de bază este eliminarea necesităţilor care nu sînt ele însele necesare, ci doar contingente, adică mai exact: este exigenţa ca oricine care vrea să vorbească în acest mod să admită că el nu utilizează cuvîntul „necesar" în sensul în care este folosit în logica modală semnul pătratului. Efectul adăugării principiului al doilea este pretenţia ca toate propoziţiile modale să fie sau necesar adevărate, sau necesar false. Dacă îl adoptăm, atunci admitem doar patru modalităţi (în afară de adevăr şi fals, care sînt uneori incluse deoarece necesitatea implică adevărul, iar adevărul implică posibilitatea), şi anume următoarele, care se constituie în pătratul opoziţiilor



În adevăr, în această ipoteză toate modalităţile de ordinul al doilea se reduc la modalităţi de ordinul întîi. De exemplu, avem $\Diamond \Box P = \Box P$, ceea ce Becker găseşte că este oarecum paradoxal. Lewis însuşi înclină să respingă ambele principii de reducere şi deci să permită modalităţi de ordin superior.

S-a demonstrat de către P. Henle[23] că sistemul cel mai economic de logică modală, pe care Lewis îl numeşte S5 (adică sistemul determinat de B1—7 şi C11) este echivalent cu algebra lui Boole—Schröder

[23] Lewis şi Langford, *Symbolic Logic*, p. 501.

(nu cu algebra cu două valori) atunci cînd elementele algebrei sînt propoziţii iar semnul modal $\diamond$ se introduce prin următoarele reguli:

$$\diamond P = 1 \text{ dacă şi numai dacă } P \neq 0,$$
$$\diamond P = 0 \text{ dacă şi numai dacă } P = 0.$$

Pe scurt, acest sistem, cu principiul său de reducere tare, realizează ceea ce avea în vedere Boole cînd spunea în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic* că semnul 1 ar putea fi considerat ca reprezentant al sumei tuturor posibilităţilor, sumă pe care el o denumea Universul propoziţiei.

Deşi S5 este cel mai simplu dintre sistemele pe care le consideră Lewis, nici el şi nici un alt sistem nu dă o caracterizare completă a implicaţiei stricte fără regulile lui Henle, deoarece toate axiomele rămîn adevărate dacă $\diamond P$ se consideră ca echivalent cu P, iar $\prec$ se ia doar ca o variantă tipografică pentru $\supset$. Se pare că tocmai pentru a exclude o asemenea interpretare indezirabilă a noului său semn Lewis a propus axioma existenţială foarte stranie:

$$\text{B9. } (\exists p, q)[\ \sim (p \prec q) \cdot \sim (p \prec \sim q)].$$

Aceasta înseamnă că există cel puţin două propoziţii astfel încît prima să nu implice nimic cu privire la adevărul sau falsul celei de-a doua, iar aceasta are loc pentru implicaţia strictă, dar nu pentru implicaţia materială. Însă această axiomă are o formă cu totul diferită de celelalte. În timp ce acelea, luate împreună cu principiile lui Lewis de substituţie, detaşare şi adjuncţie, permit orice raţionament după anumite tipare specifice, aceasta neagă universalitatea pe care o exprimă axiomele cu variabile libere, iar introducerea ei are ca efect *respingerea* formulei $(p \prec q) \vee (p \prec \sim q)$. Poate că cea mai simplă cale pentru realizarea a ceea ce îşi propune Lewis ar fi de a spune de-a dreptul că schema

$$\frac{P \supset Q}{P \prec Q}$$

nu este validă. Nu trebuie să ne mirăm că o măsură de acest fel este necesară pentru a exclude o interpretare indezirabilă a sistemului modal în care $\prec$ este nedefinit. Implicaţia materială se poate caracteriza complet prin reguli de inferenţă convenabile, dar aceasta doar pentru că ea este o funcţie de adevăr. Dacă luăm ca primitivă implicaţia strictă, cel mai bun lucru pe care îl putem face în această direcţie este de a stabili exhaustiv şi exclusiv proprietăţile pe care ea le are în comun cu implicaţia materială. Pe de altă parte, fiind dată definiţia de mai sus pentru implicaţia strictă şi regulile lui Henle, S5 este complet, iar B9 este inutil.

Să observăm că în prezentarea sistemului său Lewis scrie $\prec$ între expresii propoziționale (mai exact: între variabile care marchează locuri pentru atare expresii) ca și cum acest semn ar avea același statut gramatical ca $\supset$; de asemenea el scrie $\Diamond$ înaintea expresiilor propoziționale la fel cum scrie $\sim$. Dacă vrem să dăm o parafrază în limba uzuală astfel încît toate formulele să fie reprezentate prin propoziții de formă aproximativ asemănătoare, am putea eventual citi $P \prec Q$ ca *Dacă P atunci Q*, iar $\Diamond P$ ca *Posibil P*. Forma condițională a enunțurilor a fost utilizată adesea în antichitate atît de către Aristotel, cît și de către stoici, pentru a indica deductibilitatea consecventului din antecedent, ceea ce Lewis urmărește să simbolizeze cu semnul lui specific $\prec$, iar în vorbirea uzuală folosim adesea prefixul „posibil" pentru expresii care din punct de vedere gramatical pot apare și ca propoziții independente. Dar obiectivul principal al lui Lewis este de a susține că deductibilitatea unei concluzii din premise într-un raționament valid depinde de existența între ele a relației denumită implicație strictă și că această relație nu se poate defini cu ajutorul funcțiilor de adevăr. Pentru a sublinia acest detaliu am putea, dacă vrem, să citim $P \prec Q$ ca *Propoziția că P are loc implică strict propoziția că Q are loc*, dar numai dacă presupunem că Lewis a adoptat în mod tacit o convenție pentru semnul său asemănătoare cu cea din secțiunea noastră precedentă, unde semnul / poate absorbi prefixul pe care îl așezăm în fruntea unor expresii propoziționale pentru a determina desemnări propoziționale. Dacă facem o supoziție similară în ce privește rombul lui Lewis, putem să citim eventual $\Diamond P$ ca *Este posibil că P*. Lewis personal nu discută diferitele moduri de a citi formulele sale, iar succesorii săi s-au exprimat adesea ca și cum alegerea între aceste diferite moduri de citire ar fi pur și simplu o chestiune de gust literar. Or, este important să ne dăm seama că a doua manieră de citire dă o prezentare mult mai explicită a diferiților factori pe care îi cuprinde tentativa lui Lewis, și de aceea, din punct de vedere filosofic, este preferabilă. Atunci cînd Whitehead și Russell vorbesc despre $P \supset Q$ ca un enunț de implicație materială, se pare că ei confundă două chestiuni diferite, și anume (I) „Ce anume justifică inferența de la propoziția că are loc P la propoziția că are loc Q?" și (II) „Care sînt premisele adiționale cele mai slabe care împreună cu premisa că are loc P sînt suficiente pentru a infera concluzia că are loc Q?" Dacă inferența de la propoziția că are loc P la propoziția că are loc Q este cu adevărat justificată, la prima întrebare se poate răspunde prin enunțarea unei relații de implicație între cele două propoziții, dar dacă este necesară o premisă suplimentară, atunci între cele două propoziții menționate nu avem o implicație propriu-zisă și tot ce putem face pentru a răspunde la a doua întrebare este de a da formula $P \supset Q$.

Această formulă se construiește prin utilizarea semnelor propoziționale P și Q, dar ea nu este *despre* propozițiile pe care le exprimă. Desigur, o putem înlocui prin propoziția echivalentă *sau nu P, sau Q*, iar apoi să dezvoltăm aceasta pînă la forma *sau nu este cazul că are loc P, sau este cazul că are loc Q*, care conține desemnările propoziționale *că are loc P* și *că are loc Q*. Dar expresia mai lungă nu este o analiză a sensului celei mai scurte, căci ea nu face decît să urmeze același șablon cu inflație verbală. Pe de altă parte, formula lui Lewis $P \prec Q$ este presupusă a fi *despre* propozițiile exprimate prin P și Q tocmai pentru că este concepută ca un răspuns propriu la prima din cele două întrebări de mai sus. Iar atunci cînd o traducem prin parafraza *Propoziția că are loc P implică strict propoziția că are loc Q*, putem susține pe bună dreptate că am dat o analiză a sensului ei, deoarece versiunea noastră mai lungă nu se menține la același tipar de bază ca cea originală și atrage atenția asupra complexității utilizării, care nu este evidentă atunci cînd se examinează forma inițială.

Că Lewis nu a reușit să clarifice chestiunea despre care am vorbit în alineatul anterior s-a datorat poate faptului că el a fost în mod eronat de acord cu Whitehead și Russell, considerînd că este necesară utilizarea enunțurilor implicative ca premise pentru *modus ponens*, astfel încît a urmat îndeaproape practica lor, în măsura în care acest lucru era compatibil cu menținerea diferenței dintre implicația strictă și cea materială. Se pare că motivul principal pentru care a elaborat teoria sa a fost dorința de a substitui implicația strictă pentru implicația materială în *modus ponens*, iar dacă este așa, nu ne surprinde faptul că el atacă sistemul implicației materiale (și nu numai denumirea eronată) cu argumente inadecvate. Evident, nimeni nu va folosi o argumentație de forma

$$\frac{P \quad P \supset Q}{Q}$$

dacă în prealabil a stabilit adevărul celei de-a doua premise fie descoperind că prima premisă este falsă, fie stabilind că concluzia este adevărată. Într-adevăr, în primul caz el nu ar mai putea aserta prima premisă, iar în al doilea n-ar avea nevoie de această argumentație pentru a ajunge la concluzie. Cînd condiționalul lui Filon de forma $P \supset Q$ apare ca premisă în *Principia Mathematica*, el este acceptat ca necesar pe temeiuri logice, și tocmai acestea sînt temeiurile care fac posibilă aserțiunea $P \prec Q$. Conform cu definițiile lui Lewis

$$(P \prec Q) = \Box (P \supset Q),$$

unde $\Box$ semnifică necesitatea logică. El merge chiar atît de departe

încît afirmă că $P \prec Q$ are loc în sistemul său dacă şi numai dacă $P \supset Q$ este o tautologie[24]. Dacă „tautologia" se presupune aici a fi truism în logica nemodală, susţinerea sa nu este corectă, deoarece axiomele B6 şi B7 furnizează contraexemple. Dar este cert că $P \prec Q$ nu are loc niciodată atunci cînd $P \supset Q$ nu este un adevăr al logicii. Prin urmare, meritul logicii sale modale nu poate fi — după cum pare să susţină el — furnizarea unei alternative de raţionament care să fie într-un anumit fel superioară metodei lui Frege, ci mai curînd ea exprimă explicit noţiunea de necesitate pe care toţi logicienii, inclusiv Frege, au considerat-o ca fiind acordată.

Pentru a lămuri relaţia dintre logica lui Lewis şi logica lui Frege sau cea din *Principia Mathematica*, diferiţi autori au prezentat unul sau mai multe dintre sistemele lui Lewis ca derivînd din *Principia Mathematica* şi anumite axiome sau reguli de inferenţă suplimentare[25]. De exemplu, pentru a deriva sistemul lui Lewis cu principiul reducerii slabe, adică S4, Gödel adaugă la logica primară din *Principia Mathematica* trei noi formule axiomatice:

$$1.\ \Box p \supset p$$
$$2.\ \Box p \supset [\Box (p \supset q) \supset \Box q]$$
$$3.\ \Box p \supset \Box \Box p,$$

unde $\Box$ trebuie luat ca semn primitiv[26], şi o regulă nouă: dacă P este o teză a sistemului rezultat, atunci şi $\Box P$ este o teză a acestui sistem. Cu această notaţie, principiul reducerii tari din S5 devine

$$4.\ \sim \Box p \supset \Box \sim \Box p.$$

Această versiune posedă o simplitate elegantă, iar noua regulă pe care o conţine pune în evidenţă foarte bine faptul interesant că necesitatea studiată în logica modală este o proprietate a propriilor sale propoziţii. Dar nu s-ar putea spune că această prezentare ajută mult la înţelegerea statutului logicii modale în cadrul teoriilor deductive. Dimpotrivă, utilizarea unui asemenea sistem de axiome pentru logica modală pare să fie condus pe unii filosofi să considere că logica modală este logică doar în sensul larg şi vag în care s-ar putea vorbi şi de o logică deontică (atunci cînd vrem să ne referim la o teorie axiomatică generală a datoriei) sau de o logică a timpurilor (atunci cînd

[24] *Idem*, p. 244.

[25] De exemplu, K. Gödel, „Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, IV (1932), pp. 39—40, A se vedea G.H. von Wright, *An Essay in Modal Logic*, appendicele II.

[26] Gödel personal utilizează „B" (de la *beweisbar*) deoarece el îşi prezintă sistemul în cadrul unui articol despre logica intuiţionistă, despre care vom vorbi mai jos.

vrem să ne referim la o teorie axiomatică generală a relațiilor care în multe limbi se exprimă prin inflexiuni temporale) sau chiar de o logică spațială (atunci cînd dorim să ne referim la geometria pură). Această deprindere de gîndire este nefericită, deoarece ea ne abate de la acele considerații care sînt cele mai relevante pentru aprecierea caracterului logic al logicii modale și deci pentru luarea unei decizii în problema principiilor de reducere.

După cum am văzut, Lewis înclină să respingă ambele principii de reducere, dar el recunoaște că nu poate să aducă nici un argument decisiv în favoarea unui asemenea punct de vedere. După ce deosebește cinci sisteme care, după cum arată el, diferă în ce privește gradul de strictețe, el sugerează că obiectivele cercetării logice vor fi probabil servite cel mai bine acordînd atenție acelor sisteme mai stricte care nu includ principii de reducere, dar el spune deschis: „Prevalarea bunelor uzanțe în inferența logică — de exemplu, practica deducției matematice — nu este suficient de exactă și autoconștientă pentru a determina clar care dintre aceste cinci sisteme exprimă cele mai acceptabile principii de deducție"[27]. Iată o observație curioasă. Dacă nu avem încă posibilitatea de a decide care dintre modalitățile de ordin superior se pot reduce la modalități de ordinul întîi, atunci cum vom fi vreodată în stare să rezolvăm problema? Ce fel de date trebuie să căutăm pentru aceasta și unde anume? Von Wright, care lucrează cu un sistem modal întrucîtva asemănător cu sistemul lui Gödel, susține că ar fi util să comparăm modalitățile aletice cu cele epistemice, adică modalități de felul celor pe care le au în vedere Lewis și Becker cu modalitățile care apar în expresii ca „se știe că", iar mai departe el continuă:

„Un principiu de reducție pentru modalitățile epistemice care este echivalent cu al doilea principiu de reducție afirmă că dacă o propoziție nu este cunoscută ca falsă, atunci este cunoscut că propoziția nu este cunoscută ca falsă. Această deducere a cunoașterii din necunoaștere este cu totul inacceptabilă și ar trebui să fie considerată cel puțin ca o serioasă punere în gardă împotriva ipotezei că al doilea principiu de reducție ar fi adevărat pentru modalitățile aletice"[28].

Aceasta este de asemenea curios. Cum ar putea ireductibilitatea ordinului mai înalt în expresii pe care von Wright le numește modalități epistemice să furnizeze vreo concluzie împotriva principiului reducerii tari în logica modalităților pure?

Într-un memoriu mai recent, von Wright spune:

„Aparent, «intuiția noastră logică» nu dă vreo indicație serioasă în favoarea vreunui răspuns definit la problema adevărului de aici. Mi se pare că unul din motivele principale ar fi faptul că expresiile modale de ordin superior cum ar fi «posibil că posibil» sau

[27] *Symbolic Logic*, pp. 501—502.
[28] *An Essay in Modal Logic*, p. 77.

«posibil că imposibil» cu greu ar putea fi *utilizate* în vorbirea uzuală sau ştiinţifică (cu excepţia logicii modale). De aceea, o problemă de cea mai mare importanţă este de a *inventa o utilizare* sau ceva «echivalent» cu o utilizare pentru expresii de acest fel (în afara logicii modale). Dacă se realizează aceasta, atunci problema adevărului pe care am amintit-o mai sus poate fi atacată pe o bază mai fermă"[29].

Apoi, după ce dă o interpretare în termeni de procese naturale, interpretare care satisface axiomele de bază ale logicii sale modale dar contravine principiului reducţiei, el scrie:

„Mi se pare că existenţa unor asemenea exemple în cadrul proceselor naturale arată că identităţile în chestiune nu pot pretinde validitate universală pentru conceptul de posibil (şi necesar) în logica modală, dar şi că nici una din ele nu ar putea fi respinsă pentru că ar contrazice «adevărata» natură a modalităţii"[30].

Aceasta pare şi mai ciudat. Din inventarea unui model care satisface unele axiome ale unui sistem formal, dar nu toate, nu putem conchide în mod rezonabil că sistemul formal în ansamblul său este nesatisfăcător pentru totalitatea diferitelor ţeluri pe care le vizează. Cel ce acceptă principiul reducerii în *logica* modală nu se angajează prin aceasta să susţină aplicarea principiului în toate utilizările actuale ale cuvintelor „posibil" şi „necesar", şi cu atît mai puţin nu se angajează în ce priveşte aplicarea sa la utilizări inventate.

Pentru a obţine o apreciere convenabilă a statutului logicii modale în cadrul teoriilor deductive, să examinăm încă o dată natura atribuţiilor logicianului. El doreşte să prezinte acele reguli sau principii de inferenţă care sînt valide pentru toate domeniile de cercetare, dar el nu poate face lista lor în mod independent, deoarece ele nu formează o mulţime finită. De aceea, el porneşte de la anumite principii foarte generale şi arată cum din acestea se pot deriva altele. Firește, el speră să stabilească un număr redus de principii generale, din care se pot deriva toate celelalte principii din logică şi vom vedea mai încolo că această ambiţie a fost în adevăr realizată de către Frege în acel domeniu al logicii pe care l-a studiat; dar pentru moment ceea ce ne interesează este maniera în care logicianul derivă principii mai slabe din cele mai tari.

Atunci cînd reduce toate principiile silogistice valide la *Barbara* şi *Celarent*, Aristotel presupune cunoscut modul de raţionament asupra principiilor pe care le studiază. În adevăr, el nu a făcut decît să demonstreze validitatea fiecărui principiu silogistic diferit de *Barbara* şi *Celarent*, arătînd că rezultatul aplicării acestui principiu în fiecare caz particular se poate obţine întotdeauna, deşi pe o cale mai întortocheată, aplicînd *Barbara* sau *Celarent* împreună cu anumite principii simple care nu sînt silogistice. Procedînd astfel, el nu

[29] "Interpretations of Modal Logic", *Mind*, n.s. LVI (1952), pp. 153—177. Se citează după pagina 77 din volumul său *Logical Studies*.

[30] *Idem*, p. 88.

generaliza explicit toate cazurile particulare, ci presupunea, destul de corect, că în fiecare tipar în care se poate produce o deducție cu litere schematice s-ar putea, de asemenea, la nevoie produce o deducție proprie cu termeni reali. Hrisip a adoptat același plan atunci cînd s-a ocupat cu un domeniu în care numărul tiparelor raționamentului valid nu este finit ca în teoria silogistică, și puținul pe care îl știm despre opera lui ne face să presupunem că a aplicat această metodă într-un mod foarte fertil. În secțiunea precedentă am văzut că această tehnică a fost folosită încă o dată de către Frege și succesorii săi, deși în lucrările lor problema derivării de reguli noi din reguli vechi cu ajutorul regulilor vechi este întrucîtva obscură din cauză că se vorbește despre axiome și teoreme de ordinul întîi. În sistemul lui Gentzen al schemelor naturale de inferență (precum și în sistemul schemelor de desfășurare pe care l-am obținut din sistemul lui Gentzen prin modificări neînsemnate) programul este realizat mai limpede decît oricînd înainte prin construirea arborilor demonstrativi care permit cititorului să-și dea seama dintr-o dată cum este validată o regulă de către celelalte.

Adecvarea metodei urmate de toți acești logicieni eminenți nu suscită dubii, dar logica poate fi prezentată și în alt mod, mai explicit, deși poate mai dificil de înțeles la prima vedere. Aici avem de-a face mai curînd cu teze decît cu scheme de raționament, dar tezele noastre sînt principii corespunzătoare schemelor de inferență validă (sau de desfășurare validă), adică ele sînt propoziții de ordinul al doilea care se referă la relația de implicație (sau de cuprindere) și nu truisme de ordinul întîi, cum sînt axiomele lui Frege; le derivăm unele dintr-altele în concordanță cu un principiu de tranzitivitate de un ordin mai înalt. Se pare că uneori Lewis are în vedere un asemenea program, căci axiomele sale B1—B5 sînt exemple de principii inițiale, pe cînd B6 este o versiune atranzitivității implicației; dar în loc de a trata fiecare din aceste propoziții ca un principiu de inferență, el permite doar ca ele să fie folosite ca premise pentru *modus ponens* în locul implicației materiale corespunzătoare. Reciproc, atunci cînd dorește să utilizeze principiul *modus ponens* din versiunea lui ca premisă pentru deducerea altor principii, el adaugă B7 ca o nouă axiomă, fără a ține seama de faptul că acest principiu este conținut deja în enunțarea regulii *modus ponens*.

Dacă, după cum spune Lewis, implicația strictă, spre deosebire de implicația materială, *justifică* deducția; atunci nu poate fi decît deosebire de vocabular între aserțiunea că o propoziție implică strict pe alta și aserțiunea că inferența de la prima la a doua este validă. Atunci de ce prezintă Lewis calculul său în acest fel? Motivul pare să fie acela că el consideră ca sigură necesitatea unui stil de expunere

pe care l-a introdus Frege și l-au popularizat Whitehead și Russell. În primul rînd, el presupune de la început că sarcina sa principală este de a introduce un conectiv propozițional care să poată figura în mod propriu în *modus ponens*, unde Frege a utilizat în chip eronat semnul pentru implicația materială (adică condiționalul lui Filon). Această presupunere îl conduce în mod natural să deosebească în propriul său sistem axiomele de regulile de inferență, precum și să ofere definiția

$$P \prec Q = \text{def } \sim \Diamond (P \cdot \sim Q)$$

în locul definiției

$$P \supset Q = \text{def } \sim (P \cdot \sim Q).$$

În al doilea rînd, el presupune că o teză pentru implicația strictă, ca și o teză pentru implicația materială, trebuie întotdeauna să aibă un implicant și un implicat. Deoarece însă este imposibil să prezentăm întreaga logică drept o teorie a inferențelor cu o singură premisă, el se simte nevoit să introducă o regulă de adjuncție pentru care nu poate exista analog în cadrul tezelor pentru implicația strictă. În al treilea rînd, el îl urmează pe Frege atunci cînd consideră că orice enunț la care se angajează el în calitate de logician trebuie să fie o teză universală ca cea de forma $p \cdot q \prec p$ și nu o aserțiune de felul aceleia că orice propoziție de forma $P \cdot Q \prec P$ este adevărată. Această opinie îl conduce în mod natural să adopte o regulă de substituție care are un statut cu totul diferit de toate tezele sale. Pe scurt, fiecare dintre regulile de inferență pe care el le adaugă la axiome își găsește locul din cauza nevoii de a acoperi restricțiile pe care le-a acceptat atunci cînd a formulat aceste axiome.

Să încercăm deci să ne eliberăm mintea de influența tradiției care s-a format recent și să încercăm să desemnăm un sistem de logică modală în care noțiunea de implicație este luată ca fundamentală și în care se permite a scrie $P, Q/P \cdot Q$ ca o altă versiune a acelui principiu care îndeobște se exprimă prin introducerea schemei de inferență $\frac{P \quad Q}{P \cdot Q}$. Sau, mai general, să încercăm a concepe un sistem în care principiile de cuprindere se derivă într-un mod natural (adică intuitiv evident) din alte principii care, la rîndul lor, sînt selecționate în virtutea caracterului lor firesc. Pentru a defini mai bine problema, să începem prin a analiza cum se reproduce într-o formă explicită (adică fără presupuneri implicite) raționamentul înfățișat în următoarea schemă simplă de desfășurare:

$$\dfrac{\dfrac{P \supset Q \qquad \overset{*}{\overline{P}}}{Q}\,(8) \qquad \overset{*}{\overline{\sim P}}\,(5)}{\overset{*}{\overline{\sim Q}}\,(6).}$$

Se poate spune că aici principiul $\sim Q,\ P \supset Q/ \sim P$ se derivă din principiile indicate prin numerele de ordine de la dreapta liniilor orizontale, şi anume: $*/P, \sim P$; $P \supset Q,\ P/Q$ şi $Q, \sim Q/*$. Dar astfel presupunem deja că un enunţ de forma Γ/Δ (adică cu bară oblică) poate fi enunţat în mod corect dacă şi numai dacă o desfăşurare de forma $\frac{\Gamma}{\Delta}$ este validă. Din motive de convenabilitate, se folosesc majuscule greceşti pentru a reprezenta *secvenţe* de formule, inclusiv secvenţele vide. Apoi presupunem că rezultatul unei desfăşurări

$$\frac{\Gamma\ \dfrac{\Theta}{P}\ \Lambda}{\Delta}$$

se poate înfăţişa sub forma $\Gamma,\ \Theta/\Delta,\ \Lambda$, unde P este tăiat deoarece nu e nici formulă iniţială, nici formulă finală a întregii figuri. Apoi scriind $\sim Q,\ P \supset Q/ \sim P$ în loc de $P \supset Q,\ \sim Q/ \sim P$ luăm ca sigur că ordinea formulelor anterioare barei oblice poate fi schimbată după voie. Dacă încercăm să explicităm toate aceste presupuneri, putem reformula raţionamentul în felul următor, într-un stil explicit de ordinul al doilea

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(6)}{Q,\ \sim Q/*}\ \text{(bară oblică)}}{\sim Q,\ Q/*}\ \text{(permutare)} \qquad \dfrac{\dfrac{(8)}{P \supset Q,\ P/Q}\ \text{(bară oblică)} \qquad \dfrac{(5)}{*/P,\ \sim P}\ \text{(bară oblică)}}{P \supset Q/Q,\ \sim P}\ \text{(tăietură)}}{\sim Q,\ P \supset Q/ \sim P.}\ \text{(tăietură)}$$

Aici cuvintele din dreapta liniilor se referă desigur la permisiunile care justifică trecerile noastre. Pentru a trece la reformularea unor raţionamente mai complicate trebuie să admitem şi alte permisiuni, şi anume: una care ne dă dreptul să eliminăm redundanţele de orice fel, de ambele părţi ale barei oblice, şi două care ne îngăduie să trecem peste *clasele* intermediare de formule atunci cînd enunţăm principiile stabilite cu ajutorul schemelor de desfăşurare din logica generală. De asemenea, deşi nu este strict necesar în vederea reformulării explicite, putem la nevoie adopta licenţa, în mod evident nedăunătoare, de adăugare a elementelor după voie, fie înainte, fie după bara oblică dintr-o formulă care exprimă un principiu corect. De asemenea, din orice enunţ corect de forma Γ/P considerat împreună cu premisele Γ putem conchide cu certitudine P.

Ajungînd însă aici, vedem că putem simplifica mai departe sarcina noastră, dar nu considerînd ca axiomatice principiile corespunzătoare schemelor de desfăşurare iniţiale, ci adoptînd pentru fiecare semn formal o unică regulă de ordin mai înalt, care fixează utilizarea sa în raport cu bara oblică. Într-adevăr, asemenea reguli adăugate permisiunilor generale pe care le-am notat mai sus fac posibilă deriva-

rea tuturor principiilor inițiale de cuprindere din unicul principiu P/P care corespunde cu schema de inferență banală $\frac{P}{P}$.

Cu aceasta, noul nostru sistem ia următoarea formă:

$$\alpha 1.\ \frac{P}{P}$$

$$\alpha 2.\ \frac{\Gamma/\Delta}{\Gamma,\ \Theta/\Delta,\ \Lambda} \qquad \alpha 3.\ \frac{\Gamma, P/\Delta \quad \Theta/P,\ \Lambda}{\Gamma,\ \Theta/\Delta,\ \Lambda}$$

$$\alpha 4.\ \frac{\Gamma/(\Delta/\Theta)}{\Gamma,\ \Delta/\Theta} \qquad \alpha 5.\ \frac{\Gamma,\ (\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)}{\Gamma/[(\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)]}$$

$$\alpha 6.\ \frac{\Gamma,\ \{Fx\}/\Delta \quad \{\Theta/Fx,\ \Lambda\}}{\Gamma,\ \Theta/\Delta,\ \Lambda} \qquad \alpha 7.\ \frac{\{\Gamma,\ Fx/\Delta\} \quad \Theta/\{Fx\},\ \Lambda}{\Gamma,\ \Theta/\Delta,\ \Lambda}$$

$$\beta 1.\ \frac{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}{\Gamma/P} \qquad \beta 2.\ \frac{\Gamma/P}{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}$$

$$\beta 3.\ \frac{\Gamma,\ \Delta,\ \Theta,\ \Lambda/\Xi,\ \Pi, \Sigma,\ \Phi}{\Gamma,\ \Theta,\ \Delta,\ \Lambda/\Xi, \Sigma,\ \Pi,\ \Phi} \qquad \beta 4.\ \frac{\Gamma,\ \Delta,\ \Delta/\Theta,\ \Lambda,\ \Lambda}{\Gamma,\ \Delta/\Theta,\ \Lambda}$$

$$\gamma 1.\ \frac{\Gamma,\ P \cdot Q/\Delta}{\Gamma,\ P,\ Q/\Delta} \qquad \gamma 2.\ \frac{\Gamma/P \vee Q,\ \Delta}{\Gamma/P,\ Q,\ \Delta}$$

$$\gamma 3.\ \frac{\Gamma,\ \sim P/\Delta}{\Gamma/P,\ \Delta} \qquad \gamma 4.\ \frac{\Gamma/P \supset Q,\ \Delta}{\Gamma,\ P/Q,\ \Delta}$$

$$\gamma 5.\ \frac{\Gamma,\ (x)Fx/\Delta}{\Gamma,\ \{Fx\}/\Delta} \qquad \gamma 6.\ \frac{\Gamma/(\exists x)Fx,\ \Delta}{\Gamma/\{Fx\},\ \Delta}$$

Ca și mai înainte, fiecare majusculă elină trebuie înțeleasă ca o referire abreviată la orice șir de propoziții alese după voie, incluzînd „șiruri" care au un singur membru sau chiar nici unul. Această utilizare a literelor eline și chiar conținutul unora dintre reguli sînt sugerate de a doua parte a lucrării lui Gentzen, pe care am citat-o în secțiunea anterioară, deși sistemul pe care îl elaborează acolo diferă de cel pe care îl examinăm aici[31].

Cu unica excepție a lui $\alpha 5$, pe care o vom examina mai jos, regulile din prima grupă sînt toate legate de permisiunile introduse mai sus și nici una din ele nu prezintă vreo dificultate de interpretare. În expresia lui $\alpha 1$ trebuie să utilizăm litera cursivă P în loc de Γ, deoarece $\frac{\Gamma}{\Gamma}$

[31] Pentru formularea celui de-al doilea sistem al său, Gentzen utilizează unele idei și chiar unii termeni provenind din memoriul lui P. Hertz „Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme", *Mathematische Annalen*, CI (1929), pp. 457—514.

ne-ar obliga şi la $\frac{*}{*}$, care este inacceptabilă. Regula α2 permite adăugarea elementelor de o parte sau de alta a barei oblice din expresia unui principiu. Deoarece însă, dintre cele două secvenţe reprezentate prin literele Θ şi Λ una sau amîndouă pot fi nule, regula nu *pretinde* vreo adăugire de ambele părţi. Aici şi în regulile următoare admiterea secvenţelor nule simplifică prezentarea. Regula α3 permite operaţia de tăietură în logica primară, iar regula α4 ne permite la nevoie să stabilim forma lui Lewis pentru *modus ponens*, în timp ce α6 şi α7 sînt pentru logica generală ceea ce α3 este pentru logica primară. Ca şi mai înainte, acoladele se utilizează pentru a indica mulţimi de propoziţii eventual infinite. Astfel, mulţimea propoziţiilor indicată prin semnul complex $\{\Gamma/Fx,\Delta\}$ este cea pe care trebuie să o stabilim construind o demonstraţie pentru formula $\Gamma/Fx,\Delta$, unde x se ia ca variabilă liberă.

În grupa următoare, β1 şi β2 stabilesc în mod clar echivalenţa celor două moduri diferite de a prezenta principiile implicaţiei. Aici expresia $\left(\frac{\Gamma}{P}\right)$ se poate considera ca însemnînd: *orice inferenţă în conformitate cu schema* $\frac{\Gamma}{P}$ *este validă*. Similar, β3 permite reaşezarea după voie a formulelor care figurează de o parte a barei oblice în expresia unui principiu de cuprindere într-o parte sau alta, în timp ce β4 permite eliminarea redundanţelor de o parte sau alta. După cum spunea Leibniz în legătură cu unul din calculele sale, noi nu ţinem seama aici nici de ordine, nici de repetare. Într-adevăr, deşi semnele pe care le scriem de o parte sau alta a barei oblice trebuie să fie ordonate de la stînga la dreapta şi pot include unele duplicări, în fapt aceste amănunte nu au importanţă pentru teoria noastră. Relaţia de cuprindere care ne interesează este o relaţie care are loc între *mulţimi de propoziţii* şi nu între secvenţe de formule, iar aceste două reguli servesc doar pentru a arăta că unele trăsături ale simbolismului nostru sînt nerelevante. Tocmai de aceea ele au fost grupate împreună cu β1 şi β2.

În a treia grupă avem cîte o regulă specială pentru fiecare dintre diferitele semne formale în uz. În parte, aceste reguli sînt adaptate după regulile lui K. R. Popper[32], fiecare dintre ele avînd forma unei licenţe de substituţie care guvernează utilizarea unui semn formal împreună cu semnul barei oblice.

---

[32] "On the Theory of Deduction", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, LI (1948), pp. 173—183, 322—331.

La un loc, aceste reguli sînt suficiente pentru reconstruirea întregii logici așa cum este considerată ea îndeobște. Iată de exemplu o demonstrație a unui principiu care corespunde la una dintre cele mai complicate axiome din *Principia Mathematica:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{Q \supset R/Q \supset R}\,(\beta 1)}{Q \supset R,\ Q/R}\,(\gamma 4) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{P \vee Q/P \vee Q}\,(\beta 1)}{P \vee Q/P, Q}\,(\gamma 2)}{P \vee Q/Q, P}\,(\beta 3)}{\dfrac{Q \supset R, P \vee Q/P,\ R}{Q \supset R, P \vee Q/P \vee R}\,(\gamma 2)}\,(\alpha 3)(\beta 3)}{\dfrac{Q \supset R/(P \vee Q) \supset (P \vee R)}{*/(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(\gamma 4)}\,(\gamma 4).$$

Este interesant de observat că deși principiile care formează obiectul de studiu al acestui sistem sînt principii de cuprindere, regulile cu ajutorul cărora construim demonstrațiile noastre sînt reguli de inferență, adică reguli pentru care principiile corespunzătoare sînt principii de implicație. Dar, din punctul de vedere pe care îl adoptăm aici este și mai interesant faptul că acest sistem fără regula $\alpha 5$ este o generalizare a sistemului de bază al lui Lewis, obținută prin utilizarea cuprinderii, care este o relație între clase de propoziții, în locul implicației sale stricte, care este o relație între propoziții. În adevăr, toate axiomele sale B1—5 și B7 se pot obține din $\alpha 1$ prin derivări simple ca cea dată mai sus, iar B6 se poate obține aplicînd $\beta 1$ și $\gamma 1$ la o versiune simplificată a lui $\alpha 3$. Pe de altă parte, schema $\dfrac{P \supset Q}{P/Q}$, pe care el o respinge, nu reprezintă o regulă în acest sistem. În adevăr, ea, în mod cert, nu este schema vreunei reguli primitive a sistemului și nici nu poate fi schema unei reguli derivate, deoarece concluzia sa este de ordin mai înalt decît premisa, în timp ce, cu excepția lui $\alpha 5$, toate regulile noastre primitive permit doar inferarea unor concluzii de ordin cel mult egal cu cel mai înalt ordin al premiselor respective.

Atunci cînd adăugăm $\alpha 5$, sistemul nostru devine o generalizare a sistemului lui Lewis S5, căci $\alpha 5$ este o generalizare a principiului reducerii tari. În adevăr, ceea ce spune formularea noastră este că nu există vreo deosebire între implicația strictă și implicația materială atunci cînd atît implicatul cît și implicantul sînt propoziții de cuprindere (ceea ce include, ca un caz particular, implicația strictă sau „entailment"). Căci, oricare ar fi implicantul sau implicatul, fiecare caz de implicație strictă este totodată și un caz de implicație materială; iar conform cu $\alpha 5$ fiecare caz de implicație materială în care impli-

cantul și implicatul sînt de forma indicată este și un caz de implicație strictă. Aceasta se poate vedea din următoarea derivare:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)/(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)}\ (\beta 1)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi), (\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)}\ (\gamma 4)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)/\,[(\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)]}\ (\alpha 5).$$

Dacă adoptăm în loc de $\alpha 5$ regula mai simplă

$$\dfrac{\Gamma,\ \Delta/\Theta}{\Gamma/(\Delta/\Theta)}$$

care este conversa regulii $\alpha 4$, putem ajunge printr-o argumentare similară la teza inacceptabilă $P \supset Q/(P/Q)$. Dar adoptînd $\alpha 5$ excludem doar imensa proliferare a modalităților care are loc în sistemele lui Lewis S1—4.

Pentru a deriva principiul reducerii tari într-o formă mai familiară, putem să definim necesitatea prin regula $\dfrac{\Box P}{*/P}$, unde asteriscul indică clasa nulă de premise (conținută ca subclasă în orice clasă de premise) și să demonstrăm regula derivată $\dfrac{Q/\Box \sim Q}{\Box \sim Q}$ după cum urmează:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q/\,\Box\ \sim Q}{Q/(*/\sim Q)}\ \text{(definiția }\Box)}{Q,\ */\sim Q}\ (\alpha 4) \qquad \dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{\sim Q/\sim Q}\ (\beta 1)}{*/Q,\ \sim Q}\ (\gamma 3)}{*/\sim Q}\ (\beta 3)(\alpha 3)(\beta 4)$$
$$\dfrac{*/\sim Q}{\Box \sim Q}\ \text{(definiția }\Box).$$

Apoi, punînd în regula derivată (DR) $\Box P$ în loc de Q, înaintăm după cum urmează:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{(*/P)/(*/P)}\ (\beta 1)}{\sim (*/P),(*/P)/(*/\sim \Box P)}\ (\gamma 3)(\beta 3)(\alpha 2)}{\sim (*/P)/[(*/P)/(*/\sim \Box P)]}\ (\alpha 5)}{\sim \Box P/(\Box P/\Box\ \sim\ \Box P)}\ \text{(definiția }\Box) \qquad \dfrac{\text{(DR)}}{(\Box P/\Box \sim \Box P)/\,\Box\ \sim \Box P}\ (\beta 1)}{\sim \Box P/\Box \sim \Box P.}\ (\alpha 3)$$

Conform cu versiunea noastră a principiului reducerii tari, orice enunț de cuprindere (și deci, firește, orice enunț de implicare) care este adevărat, este cu necesitate adevărat, și orice enunț care este fals, este cu necesitate fals. Dar atunci cînd este prezentat în această formă, principiul nici nu poate fi pus la îndoială. Într-adevăr, dacă cineva îl contrazice, el susține de fapt că invaliditatea silogismului poate fi de natură contigentă, iar aceasta pare absurd. Este admisă natura contingentă a faptului că sunetele sau petele pe care le folosim pentru prezentarea unui raționament au semnificațiile care li se atribuie

de obicei și, deci, este de asemenea contingent faptul că ele sînt folosite în anumite condiții pentru prezentarea unui raționament lipsit de validitate. Dar aceasta nu este relevant pentru chestiunea noastră. Noi afirmăm doar că neputința unei propoziții sau a unei grupe de propoziții de a implica o alta nu este contingentă, iar această teză nu pretinde vreo justificare suplimentară.

Atunci cînd un filosof ezită să accepte principiul reducerii tari, îl putem suspecta în mod rezonabil că el n-a înțeles consecințele care decurg din respingerea acestui principiu, deoarece nu și-a orientat atenția spre exemple convenabile de aplicare a principiului, ci și-a îngăduit să se lase influențat de către unele din numeroasele utilizări eliptice ale cuvintelor modale în vorbirea uzuală, de exemplu de utilizarea care l-a condus pe Frege să excludă cu totul modalitatea din logica sa. Atunci cînd discutăm o propoziție plauzibilă dar nedemonstrată din matematică (de exemplu, ipoteza lui Goldbach că fiecare număr par mai mare decît 2 este sumă a două numere prime), pare firesc să spunem „aceasta s-ar putea să fie un adevăr necesar, dar în prezent nu putem afirma că trebuie să fie". La prima vedere, un asemenea fel de a vorbi pare să sprijine ideea ireductibilității modalităților de ordin superior, dar la o examinare mai apropiată vedem că aici sînt trei utilizări diferite ale cuvintelor modale în cadrul uneia și aceleiași propoziții. În timp ce expresia „adevăr necesar" vizează să acopere noțiunea de necesitate care l-a interesat pe Lewis atunci cînd și-a formulat calculul său, „s-ar putea să fie" și „trebuie să fie" se utilizează aici pentru a exprima relații cu cunoașterea umană, iar „nu putem" ne conduce la o proprietate morală sau lingvistică. O asemenea mixtură nu poate fi un contraexemplu adecvat împotriva principiului reducerii tari și pare imposibil să se găsească vreun asemenea contraexemplu. În adevăr, cine vrea să respingă acest principiu în acest fel trebuie să indice o propoziție care este contingentă în sens pur logic, dar în același sens este doar contingent-contingentă.

O altă sursă posibilă de dubiu relativ la principiul reducerii este dificultatea interpretării expresiei „necesar adevărat", așa cum apare ea în discursul uzual. În capitolul din *Analiticile prime* în care se ocupă cu figura a treia a raționamentului silogistic, Aristotel spune că raționamentul

Fiecare om este un animal — Nici un om nu este un cal

Unii cai nu sînt animale

nu este un silogism valid, sau, cu alte cuvinte, că nu este necesar ca unii cai să nu fie animale dacă fiecare om este un animal și nici un om nu este un cal[33]. Or, această enunțare este evident un adevăr

[33] *Analiticile prime*, I, 6 (28a 30).

de forma $\sim \Box P$ şi, prin urmare, conform cu principiul reducerii tari, un adevăr necesar. Dar dacă încercăm să comunicăm judecata noastră că aceasta este un adevăr necesar prin propoziţia „Ceea ce spune Aristotel este necesar adevărat", s-ar putea crede că vrem să spunem că adevărul observaţiei lui Aristotel rezultă în mod necesar din faptul că el a emis-o. Pentru acest motiv, un distins logician modern a sugerat ca principiile de reducere să fie enunţate cu mai multă grijă decît se face de obicei. Se pare că el este de acord că *este necesar adevărat că nu este necesar ca unii cai să nu fie animale dacă fiecare om este un animal şi dacă nici un om nu este un cal,* dar neagă că *ceea ce spune Aristotel în pasajul amintit mai sus este necesar adevărat.* El argumentează că expresia „necesar adevărat" se poate aplica doar unei propoziţii concepute pe o cale particulară şi trebuie să fie interpretată în relaţie cu felul în care a fost gîndită propoziţia respectivă[34]. Acesta este evident un raţionament valabil, dar nu trebuie să credem că el aruncă o umbră de îndoială asupra principiului reducerii tari, aşa cum este prezentat în formula $\sim \Box P / \Box \sim \Box P$, şi nu trebuie să uităm că în definitiv putem spune ceea ce vrem să spunem cu privire la afirmaţia lui Aristotel fără a ne referi la ea ca atare. Într-adevăr, n-ar fi nici un pericol de confuzie dacă am spune pur şi simplu că „afirmaţia lui Aristotel din *Analiticile prime* (28^a 30) este un adevăr necesar", deşi nimeni n-ar putea spune dacă judecata noastră este corectă sau nu, pînă nu face cunoştinţă cu conţinutul afirmaţiei lui Aristotel.

În dorinţa noastră de a acorda noţiunii de modalitate logică ceea ce i se cuvine am fost conduşi la a prezenta logica drept teorie generală a acelei relaţii dintre mulţimi de propoziţii pe care o numim „cuprindere". În secţiunea anterioară a devenit clar că semnele formale (adică logice) pentru conjuncţie, disjuncţie, negaţie, conectivul lui Filon, universalitate şi existenţă, ar fi acele semne al căror sens deplin s-ar putea da prin enunţarea regulilor de desfăşurare pentru propoziţiile exprimate prin intermediul lor. Dar în noua noastră versiune a logicii, noţiunea de cuprindere este luată ca fundamentală, iar semnele formale ale versiunilor mai uzuale se introduc cu ajutorul unor reguli care pot fi tratate ca definiţii. Este adevărat că regulile din a treia grupă a noastră nu permit prin ele însele eliminarea semnelor formale în toate contextele în care ele pot fi folosite. Dar aceste reguli determină sensul semnelor în mod complet, fixînd rolul lor în raţionament. Fără îndoială că cuvîntul uzual „şi" poate să sugereze nuanţe pentru

[34] A. Church, "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation" în volumul *Structure, Method, and Meaning, Essays in Honor of Henry M. Sheffer,* 1951, pp. 3—24. El menţionează doar principiul reducerii slabe şi, firesc, utilizează un alt exemplu.

care nu se găsește nimic în $\gamma 1$, dar utilizarea logică a punctului vizează să acopere tocmai sensul permis de către această regulă, nimic mai mult sau mai puțin; la fel, fiecare dintre semnele formale are exact sensul pe care îl permite regula respectivă. Deși fiecare asemenea regulă privește doar apariția unui semn formal de o anumită parte a barei oblice, de fapt ea este suficientă pentru că, împreună cu regulile generale date anterior, stabilește posibilitățile de introducere ori eliminare a semnului respectiv sau înainte de bara oblică, sau după ea. De exemplu, expresia $\Gamma/P \cdot Q, \Delta$ este echivalentă în tărie cu perechea de propoziții $\Gamma/P, \Delta$ și $\Gamma/Q, \Delta$; iar $\Gamma/(x)Fx, \Delta$ se poate înlocui prin semnul complex $\{\Gamma/Fx, \Delta\}$. Pe scurt, semnele formale prezintă pentru logician un interes deosebit, deoarece ele se pot utiliza ca auxiliare în prezentarea teoriei cuprinderii; reciproc, semnele care nu se pot defini ca acestea în asociație cu semnul cuprinderii nu își găsesc locul în logică.

Deoarece există o deosebire de cea mai mare importanță între o mulțime care poate fi specificată prin enumerarea membrilor săi și una care poate fi specificată doar prin indicarea unei trăsături comune a tuturor membrilor săi, nu este de mirare că logica generală (sau funcțională), care se ocupă cu relații între mulțimi eventual infinite de propoziții, specificate prin referire la funcții propoziționale, este mult mai complicată decît logica primară (adică propozițională), care se ocupă doar cu relații între mulțimi finite de propoziții. Însă regulile noastre de bază $\alpha 1$—7 sînt toate simple și chiar banale (dacă acest cuvînt poate fi utilizat fără a implica un dispreț). Nici aceasta nu este de mirare, căci întrucît logica se ocupă cu proprietățile generale ale cuprinderii și nu cu stabilirea acestei relații între mulțimi de propoziții referitoare la domenii particulare de studiu, ea trebuie să fie *fundamental simplă*.

5. *Propuneri de logici alternative*

În acea versiune a logicii pe care am considerat-o mai sus, noțiunea fundamentală se identifică prin reguli ca generalizare a relației care justifică inferența și de aceea nu încape îndoială în ce privește interpretarea semnului ei de bază. Dar un sistem ca cel al lui Frege din *Begriffsschrift* sau ca cel din *Principia Mathematica* poate fi elaborat fără a urmări vreo interpretare a semnelor sale, iar atunci cînd este studiat în acest mod abstract este util să-l considerăm împreună cu alternativele sale.

În memoriul din 1921, în care a introdus tabelele de adevăr pentru logica elementară[35], E. L. Post a propus spre examinare un sistem formal în care fiecare variabilă poate lua o valoare de adevăr din m valori diferite $a_1, a_2, \ldots, a_m$ și nu numai una dintre cele două valori a și f. Deoarece el a început prin examinarea sistemului din *Principia Mathematica* în care se iau ca primitive semnele $\sim$ și V, el și-a prezentat sistemul său cu ajutorul unor tabele de adevăr pentru două funcții noi cu semnele $\sim_m$ și V_m. Primul său tabel de adevăr are forma indicată în figura alăturată, adică semnul $\sim_m$ este un operator care permută valorile ciclic. În ce privește a doua funcție, tabelul de valori este mai complicat în aparență, dar principiul de construcție este simplu: $P\mathrm{V}_m Q$ ia întotdeauna cea mai mare dintre cele două valori care aparțin lui P și Q (adică aceea care este indicată prin indicele cel mai mic). Aici Post procedează în mod cu totul abstract, fără a susține că pentru propoziții se pot concepe mai mult decît două valori de adevăr, dar apoi el pornește să arate că sistemul pe care l-a construit se poate interpreta în cadrul logicii obișnuite cu ajutorul următoarelor stipulări: (I) fiecare element (reprezentat printr-o literă mare) trebuie să fie considerat nu ca o propoziție, ci ca o mulțime ordonată de $m-1$ propoziții (reprezentate aici prin litere mici) astfel încît, dacă vreuna este adevărată, atunci sînt adevărate și toate cele care îi urmează în șirul considerat; (II) un element are valoarea a_r atunci și numai atunci cînd $r-1$ dintre propozițiile sale sînt false; (III) dacă propozițiile din P se exprimă prin $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ iar cele din Q prin $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$, atunci propozițiile din $P\mathrm{V}_m Q$ se vor exprima prin $p_1 \mathrm{V} q_1, p_2 \mathrm{V} q_2, \ldots, p_{m-1} \mathrm{V} q_{m-1}$; (IV) dacă propozițiile din P se exprimă prin $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$, atunci propozițiile din $\sim_m P$ se vor exprima prin

P	$\sim_m P$
a_1	a_2
a_2	a_3
.	.
.	.
.	.
a_m	a_1

$$\sim (p_1 \mathrm{V} p_2 \mathrm{V} \ldots p_{m-1}),\ \sim (p_1 \mathrm{V} p_2 \mathrm{V} \ldots p_{m-1}) \mathrm{V} (p_1 \cdot p_2 \ldots p_{m-1}),\ \ldots,$$
$$\sim (p_1 \mathrm{V} p_2 \mathrm{V} \ldots p_{m-1}) \mathrm{V} (p_{m-2} \cdot p_{m-1}).$$

Am putea spune că sistemul m-valent al lui Post este o logică alternativă? Răspunsul la această întrebare va depinde de sensul pe care îl dăm cuvîntului „logică". Dacă ne restrîngem să aplicăm acest nume fiecărui sistem care are anumite afinități formale cu sistemul lui Frege, putem spune că el este o logică. A proceda astfel nu este o absurditate, deoarece cuvîntul „geometrie" a fost lărgit tocmai pe această cale. Dar dacă ne permitem o asemenea libertate, trebuie să recunoaștem că cu o asemenea uzanță tehnică un sistem formal numit

[35] A se vedea nota 14 din acest capitol.

logică nu mai presupune vreo legătură cu raționamentul. În particular, nu putem presupune că producerea de logici alternative în acest sens al cuvîntului „logică" ar putea să arate sau să nu arate că sistemul lui Frege ar fi inadecvat scopurilor pentru care a fost proiectat sau că ar fi măcar strict convențional[36]. Dacă, pe de altă parte, insistăm ca numele de „logică" să fie rezervat sistemelor care se pot interpreta prin referire la relațiile dintre propoziții, iarăși putem spune că sistemul *m*-valent al lui Post este o logică într-un sens larg, dar acum trebuie să mai adăugăm că el nu este propriu-zis o *alternativă* la sistemul bivalent al lui Frege, deoarece interpretarea indicată mai sus presupune ca teorie subiacentă sistemul lui Frege (sau sistemul din *Principia Mathematica*). La sfîrșitul articolului său, Post susține că întregul său raționament s-ar putea traduce într-un limbaj dintr-un sistem multivalent și că dacă s-ar face aceasta, atunci sistemul multivalent ar părea fundamental, în timp ce sistemul bivalent obișnuit ar apare ca un artificiu. Dar el nu a explicat cum se poate traduce în limbajul unui sistem multivalent întregul său raționament și pare dificil, dacă nu imposibil, să materializăm sugestia sa.

Cam în aceeași vreme, J. Łukasiewicz a conceput ideea de a utiliza un sistem de logică trivalentă pentru a rezolva problema lui Aristotel cu privire la viitorul contingent[37]. Abordarea sa el o explică după cum urmează:

„Aș putea presupune fără contradicție că prezența mea în Varșovia într-un anumit moment de timp din anul următor, de exemplu în amiaza zilei de 21 decembrie, nu poate fi afirmată în momentul de față nici pozitiv, nici negativ. De aceea, este *posibil dar nu necesar* ca la timpul menționat eu să fiu prezent în Varșovia. Dacă admitem această supoziție, atunci enunțul «Voi fi prezent în Varșovia în amiaza zilei de 21 decembrie din anul următor» nu este în momentul de față nici adevărat, nici fals. Într-adevăr, dacă ar fi adevărat în prezent, atunci prezența mea viitoare în Varșovia ar fi necesară, ceea ce contrazice ipoteza, iar dacă ea ar fi falsă în prezent, prezența mea viitoare în Varșovia ar fi imposibilă, ceea ce iarăși contrazice ipoteza. Așadar, enunțul considerat nu este în prezent nici adevărat, nici fals și trebuie să aibă o a treia valoare diferită de valoarea 0, adică fals, și de valoarea 1, adică adevărat. Putem indica această valoare prin «1/2»: aceasta este «posibilul» care apare ca o a treia valoare impreună cu «falsul» și «adevăratul». Acesta este mersul gîndirii care a dat naștere sistemului trivalent pentru logica propozițională"[38].

Dacă trebuie să avem trei valori de adevăr, atunci funcțiile de adevăr trebuie să fie redefinite sau, mai precis: definițiile lor

[36] În cartea lor din 1952 intitulată *Many-valued Logics* (Logici polivalente), J. B. Rosser și A. B. Turquette se abțin de la orice încercare de interpretare a formalismului pe care îl studiază.

[37] „O logice trójwartościowej", *Ruch Filozoficzny*, V (1920), pp. 169—171.

[38] „Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", *Comptes rendus des séances de la Societé des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III*, XXIII (1930), pp. 51—77. (Traducerea română a articolului a apărut sub titlul *Observații filozofice privind sistemele polivalente de calcul propozițional*, în *Logică și filozofie*, Ed. politică, 1966, pp. 295—320).

trebuie să fie extinse astfel încît să acopere cazurile pentru care unul sau mai multe argumente iau valoarea $\frac{1}{2}$. În acest context vom introduce semnul $[P]$ ca o abreviere pentru „valoare de adevăr a lui P" și, pentru a ușura comparația, vom utiliza notația lui Peano și Russell, și nu notația lui Łukasiewicz. Definițiile pe care le adoptă el pentru condiționalul lui Filon și pentru negație sînt cele din matricea următoare:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\sim$
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	1

Coloana din extrema dreaptă indică faptul că dacă $[P]=0$ sau $[P]=1$, atunci $[\sim P]$ nu se schimbă și că pentru $[P]=\frac{1}{2}$ avem $[\sim P]=\frac{1}{2}$. Similar, în definiția lui $P \supset Q$ cazurile vechi se tratează așa cum este uzual, iar cazurile noi se rezolvă după principiul următor: dacă valoarea antecedentului este mai mică sau egală cu valoarea consecventului, atunci valoarea condiționalului este 1; în caz contrar, această valoare este $\frac{1}{2}$.

Este important să înțelegem că în acest sistem trivalent semnele pentru funcțiile de adevăr nu pot păstra exact aceleași relații pe care le-au avut în sistemul bivalent și că unele formule care sînt tautologice în sistemul bivalent pot înceta să mai fie tautologice atunci cînd sînt considerate ca formule în sistemul trivalent. Astfel, Łukasiewicz introduce disjuncția prin definiția

$$[P \vee Q] = [(P \supset Q) \supset Q].$$

Această echivalență pare neobișnuită, dar ea este aleasă pentru a asigura că disjuncția în sistemul trivalent va avea aceeași valoare ca și termenii săi atunci cînd amîndoi termenii au aceeași valoare, iar în caz contrar va avea cea mai mare dintre cele două valori. Aplicînd definiția la $P \vee \sim P$, obținem 1 ca valoare a întregului numai dacă unul dintre termenii disjuncției are această valoare, iar în caz contrar obținem $\frac{1}{2}$; se pare că acesta este rezultatul urmărit de

Łukasiewicz. Din nefericire însă, pentru definiția pe care o dă conjuncției $P \cdot Q$ consecințele nu mai sînt tot atît de bune, căci aici el utilizează regula lui De Morgan

$$[P \cdot Q] = [\sim (\sim P \vee \sim Q)],$$

urmărind fără îndoială să asigure că o conjuncție va avea aceeași valoare ca termenii săi atunci cînd aceștia au valori egale, iar în caz contrar va avea cea mai mică dintre cele două valori; iar rezultatul este că pentru P. $\sim P$ obținem valoarea 0 numai dacă P are una dintre cele două valori extreme; în caz contrar obținem $\frac{1}{2}$, ceea ce pare foarte straniu.

Pe lîngă semnele obișnuite pentru funcțiile de adevăr, Łukasiewicz introduce un nou semn funcțional presupus a avea sensul de „Posibil". După practica sa uzuală, el ia în acest scop o literă mare și anume Litera M, inițiala cuvîntului *möglich*. Noi vom utiliza semnul în formă de romb al lui Lewis, dar trebuie să precizăm că noțiunea de posibilitate a lui Łukasiewicz este cu totul diferită de aceea a lui Lewis.

Definiția pe care Łukasiewicz a adoptat-o pentru semnul său de posibilitate (la propunerea elevului său A. Tarski) este dată de către echivalența $[\Diamond P] = [\sim P \supset P]$. La prima vedere, aceasta este o definiție foarte surprinzătoare deoarece $\sim P \supset P$ este antecedentul din *consequentia mirabilis* prin care demonstrăm adevărul lui P în sistemul de logică bivalentă; dar paradoxul se înlătură atunci cînd ne amintim că definiția aparține unui sistem trivalent. Dacă o propoziție se poate deriva din propria ei negație, atunci cel puțin ea nu poate fi falsă, indiferent de numărul de valori de adevăr pe care îl admitem. În sistemul bivalent, proprietatea este suficientă pentru a asigura adevărul; în sistemul trivalent însă ea garantează doar posibilitatea. Cu alte cuvinte, definiția lui Tarski pare convenabilă deoarece funcția pe care el o egalează cu posibilitatea ia valoarea zero atunci cînd argumentul are această valoare, iar în caz contrar ia valoarea unu: ceea ce a definit el este posibilitatea în sensul că exclude falsitatea.

Reușind pînă acum în demersul său, Łukasiewicz s-a îndreptat spre generalizarea noțiunii de sistem polivalent, stabilind definiții pentru negație și condiționalul lui Filon, care se pot aplica la orice număr de valori cu singura condiție ca ele să fie reprezentate în intervalul de la 0 la 1. Aceste definiții sînt următoarele:

$$[\sim P] = 1 - [P]$$
$$[P \supset Q] = 1 \text{ pentru } [P] \leqslant [Q]$$
$$[P \supset Q] = 1 - [P] + [Q] \text{ pentru } [P] > [Q].$$

Dacă alegem ca valori permise numai limitele intervalului, adică numai numerele 0 și 1, atunci aceste definiții furnizează sistemul bivalent obișnuit. Dacă adăugăm ca valoare permisă $\frac{1}{2}$, obținem sistemul trivalent pe care l-am examinat acum. După Łukasiewicz, e posibil de asemenea să construim un sistem pentru 4 sau 5 sau pentru un număr arbitrar de valori de adevăr; dar îndată ce permitem distincții de grad pentru posibil și depășim astfel sistemul trivalent, pare cel mai firesc să admitem o infinitate de grade, ca în calculul probabilităților, fapt ce ne conduce la un calcul propozițional cu o infinitate de valori, pe care el îl preferă. Poate că el credea că un asemenea calcul ar putea fi folosit în prezentarea teoriei probabilităților. De fapt însă, calculul n-a fost dezvoltat în această direcție, și este îndoielnic ca el să fi admis asemenea dezvoltare deoarece se pare că în acest sistem nu avem o interpretare adecvată pentru semnul posibilității. Dacă aplicăm aici definiția lui Tarski, obținem rezultatul curios

$$[\Diamond P] = 1 \text{ pentru } [P] \geqslant \frac{1}{2},$$

$$[\Diamond P] = 2[P] \text{ pentru } [P] < \frac{1}{2}.$$

Relațiile dintre diferitele sisteme sînt următoarele. Sistemul trivalent este o parte proprie a sistemului bivalent, în sensul că toate teoremele sale sînt și teoreme ale acestuia din urmă, iar sistemul cu o infinitate de valori este o parte proprie a sistemului trivalent în același sens, deși puținele teoreme din *Principia Mathematica* ce supraviețuiesc în sistemul trivalent se pierd atunci cînd se trece la sistemul cu o infinitate de valori. Cele mai importante teoreme din sistemul bivalent care nu sînt valide în sistemele polivalente sînt cele care au de-a face cu un raționament apagogic (reductio ad absurdum) de forma celui care pare să fi dat naștere la frămîntarea din teoria mulțimilor; de exemplu:

$$(\sim p \supset p) \supset p,$$
$$(p \supset \sim p) \supset \sim p,$$
$$(p \supset q \cdot \sim q) \supset \sim p.$$

Łukasiewicz a elaborat sistemul său trivalent într-o măsură destul de coerentă și i-a adăugat o interpretare care îl face să semene cu o logică în cel mai strict uz al acestui cuvînt; dar sistemul său nu este legat de logica bivalentă așa cum consideră el. În cursul întregii sale discuții el are în vedere acea utilizare a cuvîntului „posibil" în cadrul căreia cineva care este întrebat cu privire la viitor poate să răspundă

că este posibil că o bătălie navală va avea loc în ziua următoare. Într-un studiu mai recent, în care prezintă un sistem diferit de logică modală, Łukasiewicz admite că a avut în vedere alte concepții ale posibilității, dar continuă să argumenteze pe baza ipotezei că $\Diamond P$ și $\sim P$ sînt incompatibile[39]. Or, desigur că nu ar fi cinstit ca cineva să spună „Este posibil că astăzi a avut loc o bătălie navală" atunci cînd el știe bine că nici o bătălie navală n-a avut loc, deoarece în acest context „este posibil..." înseamnă, după cum spunea Frege, că vorbitorul nu știe nimic despre contrariu. Dar această utilizare nu implică existența unei a treia valori de adevăr, între adevăr și fals, și nici nu s-ar părea că cineva ar dori să interpreteze lucrurile astfel, afară doar dacă n-ar fi îngrijorat de problema lui Aristotel asupra viitorului contingent. Am argumentat deja că problema provine din ideea confuză că adevărul este o proprietate care aparține unui enunț la un moment de timp dat și este suficient să adăugăm aici că cele trei valori ale lui Łukasiewicz nu apar ca valori de adevăr și nici măcar ca valori pur modale, ci mai curînd ca valori de certitudine.

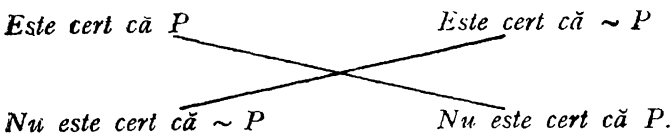
Am observat deja că odată cu principiul terțului exclus el a abandonat și principiul necontradicției. Aceasta face ca sistemul în ansamblu să fie inacceptabil. Dacă însă defectul ar putea fi înlăturat printr-o ajustare care să satisfacă pe Łukasiewicz și pe cei care sînt preocupați de problema viitorului contingent, atunci se pare că sistemul rezultat ar admite și interpretarea următoare:

$[P] = 1$ ... *Este cert că* P.

$[P] = \frac{1}{2}$ ... *Nu este cert că* P *și nu este cert că* $\sim P$.

$[P] = 0$ ... *Este cert că* $\sim P$.

Dar, departe de a impune abandonarea logicii bivalente uzuale, această interpretare presupune distincția uzuală dintre adevăr și fals și utilizarea uzuală a cuvîntului „nu". Aplicînd procedeul pătratului opozițiilor, putem înfățișa relațiile dintre diferitele expresii după cum urmează:



[39] „A System of Modal Logic", *The Journal of Computing Systems*, I (1953), pp. 111–149. A se vedea de asemenea cartea sa asupra silogisticii lui Aristotel din punct de vedere al logicii matematice, *Aristotle's Syllogistic*, ediția a doua, § 49.

Aceasta revine la a spune că cele două susţineri de certitudine sînt contrarii şi că fiecare din ele implică ca subalternă o propoziţie care este contradictorie cu cealaltă. Pe de altă parte, cele două negaţii de certitudine sînt subcontrarii, ele putînd fi amîndouă adevărate (conform cu principiile logicii bivalente uzuale) dar neputînd fi amîndouă false. Aceste relaţii sînt analoage celor care au loc între cele patru expresii modale „necesar", „imposibil" „posibil" şi „nenecesar"; lucrul nu este de mirare, deoarece „cert" se poate considera ca o abreviere pentru „necesar relativ la ceea ce ştim". Aici însă, elementul logic este noţiunea generală de necesitate (sau noţiunea de posibilitate care în analiză poate fi luată ca noţiune fundamentală în locul necesităţii) şi nicidecum noţiunea de cunoaştere; deşi funcţiile modale pure nu pot fi definite cu ajutorul unor tabele de adevăr asemănătoare funcţiilor din logica primară bivalentă, ele nu pretind o teorie alternativă la logica primară bivalentă.

Într-un capitol ulterior vom avea prilejul să examinăm o alternativă la logica clasică care a fost propusă de către L.E.J. Brouwer şi A. Heyting în vederea eliminării paradoxurilor din filosofia matematicii. Specificul acestui sistem rezidă în aceea că el nu conţine principiul terţului exclus nici ca axiomă, nici ca teoremă. Cel puţin aşa afirmă autorii săi; dar vom vedea că este rezonabilă opinia după care ceea ce ei numesc principiul terţului exclus nu este legea cunoscută de obicei sub acest nume.

Dacă, pornind de la sistemul de logică primară al lui Frege, ne întrebăm ce trebuie să reţinem într-un calcul abstract căruia i se poate atribui denumirea de logică pură pe baza similarităţii sale parţiale (în ce priveşte structura formală) cu sistemul lui Frege, nu ne putem aştepta la un răspuns precis, deoarece numai intuiţia ar putea reglementa o asemenea extindere a accepţiilor. Dar eventual am putea spune că este rezonabil să ne aşteptăm ca acolo să funcţioneze regulile de substituţie şi detaşare şi unele formule corespunzătoare tezelor principale din sistemul lui Frege. Dacă presupunem că sistemul nou trebuie să aibă şi constantele lui Frege, atunci am putea considera, de exemplu, că el trebuie să conţină cele patru formule

$$p \supset \sim \sim p$$
$$q \supset (p \supset q)$$
$$\sim p \supset (p \supset q)$$
$$p \supset [\sim q \supset \sim (p \supset q)],$$

care de fapt se găsesc nu numai în sistemele polivalente ale lui Łukasiewicz, dar şi în sistemul elaborat de Heyting pentru logica lui Brouwer, în care nu funcţionează principiul terţului exclus. Dar

A. Tarski[40] a arătat că orice sistem care satisface aceste condiţii şi nu este contradictoriu poate fi extins în mod consistent şi complet doar într-un singur fel, extinderea aceasta fiind tocmai sistemul bivalent obişnuit. El a demonstrat de asemenea teoreme asemănătoare pentru calcule alternative, care diferă de sistemul lui Frege fie prin aceea că utilizează doar semnul pentru implicaţia materială, fie prin aceea că utilizează semnele conjuncţiei şi disjuncţiei împreună cu semnele pentru implicaţia materială şi negaţie. Se pare deci că chiar din punct de vedere pur formal sistemul bivalent uzual are un statut aparte printre sistemele deductive, care pot fi denumite în mod rezonabil logică, deoarece toate aceste sisteme nu sînt decît fragmente ale sale. Pe scurt, ele nu sînt alternative la logica clasică în sensul în care geometria lui Lobacevski este alternativă la geometria lui Euclid.

În secţiunea anterioară am încercat să arătăm că logica clasică poate fi înfăţişată ca teorie generală a unei relaţii dintre mulţimi de propoziţii, relaţie pentru care implicaţia este un caz particular. Dacă prezentarea noastră este acceptabilă (iar ea pare să concorde cu concepţia tradiţională a logicii ca ştiinţă a principiilor raţionamentului valid în orice domeniu de cercetare), atunci oricine susţine o alternativă la logica clasică obiectează implicit, într-un fel sau altul, împotriva noţiunii clasice de implicaţie. Într-adevăr, reiese că nu putem opera cu o logică de felul celor propuse de Łukasiewicz şi Brouwer, conservînd totodată noţiunea de implicaţie utilizată în logica clasică. Dar cum am putea abandona această noţiune şi pentru care motiv? Prin ce argumentare s-ar putea demonstra că concepţia noastră generală cu privire la demonstraţie trebuie să fie schimbată? Fără îndoială, se poate arăta că o anumită argumentare particulară cu care ne-am obişnuit este eronată, dar nu se poate arăta că întreaga noastră concepţie asupra raţionamentului trebuie revizuită. Şi totuşi, dacă analiza noastră este corectă, aceasta este sarcina pe care şi-o pune orice pretins reformator al logicii.

[40] „Über Erweiterungen der unvollständigen Systemen des Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, VII (1934—1935) pp. 51—57; memoriul a intrat în volumul publicat în limba engleză, *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 393—400.

X

FILOSOFIA LOGICII DUPĂ FREGE

1. *Expresie, desemnare și adevăr*

Puțini logicieni se mențin la filosofia logicii a lui Frege în totalitatea ei[1], însă terminologia funcțiilor și valorilor de adevăr introdusă de el s-a păstrat, iar uneori se pare că utilizarea acestei terminologii angajează la doctrina lui Frege chiar și pe cei care susțin că s-ar fi eliberat de teoria lui. Din acest motiv, trebuie să începem capitolul de față cu o discuție asupra vederilor lui Frege cu privire la semnificație și adevăr.

Trăsătura caracteristică a teoriei lui Frege asupra semnificației rezidă în faptul că el încearcă să explice uzul tuturor cuvintelor, precum și al altor semne, analizînd actul denumirii ca atare. Desigur că Frege admite că verbele, substantivele comune, adjectivele, prepozițiile și simbolurile de diferite alte genuri nu sînt nume proprii sau cvasidenumiri, însă el crede că acestea sînt doar mijloace pentru construirea unor nume compuse, cum ar fi „capitala Prusiei" sau „descoperitorul orbitelor eliptice ale planetelor". Elaborînd în amănunt această concepție, Frege dă dovadă de o subtilitate remarcabilă, iar afirmațiile sale despre sens și referință par foarte bine adaptate pentru dezlegarea nedumeririlor sale cu privire la unele enunțuri ca „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară". Și totuși trebuie să recunoaștem că doctrina sa, după care propozițiile indicative sînt denumiri sau desemnări ale valorilor de adevăr, are un aer straniu, iar faptul că Frege ajunge la această concluzie ar trebui să ne determine la o critică a presupunerilor sale inițiale.

Doctrina lui Frege cu privire la valorile de adevăr este stranie și inacceptabilă, deoarece el nu reușește niciodată să explice limpede ce sînt aceste obiecte. Într-un loc, el spune că valoarea de adevăr a unei propoziții *(Satz)* este faptul că propoziția respectivă este adevărată sau falsă, după cum e cazul. Aceasta pare inteligibil, dar nu concordă deloc cu ideea că toate propozițiile adevărate desemnează o valoare

[1] Discipolul cel mai fidel este A. Church, care a susținut punctul de vedere al lui Frege în diverse locuri, de exemplu în "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis" *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, LXXX (1951), pp. 100—112, precum și în introducerea la *Introduction to Mathematical Logic*.

de adevăr iar toate propozițiile false altă valoare de adevăr. Faptul că „5 este un număr prim" este adevărat (dacă ne putem permite o asemenea exprimare), nu este același lucru cu faptul că „2 + 2 = 4" este adevărat. În alte locuri, Frege vorbește despre Adevăratul și Falsul pur și simplu. Fără îndoială, această terminologie este menită să sugereze că el are în vedere două obiecte și numai două; dar ce sînt aceste obiecte? În accepția uzuală, „Adevăratul" ar fi considerat ca însemnînd același lucru ca „ceea ce este adevărat", dar lucrurile care pot fi adevărate într-un sens primar sînt judecățile sau, cum ar spune Frege, gîndurile (adică ceea ce propozițiile exprimă, spre deosebire de ceea ce se presupune că ar desemna), și pot exista o infinitate de judecăți exprimate de propoziții deosebite. Trebuie să înțelegem atunci că cele două valori de adevăr ale lui Frege sînt tocmai atributele adevăr și fals? Acestea constituie într-adevăr o pereche de obiecte, — într-un sens larg al cuvîntului „obiect" —, și ele pot fi denumite în mod rezonabil valori, într-un sens care nu are nimic de-a face cu substituirea variabilelor din matematică. Dar pare absurd să spunem că fiecare propoziție indicativă adevărată desemnează adevărul, sau reprezintă adevărul, întrucît propozițiile sînt semne de cu totul alt gen decît semnele despre care putem susține că reprezintă propriu-zis adevăr (de exemplu, cuvîntul „adevăr" însuși, sau expresia „ceea ce Pilat din Pont dorea să fie definit"). Pentru anumite țeluri, am putea admite eventual convenția de a scrie:

5 este un număr prim = adevăr,

ca un substitut pentru „Este adevărat că 5 este un număr prim", dar posibilitatea refacerii limbajului nostru în această manieră nu justifică deloc afirmația lui Frege. Dacă am decide să scriem „ = adevăr" după anumite propoziții indicative și „ = fals" după altele, cele două specii nu și-ar păstra semnificațiile lor actuale, ci ar ajunge să fie privite într-un alt fel, ca semnele pe care le utilizează învățătorul pentru a nota răspunsurile date de elevi la întrebările sale.

În articolul său *Über Sinn und Bedeutung*, Frege încearcă să facă plauzibilă teoria sa, argumentînd că ea ar fi implicată de deosebirea de atitudine față de ficțiune și istorie. Într-un poem epic sau roman, propozițiile, spune Frege, au sens, însă ele nu sînt caracterizate de regulă ca adevărate sau false, deoarece nu sînt concepute ca avînd referință. Propozițiilor unui istoric însă le atribuim referință în aceeași măsură ca și sens. Într-adevăr, dacă susținem cu toată seriozitatea că Ulisse a fost aruncat la țărmul Itacăi în timp ce era cufundat în somn, sîntem gata să arătăm că cuvîntul „Ulisse" desemnează un obiect, iar interesul pe care-l manifestăm pentru referința unei părți a propoziției respective devine de înțeles numai dacă presupunem că și propoziția,

în întregul ei, desemnează ceva. La fel cum în cazul înţelegerii unei propoziţii oarecare, indiferent dacă ea ţine de ficţiune sau de istorie, sensul unei părţi este relevant pentru că ne ajută să determinăm sensul întregului, tot astfel, după cum se pare, într-o cercetare asupra adevărului unui enunţ istoric referinţa unei părţi este relevantă pentru că ne ajută să determinăm referinţa întregului, şi anume valoarea sa de adevăr.

Argumentaţia de mai sus este cea mai bună apărare a lui Frege, dar ea nu justifică încercarea de a separa sensul unui enunţ de referinţa sa. Dacă presupunem că o propoziţie indicativă de ficţiune are exact acelaşi sens pe care l-ar fi avut într-o naraţiune istorică, atunci sîntem obligaţi să admitem şi faptul că aceeaşi propoziţie este utilizată pentru a formula un enunţ adevărat sau fals. Or, potrivit explicaţiilor date chiar de Frege, nu avem nevoie de nimic altceva, deoarece o judecată, adică un gînd complet exprimat printr-o propoziţie indicativă, este întotdeauna ceva ce trebuie să fie adevărat sau fals. Desigur, este important să deosebim propoziţiile unei ficţiuni de propoziţiile unei relatări istorice, dar nu este cazul (cum presupune Frege) că propoziţiile de primul fel ar avea sens fără referinţă, în timp ce celelalte ar avea atît sens cît şi referinţă. Deosebirea fundamentală rezidă mai curînd în aceea că istoricii fac comunicări, pe cînd istorisitorii de poveşti pretind numai că fac comunicări ; de unde rezultă că numeroase propoziţii de ficţiune au semnificaţie numai în sensul cu totul aparte în care spunem că are semnificaţie „John are peniţa soţiei grădinarului", atunci cînd figurează sub titlu de exemplu într-un manual de gramatică. Ele sînt semne compuse care *ar putea fi* întrebuinţate în anumite condiţii pentru comunicare, şi tocmai de aceea *sînt* folosite într-adevăr de povestitorul care, pentru a ne distra, susţine că aceste condiţii sînt îndeplinite. Dacă cineva înţelege greşit situaţia şi îşi închipuie că povestitorul face o comunicare autentică, atunci el, în mintea sa, conferă un sens complet fiecărei propoziţii, ceea ce, după cum spune Frege, presupune de obicei că anumite expresii sînt desemnări genuine ; dar nu avem vreun temei potrivit pentru a spune că aceasta implică tratarea propoziţiilor povestitorului în calitate de desemnări ale valorilor de adevăr.

Teoria lui Frege provine din presupunerea sa că orice semn complet trebuie să aibă în acelaşi timp atît un sens cît şi o referinţă ; la aceasta l-au condus preocupările sale în legătură cu denumiri şi cvasidenumiri. Cînd dintr-un motiv sau altul începe să ne intereseze studiul limbii şi începem să ne întrebăm asupra semnificaţiei, este poate natural să căutăm indicii în situaţiile în care am îmbogăţit limba prin propriile noastre acte ; or, cel mai evident dintre aceste acte este atribuirea de nume proprii. Fără îndoială, încă înainte de Frege, mulţi filosofi

au încercat să explice faptul că numele au semnificație, spunînd că ele reprezintă lucruri, așa precum numele „Socrate" reprezintă pe Socrate. Dar această idee nu este prea fericită, deoarece numele proprii nu sînt nicidecum esențiale pentru comunicare.

În loc de „Socrate a murit pentru că a băut cucută", am putea spune „Filosoful cîrn care a căutat pentru prima oară definițiile virtuților a murit pentru că a băut cucută". E adevărat că sensul celei de-a doua observații nu este exact același ca sensul primei, deoarece înțelegerea ei reclamă cunoștințe care nu sînt necesare pentru înțelegerea primei observații ; dar în multe contexte, a doua ar putea îndeplini misiunea primei, și se pare că nu ne putem imagina un context (în afară de cel al compilării unui dicționar de denumiri) în care scopurile slujite prin primul enunț să nu poată fi servite la fel de bine prin enunțarea unei anumite parafraze în care să nu figureze vreun nume propriu. Și nu numai atît. În contextele familiare, am putea să eliminăm chiar și descripțiile definite, precum și cuvinte ca „eu", „tu", „acesta", „acela", „aici" și „acum", pe care Frege le tratează întotdeauna ca pe niște cvasidenumiri. Pentru aceasta, nu ne-ar trebui decît un cod de felul celora la care recurg serviciile poștale pentru a transmite telegrame de felicitări. Fiecărei propoziții din engleză care se repetă în mod frecvent i-ar corespunde o singură expresie lipsită de părți semnificative și, prin uz constant, aceasta din urmă ar căpăta forța de care în prezent se bucură prima. În comunicarea obișnuită putem întîlni de fapt exemple de acest gen. Cînd un jucător de golf strigă „Fore !", cei din fața sa receptează strigătul lui ca un avertisment că el este pe punctul de a trimite mingea în direcția lor. Tot astfel, atunci cînd telegrafistul unui vapor emite semnalul internațional S.O.S., cei care îl receptează înțeleg (fără a avea nevoie de o traducere) că în locul de unde provine semnalul se cere un ajutor de urgență. Fără îndoială, este imposibil să efectuăm în acest fel toate comunicările noastre, dar important este să înțelegem că imposibilitatea propunerii se datorează mai curînd modului în care învățăm limbile decît modului în care folosim aceste limbi după ce le-am învățat.

În cursul unei zile, fiecare dintre noi are prilejul să rostească numeroase propoziții care nu au fost încă auzite în istoria omenirii. Astfel, chiar și un copil de zece ani ar putea spune : „Am văzut o păpușă care se plimbă și un aparat electric de tuns iarba în prăvălia de lîngă biserica în care bunicului i-a căzut din mînă cutia milei, după ce arhiepiscopul și-a ținut predica" ; or, dacă a spus aceasta nu trebuie să credem că a făcut o mare ispravă. Dar este cel puțin improbabil ca toate cuvintele din exemplul nostru să fi fost vreodată așezate exact în această ordine înainte ca noi să fi construit acest exemplu.

Or, este clar că o limbă care ar permite numai expresii unitare nu ar fi adecvată nevoilor noastre, deoarece nu ne-ar oferi nici un mijloc pentru a face față unor situații rare. Fiecare expresie învățată de noi ar fi adecvată numai pentru situații de un anumit gen; și deși am putea extinde cu succes, prin analogie și metaforă, accepțiile unor asemenea expresii, nu am fi niciodată în stare să dobîndim un bagaj destul de cuprinzător pentru toate obiectivele vorbirii uzuale. Într-un limbaj foarte evoluat trebuie, așadar, să dispunem nu numai de un vocabular, dar și de o sintaxă, deși avem motive să credem că la început de tot este posibil ca oamenii să nu fi avut decît vocabular. Dar, indiferent dacă vorbim în expresii standard simple sau în propoziții compuse, ceea ce spunem este întotdeauna ceva ce, în principiu, ar putea fi utilizat în alte împrejurări de același gen, dacă ar exista asemenea împrejurări. Căci, deși improbabil, nu este desigur imposibil ca în diferite momente de timp și în diferite locuri zeci de copii să rostească propoziția complicată pe care am construit-o cu titlu de exemplu, și anume toți cu aceeași corectitudine lingvistică. Situația nu se schimbă prea mult nici dacă presupunem că limba cu care avem de-a face conține nume proprii. Se poate întîmpla ca pe viitor nimeni, cu excepția unui actor sau a unui gramatician, să nu mai spună „Acum Socrate bea cucută", dar ne putem imagina totuși că această propoziție ar putea fi utilizată în vederea unui enunț sincer și chiar adevărat. La un moment oarecare, un alt Socrate (care în acest context înseamnă: alt om, avînd numele de Socrate) poate să bea cucută.

O expresie unitară seamănă cu un model de mimică sau un tip de gesticulație. A spune „Da" și a da din cap nu sînt decît două moduri de încuviințare; iar a spune „Bun!" cu o anumită intonație este o modalitate emfatică pentru a exprima ceea ce alteori exprimăm ridicînd din sprîncene. Dar o propoziție compusă, cu subiect și predicat distincte, poate fi privită în același mod. În adevăr, a spune „Sînt obosit" este o mostră de comportare ce poate servi țelurile noastre în același mod în care le servesc uneori arătarea cu degetul sau închiderea ochilor și aplecarea capului. Putem deci susține că, în toate aceste cazuri, semnele noastre au atît sens cît și referință? Fără îndoială, trebuie să distingem sensul general al unui semn considerat ca o schemă de comportament (adică: ceea ce învățăm atunci cînd învățăm regulile întrebuințării semnului) de diversele comunicări pe care le putem efectua prin intermediul său în diferite împrejurări; or, putem afirma în mod corect că comunicările diferă între ele deoarece se referă la împrejurări diferite, în funcție de ceea ce a prilejuit rostirea respectivă. Dar această distincție nu coincide cu cea făcută de Frege. Într-adevăr, sensul general despre care vorbim aici nu este, așa precum este *Sinn* la Frege, o propoziție determinată, și

nici referința despre care vorbim nu este denumire sau desemnare. Utilizarea unor cuvinte sau expresii avînd o funcție de desemnare nu este exclusă, de exemplu atunci cînd spunem „Socrate a murit pentru că a băut cucută" sau „Dimineața aceasta a sunat lăptarul"; dar aceasta nu este esențial, căci referința de felul acelei pe care o avem acum în vedere se poate realiza prin utilizarea unor semne lipsite de părți semnificative, și ne putem cel puțin imagina că toate semnele ar fi de acest fel. Dacă ar fi să utilizăm terminologia lui Frege, putem spune doar că o anumită enunțare a unei propoziții exprimă un sens; dar pentru o înțelegere adecvată a acestui lucru trebuie să continuăm analiza.

Calitatea care a favorizat supraviețuirea și dezvoltarea sintaxei a fost economicitatea. Or, prima și cea mai evidentă măsură a economicității pe care o putem adopta în construirea propozițiilor constă în utilizarea unuia și aceluiași vocabular pentru a exprima atît enunțurile cît și întrebările, ordinele și celelalte. Într-un limbaj în care nici o expresie nu ar avea vreo parte înzestrată cu semnificație proprie nu ar putea exista vreo asemănare relevantă între o întrebare și răspunsul corespunzător sau între o cerere și promisiunea de a o satisface. Dar, după cîte știm, toate limbile umane pe care le cunoaștem cît de cît cuprind procedee cu ajutorul cărora propozițiile cu aceleași cuvinte sau rădăcini de cuvinte pot fi totuși deosebite ca fiind indicative, interogative, imperative sau optative. În limbile europene, diferențele sînt adesea indicate prin modificările acelui tip special de cuvinte care se numește verb, dar chiar în interiorul acestei grupe lingvistice există și alte posibilități. Astfel, întrebările sînt îndeobște exprimate printr-o adaptare a formei indicative, dar această adaptare poate consta fie în adăugarea unei particule (*Num venit?*), fie în inversarea ordinii cuvintelor („Vine el?"), fie pur și simplu printr-o intonație specială („El vine?").

Uneori, din motive de ordin stilistic sau retoric, schema normal adecvată unui gen de comunicări este folosită în vederea unei comunicări de gen diferit; de exemplu, atunci cînd un ordin militar este exprimat printr-o propoziție indicativă la viitor, sau cînd un enunț retoric face apel la o construcție interogativă. Dar în fiece caz avem o anumită convenție sau regulă implicită care determină ca o schemă să fie adecvată contextului și țelurilor vorbitorului. Oricare ar fi procedeul expresiv, se poate afirma în mod cert că o propoziție compusă posedă întotdeauna o anumită trăsătură care are funcția specială de a manifesta atitudinea vorbitorului sau ceea ce îl interesează anume. Într-adevăr, comunicarea este în esență manifestarea deliberată a unei atitudini față de o judecată sau o stare de lucruri ce poate fi concepută. Emiterea unui enunț este o manifestare a opiniei vorbitoru-

lui, punerea unei întrebări este manifestarea curiozității vorbitorului sau a dorinței sale ca cel care-l ascultă să-i dea o anumită informație, și așa mai departe. Numai tipurile cele mai uzuale de comunicări au primit denumiri speciale; dar, dacă am vrea, am putea distinge în cadrul comunicărilor cuprinse în clasa exclamațiilor mult mai multe varietăți. Să considerăm, de exemplu, deosebirile dintre „Slavă Domnului, s-a terminat!", „La naiba cu Papa!" și „Smith — episcop! Dumnezeule!". Dacă am lua în considerație întrebuințările limbajului în alte scopuri decît comunicarea (de exemplu, pentru ritual), ar trebui să trasăm alte distincții, dar aici putem ignora fără nici o grijă aceste complicații.

Pentru logician, toate acestea prezintă interes în primul rînd în legătură cu distincția implicată aici dintre manifestarea unei atitudini și propunerea unei judecăți față de care este manifestată respectiva atitudine. În cadrul unora dintre expresiile noastre unitare, cum sînt „Da", „Bine!" și „Drace!", nimic nu indică judecata față de care vorbitorul își manifestă atitudinea, deoarece rostirea unei atare expresii într-un caz dat este de obicei suficientă pentru a arăta direcția în care este îndreptat interesul vorbitorului. Evident, cazul opus al unei expresii unitare care nu manifestă vreo atitudine nu poate avea loc, deoarece fără manifestarea unei atitudini nu am avea nici un fel de comunicare. Dar se poate concepe că dezvoltarea sintaxei a produs semne pur propoziționale (judicaționale) care, în combinație cu semne de atitudine, în genul liniei lui Frege pentru judecată, ar constitui propoziții complete. De exemplu, am fi putut exprima enunțuri de formă „P da" și întrebări de forma „P se întreabă" unde „P" ca atare nu este nici declarativ, nici interogativ, ci pur și simplu un semn de propunere a unei judecăți. În fapt, lucrul acesta nu s-a petrecut în nici una din limbile naturale pe care le cunoaștem; oricine vrea să discute un semn judicațional într-o asemenea limbă trebuie să citeze o expresie care constituie o propoziție completă, deoarece conține mijloace pentru manifestarea unei atitudini. De obicei, logicienii au luat pentru exemplele lor propoziții indicative, fără să se gîndească la vreo alternativă. Poate că au procedat astfel deoarece în mintea lor au confundat întrucîtva logica și epistemologia, dar oricum există motive serioase pentru această alegere.

În primul rînd, propozițiile indicative tind spre o mai mare simplitate de construcție în comparație cu celelalte propoziții, exceptînd propozițiile imperative. În al doilea rînd, judecățile propuse de enunțuri pot fi de toate felurile, în timp ce comenzile sau cererile au totdeauna de-a face cu o eventuală acțiune în viitor a ascultătorului. În al treilea rînd, în vorbirea obișnuită, enunțurile, spre deosebire de alte comunicări (poate cu excepția întrebărilor), sînt considerate

adesea făcîndu-se abstracție de atitudinea unui vorbitor sau a altuia. După toate probabilitățile, motivul constă în aceea că în situațiile complicate intervine elementul opiniei și multe enunțuri similare s-ar putea concepe ca fiind emise de numeroși oameni în diverse contexte. Aceasta se întîmplă deosebit de frecvent în discuțiile științifice. Dar, indiferent de explicație, dacă cineva ne întreabă despre semnificația unui enunț considerat în acest fel, ne mulțumim să-i răspundem printr-o expresie de forma „că așa și pe dincolo", deși, dacă am încerca să dăm semnificația unui enunț de orice alt gen, am considera necesar să menționăm atitudinea vorbitorului. Ar fi poate cam exagerat să spunem că orice enunț semnifică o judecată dar, fără îndoială, putem afirma, alături de Frege, că de multe ori enunțurile sînt concepute ca exprimări ale gîndurilor în sensul în care unele și aceleași gînduri pot fi împărtășite, cu sau fără convingere, de mai mulți oameni. În al patrulea rînd — iar aceasta este lucrul cel mai important — propozițiile indicative, sau mai bine zis acele forme de cuvinte care în anumite contexte se vor numi propoziții indicative, pot fi utilizate în anumite situații fără putere asertivă. Cînd spunem „Vom avea o recoltă slabă dacă vremea asta continuă", nu ne obligăm să credem că vom avea o recoltă slabă; așadar, în acest context expresia de la început acționează ca un semn pur judicațional. Fără îndoială, ea este numai o parte a semnului pentru judecata asertată, dar întreaga propoziție nu și-ar îndeplini oficiul de a propune această judecată dacă această parte nu ar putea fi recunoscută ca semn judicațional cu drepturi depline. Toate aceste constatări sînt implicite în formularea unor scheme de inferență pe care le întîlnim la stoici, cum ar fi: „Dacă primul, atunci al doilea; dar primul; deci al doilea".

Deoarece este greu, dacă nu chiar imposibil, să discutăm aceste probleme fără a folosi o terminologie specială, să convenim a spune că propozițiile și clauzele de felul celor asupra cărora am atras atenția ceva mai sus sînt expresii judicaționale și că ele exprimă, propun sau semnifică judecăți. Trebuie însă să adăugăm că pe cînd unele expresii ca „$2 + 2 = 4$" și „virtutea este propria ei răsplată" exprimă una și aceeași judecată, indiferent de prilejul rostirii, majoritatea expresiilor utilizate în conversație exprimă judecăți diferite în ocazii diferite, în funcție de împrejurările rostirii. Or, este evident că dacă toate expresiile noastre pentru judecăți ar fi semne unitare, nu ar exista nici un fel de desemnări; este însă interesant să remarcăm că desemnările pot lipsi și în expresiile care posedă un anumit gen de structură internă. Cînd un liftier strigă „Merge sus!", primul cuvînt al expresiei pronunțate dă ideea de mișcare cu liftul său în viitorul apropiat, iar al doilea o completează indicînd direcția, dar nici unul din aceste cuvinte nu desemnează ceva; este de prisos să mai spunem

că expresia rostită nu-i decît o prescurtare pentru „Liftul meu merge sus", deoarece liftierul omite primele două cuvinte tocmai pentru că în contextul dat ele sînt de prisos. Atunci, de ce să mai introducem desemnări în cursul dezvoltării sintactice a limbajului? Se pare că răspunsul trebuie căutat iarăşi în considerente de economicitate. Fără îndoială, s-ar putea să existe o modalitate ca liftierul să-i poată spune unui obişnuit de-al locului, fără să recurgă la desemnări, că liftul următor, care coboară, se află în partea opusă a coridorului; dar dacă toate expresiile noastre pentru judecăţi ar fi asemănătoare cu exclamaţiile lucrătorilor, am avea nevoie de un număr foarte mare de expresii, iar unele dintre ele ar fi întrebuinţate extrem de rar. Construirea propoziţiilor cu ajutorul desemnărilor şi semnelor funcţionale, după cum este uzul, prezintă un avantaj evident, deoarece utilizarea acestor elemente ne permite să facem faţă relativ uşor unei diversităţi aproape nelimitate de situaţii.

Spunînd aceasta, nu vrem să susţinem că schema subiect-predicat, pe care o întîlnim în toate limbile foarte evoluate, este un procedeu pur arbitrar. Dimpotrivă, pare evident că utilitatea procedeului depinde de faptul că multe judecăţi, deşi nu chiar toate, faţă de care manifestăm atitudini, sînt atributive sau relaţionale. Este totdeauna riscant să construim un argument metafizic pe baza unei scheme de construcţie utilizată într-o expresie judicaţională, dar dacă cineva susţine cu toată seriozitatea că întreaga sintaxă este o construcţie liberă a minţii omeneşti, atunci el este dator să explice ce anume înţelege prin libertate în această ordine de idei şi, în special, să arate prin exemple cum ar putea fi realizat acelaşi lucru într-un mod cu totul diferit. Ceea ce vrem să subliniem aici este cu totul altceva, şi anume că desemnarea nu trebuie luată ca o paradigmă a tuturor utilizărilor de semne, întrucît, atunci cînd se produce, ea trebuie explicată ca ceva accidental în efectuarea comunicării. A spune că „Socrate" îl desemnează pe Socrate nu înseamnă a spune altceva decît că expresiile pentru judecăţi care conţin acest nume sînt adecvate pentru propunerea de judecăţi cu privire la Socrate, faţă de care am dori eventual să manifestăm diverse atitudini. Faptul că putem spune că numirile şi cvasidenumirile posedă atît sens cît şi referinţă reprezintă o particularitate a acestor semne, de care va trebui să ne ocupăm în secţiunea următoare. În teoria semnificaţiei, noţiunea fundamentală nu este desemnarea, ci, mai curînd, ceea ce Frege numea expresia sensului.

Odată clarificat acest punct, putem face uz de unele rezultate ale lui Frege în vederea formulării unei teorii satisfăcătoare a adevărului. Analizînd vorbirea indirectă, Frege spune că o clauză substantivală ca „faptul că orbitele planetelor sînt circulare" are ca referinţă sensul

propoziției corespunzătoare ei: „Orbitele planetelor sînt circulare". Cu alte cuvinte, printr-o elaborare adecvată a limbajului, judecățile pot fi nu numai exprimate, ci și desemnate. Firește, desemnarea unei judecăți nu poate fi expresie judicațională în accepția noastră tehnică; dar nici nu este măcar necesar ca desemnarea să fie alcătuită prin adăugarea prefixului „faptul că" la o expresie judicațională, sau prin introducerea construcției cu acuzativul și infinitivul ca în limba latină. Căci, deși desemnările astfel constituite prin adaptarea expresiilor judicaționale au o anumită prioritate, expresii cum sînt „teorema lui Pitagora", „doctrina păcatului originar" și „ceea ce a spus Gladstone în 1883" sau chiar cuvinte izolate ca „materialism" pot servi țeluri asemănătoare. Diversitatea semnelor ce pot fi folosite în acest scop este de fapt nelimitată, iar pentru a ne convinge de însemnătatea capacității de a desemna judecăți nu avem decît să ne gîndim cît de serios ar fi sărăcit limbajul nostru dacă i-ar lipsi asemenea semne. Îndeosebi cu greu s-ar putea întreprinde un studiu al logicii în absența unor asemenea semne, întrucît cuvintele caracteristice ale logicianului, cum ar fi „atrage după sine", „inconsistent", „necesar" și „posibil", sînt utilizate în primul rînd pentru alcătuirea unor propoziții în care termenul subiect desemnează o judecată. Din același motiv, cuvîntul „adevărat" ar înceta să aibă accepția care îi interesează pe filosofi.

Într-un pasaj pe care l-am citat înainte, Frege spune că „Gîndul că 5 este un număr prim este adevărat" este echivalent cu „5 este un număr prim", dar nu reușește să vadă că principiul acestei echivalențe este un răspuns satisfăcător la problema filosofică a adevărului. Avem nevoie de adjectivul „adevărat" deoarece avem desemnări de judecăți, și avem nevoie de o modalitate de utilizare a lor pentru a spune ceea ce altfel ar putea fi spus numai prin intermediul unor expresii pentru aceleași judecăți. Dacă considerăm cuvîntul englez „that" („că") drept un prefix care transformă expresia unei judecăți într-o desemnare (ceea ce în limba română se realizează bunăoară făcînd uz de „faptul că"), am putea spune eventual că adăugarea expresiei „este adevărat" reprezintă operația inversă, căci atunci cînd apar împreună ambele expresii nu avem nimic în plus față de ceea ce Frege numea conținutul rostirii respective; sîntem înclinați să spunem că semnul compus „este adevărat faptul că" slujește exact aceluiași țel retoric pe care îl servește și particula „într-adevăr", adică numai pentru indicarea unei concesii sau marcarea sfîrșitului unei dispute. Nu trebuie uitat însă că cuvîntul „adevărat" se aplică de multe ori la judecăți care nu sînt desemnate prin clauze ce încep cu „faptul că", iar uneori se aplică chiar și la judecăți pe care acum nu le-am putea desemna în acest fel. De exemplu, s-a spus: „Orice ar putea cîndva să declare *ex cathedra* un papă în materie de credință

sau morală este adevărat". Este evident că aici cuvîntul „adevărat" nu poate fi eliminat din context prin simplul procedeu al formulării expresiilor pentru toate declarațiile papale ce pot fi făcute vreodată. Și totuși, cuvîntul poate fi eliminat prin folosirea adecvată a unor variabile de judecăți, ca de exemplu în parafraza: „Dacă un papă care vorbește *ex cathedra* despre credință sau morală declară că *p*, atunci *p*". Iar acest lucru o dată realizat, devine limpede că și aici rolul cuvîntului „adevărat" este asigurarea unei conexiuni între desemnările judecăților și exprimările judecăților. La fel cum litera „*p*" din antecedentul noii noastre propoziții marchează un loc gol care poate fi completat de expresia unei judecăți, tot astfel „că *p*" din consecvent este un semn care s-a transformat în desemnarea unei judecăți în cazul substituirii pentru litera „*p*" a unei expresii judicaționale. Formulînd parafraza, am recurs în mod deliberat la o variabilă liberă și nu la una legată pentru semnificarea universalității, deoarece dacă am fi început parafraza cu cuantorul „pentru orice *p*", gramatica cuvîntului „orice" ar fi sugerat că locurile goale marcate de litera „*p*" ar fi adecvate numai pentru desemnări; or, nu aceasta urmărim noi aici.

După Frege, orice semn complet exprimă un sens și desemnează ceva numit de noi referința acelui semn. Dar am găsit motive să credem că exprimarea și desemnarea sînt misiuni îndeplinite de semne de tipuri diferite, iar această distincție pare să aibă importanță nu numai pentru teoria adevărului, dar și pentru soluționarea dificultăților descoperite de Frege în legătură cu funcțiile. După cum „Papa este un om" se poate caracteriza ca exprimînd o judecată, tot astfel semnul atributiv „... este un om" se poate caracteriza ca exprimînd o funcție judicațională. Și deși despre nici unul din acestea două nu putem spune propriu-zis că desemnează ceva, putem, dacă ne convine, să construim semne care să desemneze ceea ce exprimă semnele de mai sus. De pildă, „umanitate" și „a fi om" sînt desemnări uzuale ale atributului sau, în terminologia lui Frege, ale conceptului pe care îl afirmăm despre papă atunci cînd spunem că el este un om. Dificultățile lui Frege se datorează faptului că el ignoră necesitatea unor semne noi și încearcă să utilizeze pentru desemnare expresii ca „este om", în pofida faptului că acest rol nu le convine. Negreșit, el nu scrie adesea ceva atît de vădit nesatisfăcător cum ar fi „conceptul ξ este un om"; dar în explicațiile pe care le dă cu privire la scrierea sa, el scrie de multe ori „conceptul Φ (ξ)", iar în discuțiile de ordin general folosește expresii atît de nelalocul lor cum sînt „conceptul *om*" sau „conceptul «om»". De aceea, nu este surprinzător că uneori Frege nu se simte în largul său și înclină să se plîngă că limba este esențialmente inadecvată. El presupune în mod eronat că desemnarea

unei funcţii trebuie să fie incompletă sau nesaturată, ca şi expresia acesteia, şi totuşi el vede limpede că un semn care este adecvat pentru utilizare în calitate de predicat nu poate servi în mod adecvat ca subiect gramatical atunci cînd vrem să vorbim despre funcţia pe care o exprimă.

În vorbirea obişnuită, cuvinte ca „umanitate" funcţionează satisfăcător în calitate de desemnări ale funcţiilor judicaţionale, sau ale atributelor, deoarece ne-am familiarizat cu ele şi ne pricepem să evităm primejdiile de confundare a lor cu expresiile corespunzătoare. Atunci cînd, aşa cum se întîmplă uneori, logicienii susţin că ar trebui să considerăm „umanitate" ca o abreviere a „umanităţii lui «ξ»", ei comit o greşeală. În timp ce, deşi nerecomandabil din punct de vedere stilistic, este totuşi permis să spunem „Umanitatea este exemplificată în papă", este de-a dreptul absurd să spunem „Umanitatea lui «ξ» este exemplificată în persoana papei". Într-o scriere ca cea a lui Frege, ar fi raţional să aflăm reguli mai explicite decît cele pentru limbajul obişnuit, iar dacă vrem să includem desemnări ale funcţiilor judicaţionale ar trebui să ne străduim să indicăm limpede relaţia dintre desemnările şi expresiile acestor funcţii. Aceasta se poate realiza prin adoptarea unui procedeu utilizat de Frege atunci cînd vorbeşte despre domenii (parcursuri de valori). După cum el scrie $\grave{\alpha}$ (α *este un om*) pentru „clasa oamenilor", tot astfel putem scrie $\grave{\alpha}(\alpha$ *este un om*) pentru „umanitate" sau „însuşirea de a fi om". Aici este evident că noul semn derivă dintr-o expresie funcţională cu un loc gol, dar nu avem nici un pericol de confuzie, deoarece litera din interiorul parantezelor este legată de litera din exterior, iar întregul semn compus constituie în mod evident o desemnare. Inversînd semnul de apartenenţă al lui Frege în scopul exprimării faptului de a avea o exemplificare (adică în vederea exprimării a ceea ce Frege numeşte cădere sub un concept), putem scrie în noua noastră notaţie $\Delta \cup \grave{\alpha}$ $\Phi(\alpha)$ ca un echivalent pentru $\Phi(\Delta)$. Nu propunem aceste inovaţii cu titlul de simbolism optim pentru tratarea problemei, ci numai pentru a arăta că dificultăţile lui Frege se pot depăşi foarte uşor cu mijloace asemănătoare celor pe care le avea la dispoziţie, cu singura condiţie de a recunoaşte limpede că exprimarea şi desemnarea sînt distincte. Întrucît $\Delta \cup \grave{\alpha}$ $\Phi(\alpha)$ este exprimarea judicaţională a unei construcţii destul de complicate, este firesc ca ea să includă o expresie funcţională, şi anume ... $\cup$ ---, dar aceasta nu trebuie să ne îngrijoreze. În adevăr, nici o porţiune a reformei noastre nu prevede ca expresiile pentru judecăţi să se construiască numai cu ajutorul desemnărilor, astfel încît argumentul principal al lui Frege pentru a dovedi imposibilitatea de a vorbi direct despre funcţii nu ne afectează.

Există însă un considerent cu totul diferit, care trebuie să ne facă atenți în ce privește referirea la funcții. Cînd Frege a introdus acest termen, el înțelegea prin funcție logică o funcție la care toate valorile erau valori de adevăr. El presupunea că în logica primară funcțiile sînt de la valori de adevăr, la valori de adevăr, iar în logica generală de nivelul unu de la obiecte oarecare la valori de adevăr. În literatura logică de mai tîrziu, numeroși autori care nu acceptă teoria lui Frege asupra valorilor de adevăr, și care poate nici nu au examinat-o vreodată în mod serios, au numit funcții de adevăr funcțiile de primul gen și au numit funcții propoziționale toate celelalte funcții. Dacă însă ajungem la concluzia că Frege greșea atunci cînd caracteriza propoziția indicativă ca nume al unei valori de adevăr, negăm de fapt analogia care l-a făcut pe Frege să adopte această terminologie funcțională. Unii succesori ai lui Frege au încercat să conceapă funcțiile din logică drept funcții avînd ca argumente lucruri (în sensul cel mai larg cu putință, adică într-un sens mai larg decît al „obiectului" la Frege) și luînd ca valori judecăți, iar alții fac uz de expresia „funcție propozițională" ca și cum ea n-ar fi decît un mod convenabil de referire la un fragment de propoziție, ca de pildă „... este înțelept" sau „... îl iubește pe ---". Nici una dintre aceste două explicații nu l-ar fi satisfăcut pe Frege și nici una nu este suficientă pentru a justifica menținerea terminologiei sale. Într-adevăr, o funcție în sensul matematic propriu-zis este o schemă de punere în corespondență și nu o expresie, așa cum sugerează a doua dintre aceste explicații; aplicarea semnului unei atare funcții (de exemplu „$\sqrt{\ }$") la o desemnare (de exemplu pentru „2") este presupusă a produce o altă desemnare (de exemplu „$\sqrt{2}$") și nu o expresie, cum susține prima explicație.

De aceea, ar fi mai indicat poate să abandonăm cu totul terminologia lui Frege și să adoptăm în locul ei un alt mod de a vorbi, care să nu mai sugereze analogii inadecvate. Am putea, de exemplu, să vorbim de dependențe de adevăr în loc de funcții de adevăr și de atribute și relații în loc de funcții propoziționale de diferite spețe. Dacă ne-am angaja într-o prezentare a logicii făcînd abstracție de istoria ei, desigur că am proceda astfel. Dar în celelalte părți ale lucrării de față am avut prilejul să observăm că numeroși logicieni au utilizat cuvîntul „funcție" fără a accepta teoria lui Frege asupra valorilor de adevăr, astfel încît este convenabil să folosim în expunere practica lor, limitîndu-ne la precizarea că oriunde intervine acest cuvînt în textul nostru el trebuie înțeles ca fiind echivalent cu un substitut sau altul din cele propuse mai sus.

În anumite privințe, prezentarea adevărului schițată mai sus este similară celei date de Tarski în articolul său intitulat „Conceptul

de adevăr în limbajele formalizate"[2]. Şi, fără îndoială, explicaţia noastră se revendică, la fel ca şi explicaţia sa, de la autoritatea celebrei definiţii aristotelice conform căreia: spune adevărul acel ce spune despre ceea ce este că este şi despre ceea ce nu este că nu este[3]. Dar între concepţia noastră şi cea a lui Tarski există o deosebire foarte importantă. În ce ne priveşte susţinem că adjectivul „adevărat" este aplicabil în mod primordial la judecăţi, în timp ce Tarski presupune că este aplicabil în mod primordial la propoziţii. Propoziţia „Zăpada este albă" e adevărată, ne spune el, dacă şi numai dacă zăpada este albă. Aici, semnul cuprins între semnele citării trebuie înţeles ca un nume sau o desemnare, şi întreaga remarcă urmăreşte să arate cum condiţia necesară şi suficientă pentru adevărul propoziţiei astfel menţionate poate fi dată printr-o folosire a însăşi acestei propoziţii (sau, mai bine zis, a acestei forme verbale). Pe scurt, deosebirea principală dintre această teorie a adevărului şi teoria noastră este aceea că Tarski vorbeşte despre propoziţii acolo unde noi vrem să vorbim despre judecăţi. Dar, aşa cum subliniază însuşi Tarski, dificultăţile apar cînd se încearcă să se transforme modelul său de explicaţie într-o definiţie generală, utilizîndu-se o variabilă, adică scriind:

pentru orice p, „p" este o propoziţie adevărată dacă şi numai dacă p.

Într-adevăr, dacă nu facem o convenţie specială soldată cu efectul contrar (şi. spune Tarski, este foarte greu, dacă nu chiar imposibil, să facem această convenţie de o manieră satisfăcătoare), atunci semnul cuprins între semnele citării nu este, aşa cum se intenţiona, un fel de semn funcţional care se poate transforma în numele unei propoziţii printr-o substituţie adecvată pentru litera dinăuntrul semnelor citării, ci este numai o desemnare a acelei litere. El merge chiar pînă acolo încît susţine că posibilitatea construirii paradoxului mincinosului în cadrul limbajului obişnuit ar dovedi că pentru acesta, spre deosebire de limbajul formalizat al ştiinţei, nu poate exista o definiţie satisfăcătoare a adevărului. Această concluzie este atît de stranie, încît trebuie să ne pună în gardă împotriva presupunerilor din care derivă; iar sursa dificultăţii pare să fie convingerea lui Tarski, acceptată necritic, că adevărul este în mod primordial o proprietate a propoziţiilor.

---

[2] Publicat pentru prima dată în *Travaux de la societé des sciences et des lettres de Varsovie*, clasa III, Math-Phys. XXXIV (1933), traducere germană în *Studia Philosophica*, I (1936) pp. 261—405; traducere engleză în *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 152—278.

[3] *Metaphysica*, Γ, 7 (1011 b 25).

Cînd avem de-a face cu formule matematice (care îl interesează în mod special pe Tarski) sau alte expresii care seamănă cu exemplul său prin aceea că nu conţin cuvinte reflexive (adică cuvinte care determină lucruri sau evenimente prin relaţie cu circumstanţele propriei lor rostiri), presupunerea lui Tarski nu duce la nici o dificultate serioasă. Într-adevăr, putem vorbi, desigur, despre adevărul unei formule matematice tot aşa cum nu pare absurd să vorbim despre adevărul propoziţiei generale „Zăpada este albă". În toate aceste cazuri avem de-a face cu un tip de semn compus care propune o aceeaşi judecată în fiecare împrejurare în care este folosit, şi tocmai de aceea putem discuta adevărul semnului aproape la fel cum discutăm adevărul judecăţii exprimate de acest semn. Dar acestea sînt cazuri speciale. O propoziţie dintre cele mai obişnuite poate fi enunţată, la momente diferite şi în împrejurări diferite, pentru a exprima diferite judecăţi, unele adevărate şi unele false. Judecata asertată de Jones prin afirmaţia „Mi-e foame" nu este aceeaşi cu judecata asertată de Smith prin pronunţarea acestor cuvinte în acelaşi timp şi nici aceeaşi cu cea asertată ieri de Jones prin rostirea acestor cuvinte. Iar cînd spunem — cum obişnuim să facem uneori — că o propoziţie era adevărată în momentul rostirii sau scrierii ei, vrem să spunem prin aceasta, evident, că ea a fost folosită atunci pentru exprimarea unei judecăţi adevărate, deşi în momentul de faţă ea nu ar putea fi folosită în acelaşi scop. Atunci cînd nu urmărea nemijlocit expunerea propriei sale teorii a adevărului, Frege era pe deplin conştient de această trăsătură a limbii. Ridicîndu-se împotriva psihologismului în logică, el scrie că am putea eventual să caracterizăm propoziţia „Mi-e foame" ca fiind adevărată pentru unii oameni şi falsă pentru alţii, sau ca adevărată în anumite circumstanţe şi ca falsă în altele, dar aceasta numai pentru că este utilizată în scopul exprimării unor judecăţi diferite în ocazii diferite. „Toate determinările de spaţiu, de timp etc. revin — spune el — gîndului (Gedanke) al cărui adevăr este considerat: a fi adevărat este în sine însuşi ceva aspaţial şi atemporal"[4].

Pentru evitarea acestor dificultăţi, acei ce înclină să accepte punctul de vedere al lui Tarski ar putea spune că propoziţiile cărora ei le atribuie adevăr în sensul fundamental sau primar sînt rostiri individuale, adică evenimente trecătoare ale vorbirii. Fără îndoială, nu la ele se gîndea Tarski însuşi atunci cînd şi-a scris studiul, deoarece ele nu pot fi desemnate prin desemnări de genul celor analizate de el, şi anume prin nume cu semne de citare şi nume structural descriptive, construite prin utilizarea unor procedee ca scrierea literă cu literă. Uneori însă, noi utilizăm cuvîntul „propoziţie" pentru a ne referi la un lucru

[4] *Gg.*, vol. I, pp. XVI—XVII.

de acest gen, de exemplu atunci cînd spunem că cineva s-a oprit ca să respire la mijlocul primei sale propoziţii; iar dacă atribuim adevăr unui asemenea lucru, atunci cel puţin nu ne va fi deloc greu să admitem că poate să devină mai tîrziu fals. Este clar însă că atunci cînd presupunem că o propoziţie individuală este capabilă de adevăr, condiţia pentru adevărul ei nu poate fi dată prin procedeul lui Tarski de a spune „dacă şi numai dacă" şi de a repeta după aceeea respectiva propoziţie. Într-adevăr, o propoziţie individuală nu este o formă verbală, ci un eveniment trecător şi astfel nu poate fi *folosită* în acest mod, după cum nu poate fi nici menţionată în unul din modurile în care sînt menţionate de către Tarski propoziţiile care îl interesează. Şi nici noi, de fapt, nu vorbim de obicei despre adevărul rostirilor individuale. Cînd sînt considerate în această ordine de idei, ele sînt privite de regulă ca expresii ale judecăţilor.

Una din afirmaţiile principale ale lui Tarski este că paradoxul mincinosului se datorează unei contradicţii prin care limba obişnuită permite aplicarea propriilor sale cuvinte „adevărat" şi „fals" la propriile ei propoziţii. El pare să aibă dreptate cînd crede că considerentele *semantice* (cum numeşte el argumentele de genul celor expuse în articolul său) reclamă o distincţie a nivelelor de limbaj. Într-adevăr, avem în mod evident un sens demn de luat în seamă în care posibilitatea construirii propoziţiei „«Zăpada este albă» este adevărat" presupune posibilitatea construirii propoziţiei „Zăpada este albă"; observaţia poate servi să explice de ce curioasa enunţare a Mincinosului nu reuşeşte să exprime în genere vreo judecată. Dar afirmaţia că limbajul obişnuit este inconsistent deoarece aspiră la universalitate şi omnicompetenţă reprezintă un paradox (în alt sens al cuvîntului), un paradox gratuit. Limbajul obişnuit nu este un sistem închis, ci este tot ceea ce facem în cadrul lui, vorbind; iar dacă considerentele semantice arată necesitatea unei distincţii între nivele de limbaj, distincţia va fi făcută înăuntrul limbajului obişnuit. Deşi, într-un anumit sens, limbi naturale ca engleza şi franceza constituie alternative una pentru cealaltă şi pentru un simbolism tehnic, limbajul obişnuit, de felul celui discutat de Tarski, nu constituie o alternativă la un limbaj extraordinar, care a fost sau care poate fi inventat de logicieni în vederea tuturor scopurilor legitime la care serveşte în prezent limbajul obişnuit. Dimpotrivă, acesta din urmă este matricea în cadrul căreia sînt elaborate toate celelalte sisteme de comunicare şi, de aceea, el nu poate fi criticat ca un produs nereuşit al unui rival profesional.

Grija multor logicieni de a sublinia că adevărul priveşte propoziţiile şi nu judecăţile se datorează unei fobii a entităţilor abstracte, fobie care, la rîndul ei, pare să provină din două surse. Prima, care a putut fi observată la filosofi încă de cînd Platon a stîrnit proteste vorbind

despre o lume suprasensibilă, este obsesia economiei de gîndire. A doua, care ţine de istoria mai recentă, este reacţia violentă împotriva tuturor tentativelor de a vorbi despre structura lumii. Această fobie odată diagnosticată, pacientul trebuie încurajat şi chiar împins să aducă la îndeplinire programul său de eliminare sistematică, în loc de a face simple declaraţii de oracol. Odată determinat să persevereze un timp destul de mare în această direcţie, el poate ajunge astfel în situaţia de a-şi da seama că îi este imposibil să spună tot ce are de spus fără să vorbească despre calităţi, relaţii, păreri, ipoteze, concluzii şi tot restul. Cura va fi completă atunci cînd el este gata să admită că, deşi Platon şi adepţii săi au ajuns la absurditatea de a vorbi despre suprasensibil ca despre ceva ce ar putea fi observat printr-un fel de suprasimţ, acesta este un motiv mult prea slab pentru a susţine că toate încercările de desemnare a unor obiecte suprasensibile sînt într-un fel improprii. Într-adevăr, dacă urmează să vorbim în genere despre felul cum folosim limba, trebuie să ne permitem a spune că o propoziţie sau o expresie predicativă exprimă ceva. Dar pentru a spune ce exprimă un asemenea semn avem nevoie nu de o altă expresie, ci de o desemnare, întrucît în cadrul oricărui enunţ pozitiv adevărat de forma „... exprimă ---" semnele care completează cele două locuri goale trebuie să fie amîndouă nişte desemnări, primul semn pentru o expresie, iar al doilea pentru ceea ce exprimă acea expresie. Ca atare, este absurd să ne lipsim de bunăvoie de această facilitate numai pentru că uneori s-a abuzat de ea.

Este însă prea puţin probabil ca programul de limitare a preocupărilor numai la propoziţii să fi fost adoptat vreodată pe scară largă de către logicieni numai pentru faptul că avem cuvinte care în unele contexte înseamnă acelaşi lucru ca „propoziţie" iar în altele acelaşi lucru ca „judecată". Atunci cînd am examinat opera lui Bolzano am văzut că cuvîntul german *Satz* este uneori un termen gramatical echivalent cu „propoziţie" sau „clauză", dar alteori indică o lege, o teoremă, un principiu sau o judecată, adică ceva ce se poate exprima în diferite moduri în limbi deosebite şi se poate caracteriza ca adevărat sau fals. În engleză, cuvîntul „propoziţie" (*sentence*) este specializat mai îngust decît *Satz* şi nu este privit în mod normal ca un subiect adecvat pentru adjectivele „adevărat" şi „fals". Dar cuvîntul nostru „enunţ" este aproape tot atît de labil ca *Satz*, avînd o sferă de aplicabilitate oarecum diferită. El poate însemna sau o propoziţie indicativă, sau ceea ce se afirmă despre o anumită producere a unei propoziţii indicative, sau actul enunţării a ceva; iar în afară de toate aceste accepţii el poate să figureze în expresia concrescută „a face un enunţ", unde nu poate fi parafrazat în mod separat. Acei ce găsesc că e plauzibil să atribuim propoziţiilor adevăr sînt, pare-se, influenţaţi de faptul

că expresia „propoziție indicativă" este legată, așa cum este, de expresia „enunț", iar prin „enunț" cu „judecată".

Fără îndoială, menționarea judecăților dă uneori loc la confuzii, deoarece autori ca Bolzano le-au expulzat în intermundii ciudate, între limbaj și realitate. Dar este greșit să credem că utilizarea cuvîntului „judecată" ne obligă fără drept de apel la o inovație inacceptabilă. În accepția lor comună din epoca modernă, cuvintele „propoziție" și „judecată" slujesc la efectuarea a două clasificări diferite în cadrul evenimentelor actuale și posibile ale vorbirii. Orice asemenea eveniment este rostirea unui enunț, adică producerea unei exemplificări a unei anumite forme verbale care, în principiu, ar mai putea avea și alte exemplificări. Într-adevăr, este cu neputință să vorbim dacă nu vorbim într-un limbaj, adică dacă nu facem uz de semne repetabile. Dar am văzut că mai multe enunțuri ale unei propoziții-tip pot exprima judecăți diferite, în funcție de împrejurările apariției lor; este evident, totodată, că o anumită judecată poate fi exprimată prin rostiri ale unor propoziții-tip felurite, deoarece nu există un limbaj unic în care să fim obligați a spune tot ce avem de spus. Cînd gramaticienii întrebuințează cuvîntul „propoziție" (așa cum obișnuiesc) pentru o formulă verbală, ei vor să se refere la trăsăturile comune ale rostirilor, care seamănă între ele aproape la perfecție ca sunet sau după alt caracter perceptibil, dar se pot deosebi între ele în mod considerabil ca vehicule de comunicare. Un exemplu este propoziția „I have the pen of gardener's wife" pe care generații întregi de școlari s-au străduit s-o traducă în franțuzește fără să-și dea osteneala să se întrebe ce înseamnă aici „pen" și „gardener"*. Pe de altă parte, atunci cînd logicienii întrebuințează cuvîntul „judecată", ei vor să se refere la trăsătura comună a acelor rostiri care în calitate de vehicule de comunicare (exceptînd atitudinea) sînt absolut similare, dar se pot deosebi radical între ele după sunet sau după alt caracter perceptual.

Dacă pe cineva îl șochează spusele lui Bolzano, el poate, dacă dorește, să confere adevăr și falsitate unor semne propoziționale determinate pe care aici le vom numi enunțuri (*utterances*). Dar dacă ia această hotărîre, el trebuie, ca și Leibniz, să recunoască faptul că adevărul nu poate privi numai enunțurile actuale, deoarece nu este lipsit de sens să vorbim despre descoperirea unor adevăruri care n-au fost încă formulate. Iar dacă concede adevărul și pentru enunțurile posibile, el permite tot ce reclamă concepția modernă asupra propozițiilor. Pe scurt, discuțiile logicienilor despre propoziții (judecăți) nu

* Date fiind multiplele accepții ale omonimelor „pen", propoziția se poate traduce prin „Eu am pana soției grădinarului", prin „Eu am lebăda soției grădinarului" sau prin „Eu am forma soției grădinarului" (Nota. trad.).

implică o abstracție mai primejdioasă decît discuțiile gramaticienilor despre propoziții, deși din punct de vedere gramatical propozițiile par să fie mai acceptabile, întrucît noțiunea de asemănare după un caracter perceptual este mai lesne de sesizat decît noțiunea de asemănare după funcție. Așa cum vom vedea într-o secțiune ulterioară a acestui capitol, cu privire la modul în care pot să apară în cadrul discursului referiri la judecăți se ridică unele probleme speciale, dar pentru soluționarea acestor probleme nu este necesar să mergem dincolo de analiza judecăților pe care am schițat-o aici.

2. *Teoria descripțiilor și varietatea desemnărilor*

Frege a introdus distincția sa între sens și referință atunci cînd considera enunțul „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară" și am văzut că distincția este aptă să soluționeze chestiunea care îl preocupă în acest context. Într-adevăr, deși cele două expresii, „Luceafărul de ziuă" și „Luceafărul de seară", sînt desemnări ale aceluiași obiect, ele au în mod evident sensuri diferite. Cum se poate însă împăca această distincție cu încercarea noastră de a arăta că expresiile și desemnările sînt semne de genuri deosebite? Răspunsul este că aceste desemnări, ca și multe altele, derivă din expresii, și putem spune deci că ele au sens într-un mod derivat. Utilizînd expresia „Luceafărul de ziuă" ca subiect într-o propoziție, noi nu exprimăm prin aceasta judecata că există un astru și numai unul care poate fi văzut adesea cînd se face ziuă, însă întrebuințarea pe care i-o dăm expresiei presupune acceptarea acelei judecăți. În limbajul cotidian, o propoziție care conține expresia „Luceafărul de ziuă" se zice că implică existența unui astru, și numai al unuia, care poate fi văzut adesea cînd se face ziuă. Accepția lui „implică" la care ne referim aici nu este prea mult discutată în tratatele de logică, dar ea este interesantă și destul de complicată. Într-un fel, implicația de acest gen pare a fi mai puțin ca o expresie. Într-adevăr, cînd un om care a utilizat o expresie ce implică o anumită judecată trece la formularea acelei judecăți, noi considerăm că el a făcut ceva în plus. În altă privință însă, o implicație de acest gen este mai mult decît o simplă expresie. Intr-adevăr, cineva poate să exprime o judecată fără să manifeste sau să vrea să manifeste încredere în această judecată; dar dacă întrebuințează o expresie care implică această judecată, se înțelege că el o acceptă, chiar dacă propoziția în care figurează respectiva expresie nu este indicativă. De exemplu, dacă cineva invită un proaspăt cunoscut al său să-i facă o vizită și-i spune „Vă rog să veniți cu soția", el nu asertează judecata că acea cunoștință a sa este

căsătorit, dar, fără îndoială, el lasă să se înţeleagă că are această convingere. Desemnarea unui lucru este indicarea lui sau atragerea atenţiei asupra lui; aşadar, cînd un vorbitor întrebuinţează o descripţie definită la singular, ca şi cum ar încerca să desemneze ceva, este firesc să presupunem că el crede în existenţa unui lucru, şi numai a unuia, care corespunde descripţiei, întrucît în caz contrar procedura sa ar fi fără noimă. Cînd cineva este nesigur de adevărul judecăţii sale existenţiale, el poate să atenueze remarca sa într-un mod adecvat. Cînd, de exemplu, nu are certitudinea dacă noua sa cunoştinţă este căsătorit, el poate spune: „Dacă sînteţi căsătorit, vă rog să veniţi cu soţia". În acest context, descripţia nu pare să îndrepte atenţia noastră asupra unui lucru determinat care putea eventual să fi fost descris într-un alt mod. Intr-adevăr, clauza condiţională are efectul de anulare a obligaţiei ce s-ar fi exprimat, altminteri, prin utilizarea descripţiei definite. Avînd în vedere afirmaţiile a numeroşi logicieni, merită poate să observăm şi faptul că o descripţie definită poate să apară la plural, adică cu o implicaţie a existenţei *mai multor* lucruri corespunzătoare ei. Spunem, de pildă: „Primii apostoli erau cu toţii evrei".

Frege îşi dădea bine seama de faptul că în limbajul obişnuit utilizarea unei descripţii definite ca subiect al unui enunţ singular presupunea acceptarea unei judecăţi neasertate explicit, şi el vedea că dacă descripţia nu reuşea să desemneze ceva, atunci nu se poate spune că enunţul în întregul său ar fi adevărat sau fals. Dar el considera important să insiste asupra aplicării principiului terţului exclus la toate formulele bine formate din propria sa scriere şi de aceea, aşa cum am văzut, a vrut să dea un referent de un gen sau altul pentru fiecare descripţie definită din sistemul său, deşi admite că uneori referentul ar fi cu totul independent de intenţia normală a persoanei care utilizează acea descripţie. Logicienii care i-au urmat au încercat să facă faţă în alte feluri acestei dificultăţi.

În *Principia Mathematica*, Whitehead şi Russell procedează ca şi cum judecata despre care spunem de obicei că este implicată de folosirea unei descripţii ar fi enunţată explicit în propoziţia care conţine descripţia respectivă. După ei „Regele Franţei este pleşuv" este echivalent cu $(\exists c)\{(x)[K(x) \equiv x = c] \cdot B(c)\}$, sau „Există un lucru, să zicem c, astfel încît (I) un lucru este regele Franţei dacă şi numai dacă este identic cu c şi (II) c este pleşuv", ceea ce exprimă, desigur, o judecată falsă dacă sau nu există nici un rege al Franţei, sau există mai mulţi decît unul[5]. Dar, pentru a-şi apăra în mod consecvent concepţia, Whitehead şi Russell consideră necesar să distingă între

[5] *Principia Mathematica*, 1, *14.

intrarea primară şi intrarea secundară a unei descripţii. Astfel, dacă cineva spune: „Regele Franţei nu este pleşuv", înţelegînd $(\exists c)\{(x)[K(x) \equiv x = c].\sim B(c)\}$, descripţia are o intrare primară, în timp ce dacă el recurge la aceeaşi formă verbală în înţelesul $\sim(\exists c)\{(x)[K(x) \equiv x = c].B(c)\}$, descripţia are intrare secundară. Vom constata că în primul caz se presupune că vorbitorul acceptă implicaţia existenţială a descripţiei sale, în timp ce în al doilea caz întreaga propoziţie poate să exprime o judecată adevărată chiar dacă nu există nici un rege al Franţei.

În propriul lor simbolism, distincţia este arătată limpede printr-un procedeu oarecum asemănător cu utilizarea unui cuantor care arată domeniul de acţiune al unei generalizări. De aceea, exemplul nostru de intrare primară ar fi redat prin formula $[(\imath x)K(x)]\{\sim B[(\imath x)K(x)]\}$, iar exemplul nostru de intrare secundară prin formula $\sim[(\imath x)K(x)]\{B[(\imath x)K(x)]\}$. Aici, repetarea descripţiei ca prefix al unei expresii puse între paranteze drepte este considerată a indica faptul că implicaţia descripţiei aparţine numai expresiei puse între paranteze drepte. Există însă convenţia că, pentru simplificare, prefixul poate fi omis atunci cînd domeniul lui de acţiune ar fi cea mai mică expresie pusă între acolade în cadrul căreia descripţia figurează ca termen.

Pe de altă parte, Hilbert şi Bernays înving dificultatea refuzînd să admită o descripţie definită ca termen dacă judecata pe care o implică nu a fost încă demonstrată[6]. Din această stipulare rezultă că un aranjament de semne care nu este admisibil ca formulă pe o anumită treaptă de dezvoltare devine admisibil pe o altă treaptă, cînd au fost demonstrate mai multe teoreme.

Ce trebuie să spunem despre aceste trei puncte de vedere? Considerate ca propuneri rivale pentru o legislaţie, prin care principiul terţului exclus poate fi păstrat în raport cu formulele limbajului artificial al logicii matematice, ele toate sînt la fel de demne de respect, dar fiecare are propriile sale avantaje şi dezavantaje. Dintre cele trei, schema lui Frege oferă celui ce face uz de descripţii libertatea cea mai mare şi este cea mai uşor operabilă; dar totodată ea este şi cea mai îndepărtată de folosirea obişnuită. Schema lui Whitehead şi Russell evită orice extravaganţă şi permite totuşi o libertate largă celui ce face uz de descripţii în scopul de a explicita ceva; dar ea ajunge la acest rezultat numai cu preţul unei complicări considerabile a simbolismului. Schema lui Hilbert şi Bernays este foarte uşor de operat şi totodată foarte naturală, în sensul că corespunde îndeaproape uzajului limbilor naturale; dar ea restrînge libertatea celui ce face uz de descripţii şi

[6] *Grundlagen der Mathematik*, I, § 8.

face ca noţiunea de formulă bine formată să fie relativă la gradul de dezvoltare a sistemului, ceea ce poate fi privit de unii ca un defect. În ce ne priveşte, preferăm a treia sugestie, dar considerăm că ar fi o greşeală să vorbim ca şi cum în contextul logicii matematice celelalte două ar fi eronate.

Din păcate, analiza meritelor tehnice ale acestor propuneri a fost adesea confundată de filosofi cu dezbaterea altor chestiuni. Aceasta se datorează faptului că Russell şi-a prezentat propunerea sa ca o contribuţie la analiza filosofică. El susţinea înainte de toate că ceea ce afirmase cu privire la descripţiile definite în cadrul logicii sale matematice constituia totodată o analiză corectă a modului în care erau utilizate descripţiile definite în limbajul obişnuit; în al doilea rînd, el susţinea că între descripţii şi nume proprii în sens logic există o distincţie care corespunde distincţiei dintre două tipuri de cunoaştere, numite de el cunoaştere prin descriere şi cunoaştere prin sesizare. Am văzut deja că prima dintre aceste afirmaţii este falsă şi nu mai avem nimic de spus despre ea, afară de faptul că Russell a fost indus în eroare datorită dorinţei sale, cît se poate de rezonabile, de a găsi o ieşire din doctrina lui Bolzano şi Meinong, potrivit căreia expresia „regele actual al Franţei", avînd o semnificaţie, trebuie să desemneze ceva, deşi nu neapărat ceva existent[7]. Dar cea de-a doua afirmaţie ridică o problemă interesantă asupra căreia trebuie să ne oprim aici.

După Russell, un nume propriu în sens logic este un nume întrebuinţat pentru a desemna un obiect de care vorbitorul este nemijlocit conştient în timp ce vorbeşte, adică ceva pe care el îl vede în sensul fundamental şi inanalizabil al lui „a vedea" şi care desemnează ceea ce desemnează fără a spune sau a implica nimic despre acest obiect. Numele proprii obişnuite nu satisfac aceste norme stricte. Astfel, „Homer" trebuie înţeles ca echivalent cu „autorul *Iliadei*" sau ceva în genul acesta, şi în realitate este o descripţie. Are sens să afirmăm: „Homer nu a existat", în timp ce nu are sens să afirmăm că „A există" sau „A nu există", dacă „A" este un nume propriu în sens logic. Russell admite într-adevăr că cu greu se poate găsi în vorbirea obişnuită un nume propriu în sens logic, dar el crede că cuvintele „acesta" şi „acela" întrebuinţate cu referire la datele senzoriale, ar putea fi cumva citate ca exemplu în acest sens[8]. Aici dăm de o bună doză de epistemologie dubioasă, care nu trebuie să ne preocupe; dar este interesant de notat că toate cele trei explicări ale descripţiilor de-

[7] B. Russell, "On denoting", *Mind*, n.s. (1905) pp. 479–93; retipărită în *Logic and Knowledge*, pp. 41–56.

[8] *Principia Mathematica*, I, pp. 174–5; "The Philosophy of Logical Atomism", *The Monist*, XXVIII (1918), pp. 495–527, retipărită în *Logic and Knowledge* (vezi în special p. 201).

finite în cadrul logicii matematice presupun, după cum se pare, posibilitatea unor desemnări care nu sînt descripţii. Într-adevăr, o descripţie definită este construită prin utilizarea unei expresii funcţionale şi ea satisface intenţia normală a celui ce o foloseşte numai dacă există un lucru care satisface funcţia respectivă. Dar dacă toate desemnările sînt descripţii, justificarea utilizării unei descripţii pare să implice un regres la infinit. Într-adevăr, demonstraţia faptului că ceva este acel lucru şi unicul lucru care este cutare şi cutare va conţine, probabil, o referire la acel lucru prin intermediul unei alte desemnări. După cum ne-am putea aştepta, argumentarea de mai sus, care vrea să arate că trebuie să existe desemnări care nu sînt descripţii, este cea mai convingătoare cînd este prezentată în conexiune cu explicarea russelliană a descripţiilor. Căci, după Russell, orice enunţ în care o descripţie definită intră în mod primar constituie o prescurtare pentru un enunţ existenţial complex, iar fiecare enunţ existenţial este construit prin aplicarea unui cuantor la o expresie funcţională derivată dintr-un enunţ de un tip mai simplu, prin omiterea uneia din părţile sale constitutive. Dar Frege, înaintea lui Russell, iar Hilbert şi Bernays după el, s-au exprimat şi ei ca şi cum trebuie să existe enunţuri elementare de tipul subiect-predicat în care subiectul nu este o descripţie definită ci un nume propriu, legat într-un mod mai direct de ceea ce desemnează. Pentru Hilbert şi Bernays, acest fapt nu are mare importanţă, deoarece ei se mulţumesc să trateze enunţuri cum sînt „$2 + 2 = 4$" ca elementare în raport cu ceea ce urmăresc ei. Dar faptul ar fi trebuit să-l preocupe pe Frege mai mult decît s-a întîmplat în realitate, deoarece Frege susţinea că orice desemnare are un sens, ceea ce sugerează cel puţin că toate desemnările sînt descripţii.

Într-o notă la articolul său *Über Sinn und Bedeutung*, Frege scrie:

„În cazul unui nume propriu ca atare, cum ar fi «Aristotel», părerile privitoare la sens pot fi deosebite. De exemplu, am putea accepta ca sens: elevul lui Platon şi învăţătorul lui Alexandru cel Mare. Cel care procedează astfel va lega de propoziţia «Aristotel s-a născut la Stagira» un alt sens decît acela care ar admite ca sens al acestui nume: învăţătorul lui Alexandru cel Mare s-a născut la Stagira. Cît timp referinţa rămîne aceeaşi, oscilaţiile sensului pot fi tolerate, însă ele trebuie evitate în structura teoretică a unei ştiinţe demonstrative şi nu ar trebui să apară într-o limbă perfectă"[9].

Ideea este nesatisfăcătoare, deoarece ea confundă sensul numelui cu ceea ce sugerează el unui ascultător sau altuia şi astfel estompează caracterul deosebit al numelor proprii uzuale. Un om care a aflat cuvîntul „Aristotel" dintr-un dicţionar clasic dar nu-şi aminteşte din articolul respectiv decît că Aristotel s-a născut la Stagira nu ar considera din acest motiv enunţul „Aristotel s-a născut la Stagira" ca o remarcă inutilă de felul celei „Cel ce s-a născut la Stagira, s-a

[9] *Über Sinn und Bedeutung*, p. 27.

născut la Stagira". Pe altă parte, el ar admite, desigur, că era de prisos să spunem „Aristotel se numeşte Aristotel". Morala este evidentă. Un nume propriu obişnuit funcţionează ca o descripţie definită care implică sau presupune existenţa unui lucru denumit prin acel nume în mediul vorbitorului şi ascultătorului. Unele nume, cum este numele de persoană „Tommy", mai implică şi că lucrul astfel denumit este de un anumit gen, de exemplu o fiinţă umană tînără, de sex masculin. Atunci cînd este necesar, puterea selectivă a numelui propriu poate fi întărită prin cuvinte suplimentare, ca „Tommy al tău", „Jones junior", „Londra, Ontario". Ca şi descrierile, numele proprii pot fi desigur întrebuinţate uneori fără să implice o existenţă, şi anume atunci cînd sînt împinse la sinucidere. Dar faptul că pare cam paradoxal să spunem „Homer nu a existat niciodată" arată limpede că întrebuinţarea normală a unui nume propriu presupune existenţa unui lucru denumit de acest nume. Astfel, cuvintele „New College" („Colegiul Nou"), au devenit un nume propriu cînd au fost folosite pentru prima oară de către locuitorii Oxfordului ca şi cum ar fi fost echivalente cu expresia „colegiul pe care îl au în vedere de obicei oamenii de aici atunci cînd spun «New College»".

A spune, ca Russell, că numele proprii obişnuite sînt un fel de descripţii definite, poate da loc la anumite confuzii, dar este clar că numele proprii obişnuite şi descripţiile definite suscită aceleaşi probleme, deoarece întrebuinţarea lor implică, însă nu garantează, existenţa lucrurilor ale căror desemnări sînt. În acest caz, este oare rezonabil să căutăm ceea ce Russell numeşte nume proprii în sens logic? Potrivit explicaţiei sale, dacă „A" este un nume propriu în sens logic, nu este numai inutil ci de-a dreptul absurd să spunem că „A există", deoarece, deşi „A" trebuie să desemneze ceva, actul de desemnare nu trebuie să implice că lucrul posedă o însuşire sau alta. Or, aceasta pare să fie o cerinţă imposibilă. Într-adevăr, desemnarea este în esenţă selectarea printr-un semn a unui lucru propus atenţiei noastre, iar un semn care ar sluji acestui scop trebuie să implice ceva, deşi nu se cere să implice nimic mai mult decît ideea că există un lucru pe care semnul îl desemnează unui anumit grup de persoane. Cînd însă Russell spune că un cuvînt nu poate fi un nume propriu în sens logic dacă nu desemnează ceva de care vorbitorul este nemijlocit conştient, el introduce o altă cerinţă, de un tip cu totul diferit. Într-adevăr, declaraţia lui sugerează că el nu caută o desemnare lipsită de orice implicaţie existenţială, ci o desemnare a cărei implicaţie este garantat adevărată. Or, chiar dacă teoria cunoaşterii prezentată de Russell în această ordine de idei poate fi eronată şi dacă în orice caz trebuie să admitem că cunoaşterea pe care i-o atribuie vorbitorului nu poate furniza nici o garanţie pentru ascultător, este totuşi foarte interesant să notăm

că avem cel puţin o desemnare a cărei folosire garantează întotdeauna adevărul implicaţiei sale, atît pentru cel ce o aude cît şi pentru cel ce o rosteşte. Este vorba de cuvîntul „Eu".

Nu toate pronumele reflexive rostite se bucură de această proprietate caracteristică. Atunci cînd o persoană temătoare îşi închipuie, în mod greşit, că sub patul său se află cineva şi îşi adună tot curajul ca să spună: „Tu să ieşi afară!", „Tu"-ul său nu desemnează nimic, deşi el îl rosteşte în mod sincer. Iar cînd în povestea *Hainele noi ale împăratului* se înfăţişează un curtean care spune „Ce stofă frumoasă e aceasta!", deşi nu poate vedea nici o haină în mîinile croitorilor înşelători, devine limpede că „aceasta" poate fi întrebuinţat spre a înşela, astfel încît să nu desemneze nimic. Dar nici părerea falsă şi nici reaua credinţă (spre deosebire de convenţia dramatică) nu pot duce la o întrebuinţare a lui „eu" în care acesta să nu mai desemneze nimic. Desigur, tocmai de aceea, Sf. Augustin şi Descartes erau preocupaţi în mod deosebit de propoziţia „Eu exist". În timp ce „Tu nu exişti" şi „Aceasta nu există" sînt observaţii care se expun la ridicol, „Eu nu exist" se autoinfirmă. Într-adevăr, aici negarea existenţei este incompatibilă nu numai cu judecata existenţială implicată de folosirea termenului subiect, ci şi cu faptul că observaţia a fost făcută. Ar fi însă greşit să presupunem că cuvîntul „eu" se bucură de un privilegiu unic printre semnele folosite pentru referire. Deşi adverbele „aici" şi „acum" cu greu s-ar putea numi desemnări, sarcina lor este să contribuie la selecţia obiectelor propuse atenţiei şi ele nu pot să nu-şi îndeplinească în mod satisfăcător misiunea lor. Dacă cineva vrea să vorbească despre un lucru petrecut la Lyonnesse sub domnia regelui Arthur, el trebuie să creadă în mod greşit că există un loc numit Lyonnesse şi că a fost odată un rege cu numele Arthur, sau, dacă nu, ne putem închipui că vrea să-i inducă în eroare pe alţii în această privinţă; dar nici una din utilizările cuvintelor „aici" şi „acum" nu poate fi improprie într-unul din aceste moduri. Motivul este evident: „aici" şi „acum", ca şi „eu", nu presupun în întrebuinţarea lor mai mult decît trebuie să aibă loc datorită existenţei unei rostiri. În cadrul unui limbaj cu o sinteză bine elaborată, aceste cuvinte sînt doar trei dintre semnele utilizate pentru referire, dar ele prezintă particularitatea că nu adaugă nimic la ceea ce este deja implicit într-o expresie unitară. Cînd un om strigă: „Ajutor!", el ne face să înţelegem cît se poate de adecvat prin acest unic cuvînt că el, cel care a rostit cuvîntul, cere ajutor la locul şi timpul rostirii făcute.

În ultima instanţă, orice referire la lucruri sau evenimente particulare în spaţiu şi timp constă în localizarea lor prin raportare la actul vorbirii. Aşa cum un nume propriu ca „Socrate" individualizează un anumit lucru, propunîndu-l atenţiei noastre ca ceea ce este denumit

prin acest nume în mediul din care fac parte vorbitorul şi ascultătorul, tot aşa descripţia „lăptarul" îşi îndeplineşte misiunea oferind suficiente detalii pentru identificarea unui obiect *în contextul vorbirii*. Un procedeu mai radical chiar decît acesta este utilizarea timpurilor verbului sau a particulelor temporale pentru marcarea timpului unui eveniment în raport cu timpul vorbirii. Într-un limbaj artificial în care regulile de întrebuinţare a unui simbol nu iau în consideraţie contextul apariţiei sale, este imposibil să exprimăm judecăţi singulare despre probleme faptice ; şi, de aceea, o scriere ca cea a lui Frege nu poate fi mai mult ca un supliment la un limbaj natural, extrem de util pentru discuţia precisă a relaţiilor dintre afirmaţiile generale din matematică şi ştiinţele naturii, dar inadecvat în sine pentru scopurile vieţii cotidiene, precum şi pentru analiza metafizică. În fapt, singurele desemnări folosite vreodată în logica matematică de către Frege şi succesorii acestuia sînt simboluri pentru entităţi abstracte ca universalele, clasele şi numerele. Ca toate desemnările, acestea îşi îndeplinesc misiunea numai pentru că au implicaţii în sensul explicat mai sus, dar implicaţiile lor sînt de aşa natură încît nimeni nu le-ar putea contesta cît de cît raţional, aşa că ele trec, de regulă, neobservate. Astfel, cel ce vorbeşte despre umanitate sau însuşirea de a fi om admite în mod firesc că există ceva care revine sau ar reveni tuturor oamenilor în acelaşi fel. Această presupoziţie a întrebuinţării nu a fost pusă niciodată în cauză decît de cei ce au o spaimă deosebită de metafizică ; precauţia acestora din urmă este evident nelalocul ei, deoarece lucrurile la care se aplică un termen general trebuie să prezinte cel puţin trăsătura de a fi lucruri la care se aplică respectivul termen. În mod similar, oricine utilizează numeralul „2" ca desemnare în propoziţii ca „2 este cel mai mic număr prim" consideră că acesta desemnează un obiect, deoarece admite că toate mulţimile care au doi membri au ceva comun. În acest caz, nu este atît de uşor să explicăm conexiunea dintre substantiv şi adjectivul din care acesta a fost derivat într-o epocă istorică, dar este clar cel puţin că nimeni nu poate atribui vreo semnificaţie unui enunţ privitor la un număr natural fără să recunoască posibilitatea utilizării numeralului corespunzător în numărarea obiectelor de orice gen.

Rezultatul discuţiei noastre poate fi rezumat după cum urmează. Activitatea de desemnare nu constituie paradigma oricărei utilizări a semnelor, ci ceva propriu exprimării judecăţilor în limbaje care au atins nivelul sintactic de dezvoltare. Putem spune că un semn numit desemnare are un sens nu pentru că este în sine însuşi expresia a ceva (căci nu este aceasta), ci pentru că utilizarea lui presupune acceptarea unei judecăţi existenţiale. O desemnare singulară implică existenţa unui lucru, şi numai a unuia, de un gen anumit ; o desemnare plurală implică existenţa mai multor lucruri de acel gen. O desemnare de felul

celci pentru care Russell a făurit termenul tehnic „descripție definită" este o expresie derivată într-un mod cît se poate de evident dintr-o expresie funcțională care ar putea fi întrebuințată în formularea judecății existențiale pe care o implică. Un nume propriu obișnuit, de pildă „Socrate", este echivalent ca utilizare cu o descripție de forma „lucrul numit Socrate", deși ar fi greșit să-l considerăm o abreviere a unei atare descripții, dat fiind că este propus de expresia „numit Socrate" și deci este în mod evident mai primitivă. La fel, cuvinte aparent reflexive ca „tu" și „acesta" sînt echivalente ca uz cu descripții ca „persoana căreia mă adresez acum" și „lucrul la care sînt acum atent". Dacă judecata implicată de o desemnare este falsă, desemnarea nu reușește să desemneze nimic. Dar există o desemnare, și anume „eu", care nu poate să nu desemneze ceva cînd este utilizată de vorbitor potrivit convențiilor gramaticale care îi sînt proprii. Desemnarea prezintă această particularitate deoarece nu servește decît la explicitarea a aceea ce este deja implicit în orice expresie unitară. Pentru o înțelegere adecvată a rolului jucat de desemnările unor anumite lucruri și evenimente la nivelul sintactic al vorbirii este indicat într-adevăr să nu uităm niciodată că propozițiile compuse funcționează ca întregi în același mod ca expresiile unitare și că, de aceea, ele pot să exprime judecăți deosebite în contexte deosebite. Desemnările presupuse a reprezenta entități abstracte ridică probleme speciale, dar și ele cuprind implicații de existență, deși faptul poate fi trecut cu vederea pînă cînd aceste implicații nu sînt puse în dezbaterea filosofilor.

3. *Problemele intensionalității*

În logica modală noi vorbim despre judecăți, conferind acestora atribute cum ar fi posibilitatea și relații cum ar fi implicația strictă. De aceea, este necesar ca simbolismul nostru să asigure într-un fel oarecare desemnarea ca și exprimarea judecăților. Lewis și numeroși alți autori care au scris despre aceasta evită introducerea unui nou simbolism special admițînd în schimb tacit că ori de cîte ori o expresie propozițională apare într-un loc adecvat pentru desemnarea unei judecăți, această expresie trebuie citită ca și cum ar fi precedată de un prefix ca „judecata că · · ·", Astfel, $\Diamond P$ este considerat o abreviere pentru *Este posibil că P*, iar $P \prec Q$ ca abreviere pentru *Judecata că are loc P implică strict judecata că are loc Q*. În capitolul anterior am introdus semnul § ca prefix de transformare a expresiei unei judecăți într-o desemnare, dar am stipulat că acest semn ar putea fi omis acolo unde s-ar putea presupune în mod adecvat că a fost absorbit de un semn modal ca cel al lui Lewis. Evident, scrierea lui în contexte în care omi-

terea nu creează confuzii nu duce la nici un cîştig, deşi semnul se poate dovedi util în unele prilejuri, pentru a aminti faptul că în logica modală enunţurile sînt făcute despre judecăţi şi au ca subiecte şi obiecte gramaticale desemnări de judecăţi. Construcţia cu care avem de-a face aici este asemănătoare celei a vorbirii indirecte. Aşa cum observa Frege în articolul său *Über Sinn und Bedeutung*, o clauză care începe cu „că" are ca referinţă ceea ce ar fi sensul cuvintelor, dacă ele ar fi apărut fără acel „că".

Întrucît semnul § are ca efect transformarea expresiilor judecăţilor în desemnări ale acestora, semnul poate fi aplicat şi în simbolismul logicii, în scopul construirii desemnărilor de funcţii propoziţionale într-un mod care evită dificultăţile lui Frege. Cu alte cuvinte, putem scrie $\S xFx$ cînd vrem să ne referim la sensul semnului funcţional Fx şi în mod similar $\S xyG(x,y)$ cînd vrem să ne referim la sensul lui $G(x, y)$. Aici, după § se pot insera una sau mai multe litere pentru a lega variabila sau variabilele din expresia funcţională care urmează, iar § nu mai poate fi citit ca şi cum ar fi o abreviere pentru „judecata că", întrucît sensul întregului este „atributul pe care îl are un lucru dacă el este F", sau: „relaţia în care este un lucru faţă de un altul cînd primul este G faţă de al doilea"[10]. Dar este avantajos să avem un simbolism care combină judecăţile cu funcţiile propoziţionale. Într-adevăr, referirea la acestea din urmă ridică probleme similare. În discuţiile filosofice despre logică, acestea sînt adesea grupate sub denumirea de intensiuni, în opoziţie cu valorile de adevăr (privite ca obiecte), clase şi indivizi, care primesc denumirea de extensiuni. Termenii „intensiune" şi „extensiune" au fost introduşi iniţial, aşa cum am văzut, în vederea analizei termenilor generali, dar accepţia modernă este rezultatul unei evoluţii naturale şi poate fi acceptată ca o modalitate convenabilă de analiză a unor probleme legate de cele iniţiale. Uneori se mai spune că o descripţie definită ca „regele Franţei" are o intensiune, şi anume un concept individual, ca acela de a fi singurul rege al Franţei[11]. Indiferent dacă ne place sau nu această terminologie, putem admite că o descripţie de forma $(\imath x)Fx$ trebuie să aibă un sens, iar cînd se iveşte prilejul de a vorbi direct despre acel sens putem, dacă dorim, să-l desemnăm printr-un semn compus de forma $\S x[Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x)]$. În toate cele trei cazuri permise, punerea semnului în faţa

[10] În utilizarea sa ca prefix al unei expresii funcţionale, § se aseamănă cu operatorul lambda introdus de A. Church în lucrarea "Set of Postulates for the Foundation of Logic", *Annals of Mathematics*, XXXIII (1932), pp. 341—66, dar nu este limpede în ce măsură îşi concepe A. Church operatorul ca semn pentru construirea desemnărilor. În lucrările ulterioare, el tratează pe λx ca echivalent cu abstractorul de clasă al lui Whitehead şi Russell.

[11] R. Carnap, *Semnificaţie şi Necesitate*, Ed. Dacia, 1972, p. 86, 243.

unei expresii (delimitată dacă este nevoie prin paranteze) alcătuieşte o desemnare pentru sensul a ceea ce urmează astfel încît acest prefix ar putea fi numit eventual abstractor intensional.

Putem spune că un limbaj este în întregul său intensional dacă el permite desemnarea intensiunilor, această desemnare fiind totodată esenţială, adică neeliminabilă printr-o traducere deflaţionistă cum ar fi cea a lui *Este adevărat că P* prin *P*. Este evident că toate limbile naturale ale popoarelor civilizate sînt calificate pentru acest titlu. Tot aşa îl merită şi simbolismul lui Lewis, întrucît în scrierea sa există convenţia tacită că un semn care figurează ca subiect gramatical al predicatului sau ca subiect ori obiect al verbului va fi considerat o desemnare a ceea ce exprimă el în mod uzual; am remarcat mai sus că în limba engleză există o convenţie similară cu privire la clauzele care urmează după verbul „a spune", dar sînt introduse fără utilizarea lui „că". Putem totuşi să concepem anumite limbi în care intensiunile se pot exprima fără să fie vreodată desemnate: astfel de limbi se spune că sînt extensionale. Terminologia este întrucîtva confuză, deoarece cei care sînt familiarizaţi cu istoria cuvintelor încep în mod firesc prin a considera o intensiune ca ceva ce este exprimat, iar o extensiune ca ceva ce este desemnat; dar dacă facem uz de aceste cuvinte în contextul de faţă, trebuie să ne eliberăm de această asociaţie de idei şi să concepem o extensiune ca fiind un individ, o clasă sau o valoare de adevăr, iar o intensiune ca fiind sau un concept individual (dacă am admite această expresie destul de confuză), sau o funcţie propoziţională, sau o judecată. Aşa cum am văzut, putem avea un limbaj rudimentar în care judecăţile pot fi exprimate dar nu pot fi cîtuşi de puţin desemnate. Conform definiţiei de mai sus, un asemenea limbaj ar fi extensional. Îmbogăţit fiind cu expresii funcţionale şi desemnări ale indivizilor şi claselor, el ar continua să rămînă extensional. Dacă însă s-ar adăuga desemnări de judecăţi, de funcţii propoziţionale şi de concepte individuale, ar deveni un limbaj intensional. Pe scurt, deosebirea se referă la tipurile de entităţi pe care limbajele le admit ca subiecte ale discursului iar limbajul intensional este esenţialmente mai complicat decît cel extensional, deoarece admite atît exprimarea cît şi desemnarea a ceea ce într-un limbaj extensional nu ar putea fi decît exprimat.

În articolul său *Über Sinn und Bedeutung*, Frege recunoştea clar posibilitatea luării judecăţilor ca subiecte ale vorbirii, dar în *Begriffsschrift* şi de asemenea în *Grundgesetze der Arithmetik* el nu a prevăzut nici un mijloc pentru această trăsătură a limbajului intensional sau pentru orice altă trăsătură a lui. Cauza acestei omisiuni, după toate probabilităţile, era că Frege nu considera necesare limbajele intensionale pentru prezentarea matematicii. În prima ediţie din *Principia Mathe-*

matica, Whitehead și Russell merg pe aceeași linie. Deși recunosc posibilitatea enunțurilor intensionale cum ar fi „Socrate credea că sufletul său este nemuritor", ei se mărginesc să discute în cea mai mare parte caracteristicile enunțurilor extensionale. Dar în *Begriffsschrift*, precum și în *Principia Mathematica*, apare un principiu logic

$$x = y \supset (fx \supset fy)$$

care, la prima vedere, pare să fie incompatibil cu admiterea enunțurilor intensionale. În fapt, acest principiu este reciproca principiului leibnizean al identității indiscernabilelor: „Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate" * și el ar putea fi numit principiul indiscernabilității identicilor[12]. După cîte știm, acest principiu nu a fost pus sub semnul întrebării nici măcar de către acei filosofi care nu găsesc plauzibilă aserțiunea lui Leibniz; și totuși se pare că el are consecințe extraordinare. Să presupunem, de exemplu, că substituim „12" pentru x, „suma celui de-al treilea și al patrulea număr prim" pentru y și „papa știe că numărul apostolilor este $\cdots$" pentru f. Atunci obținem un enunț pentru $x = y$ și un alt enunț adevărat pentru fx, dar aplicînd de două ori *modus ponens* căpătăm concluzia: „Papa știe că numărul apostolilor este suma celui de al treilea și al patrulea număr prim", ceea ce este cel puțin foarte îndoielnic. Raționînd similar, putem demonstra paradoxuri în teoria modalității, ca de exemplu paradoxul că orice enunț de identitate adevărat este cu necesitate adevărat. Într-adevăr, Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară, iar Luceafărul de ziuă satisface funcția exprimată de cuvintele „este necesar că Luceafărul de ziuă este identic cu $\cdots$". Se pare deci că Luceafărul de ziuă trebuie să satisfacă și funcția, adică este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie identic cu Luceafărul de seară.

Ce putem face în această situație delicată? În *Tractatus Logico-Philosophicus* (aforismul 5. 54), Wittgenstein susține că un semn propozițional poate apărea în cadrul altuia numai în calitate de argument al unei funcții de adevăr. În forma în care este expus, acest enunț este evident fals, deoarece semnul propozițional „mîine va ploua" nu apare în calitate de argument al unei funcții de adevăr în cadrul propoziției „Brown crede că mîine va ploua". Dar enunțul lui Wittgenstein poate fi considerat eventual ca un mod aforistic de a spune că orice rostire dintr-un limbaj intensional se poate traduce fără pierdere într-un limbaj extensional. Această teză a extensionalității, cum este ea denumită acum, a fost adoptată de Russell în introducerea sa la a doua

* „Acele ce se pot substitui unul altuia păstrînd adevărul, sînt aceleași".

[12] Această denumire a fost propusă de W. V. Quine în cartea sa *From a Logical Point of View*, p. 139.

ediție din *Principia Mathematica*, publicată în 1925, și a fost susținută amplu de Carnap în cartea sa *Logische Syntax der Sprache*[13], care a văzut lumina tiparului în 1934.

Semnele compuse de genul celor pe care le construim cu abstractorul nostru intensional se pot elimina foarte ușor din unele contexte, în care ele figurează împreună cu expresii destinate în mod special pentru anularea acțiunii abstractorului. Astfel, propoziția *§P este adevărat* poate fi înlocuită prin *P*, iar *X are* (sau *exemplifică*) *§yFy* prin *FX*. Dar acestea sînt cazuri speciale. În general, Carnap se bazează pe o metodă de reducere în care desemnările intensiunilor sînt înlocuite prin desemnări de expresii, în timp ce predicatele adecvate pentru intensiuni sînt înlocuite prin predicate corespunzătoare adecvate pentru expresii. De exemplu, conform principiilor lui Carnap, „Brown crede că mîine va ploua" este redus la „Brown își spune lui însuși, plin de convingere: «Mîine va ploua»"; „Este necesar că 7 + 5 = 12" este redus la „Enunțul «7 + 5 = 12» este analitic"; „Platon a scris o carte despre dreptate" este redus la „Platon a scris o carte care conține cuvîntul «dreptate» sau ceva echivalent" și așa mai departe. Cînd traducerea conține o propoziție sau o expresie pusă între semnele citării, această propoziție trebuie înțeleasă ca o parte componentă a desemnării în sine și de aceea nu poate fi interpretată ca un component gramatical al propoziției principale. În particular, nu se poate admite că un cuvînt sau o expresie care figurează ca parte a unei atare propoziții puse între semnele citării se poate înlocui după plac, printr-un alt cuvînt sau expresie avînd aceeași referință. Într-adevăr, convențiile făcute cu privire la citare ne permit să utilizăm „«7+5=12»" ca o desemnare pentru propoziția „7 + 5 = 12", dar desigur ele nu ne permit să utilizăm „«7+5 = numărul apostolilor»" ca desemnare pentru propoziția „7 + 5 = 12". Pe baza acestor considerente, se pare că putem obține imediat o soluție a dificultăților noastre. Cînd, de exemplu, ne dăm seama că enunțul „Este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie identic cu Luceafărul de ziuă" însemnează același lucru ca „Propoziția «Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de ziuă» este analitică", putem vedea că enunțul nu se referă la Luceafărul de ziuă, ci la un anumit ansamblu de cuvinte, și că nu avem nici o funcție exprimată prin „Este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie identic cu *x*", așa cum nu avem o funcție exprimată de cuvintele „Propoziția «Luceafărul de ziuă este identic cu *x*» este analitică".

Împotriva unora dintre reducerile prin care Carnap își ilustrează teza se pot aduce obiecții. De exemplu, ne putem întreba dacă a gîndi înseamnă întotdeauna a vorbi cu tine însuți. Dar, incontestabil, această teză este foarte plauzibilă. Cînd auzim pentru prima dată despre para-

[13] §§ 67–71, 74–81.

doxurile intensionalității ne simțim înclinați să spunem că a fi cu necesitate identic cu Luceafărul de ziuă nu este un atribut real al unor obiecte existente în mod independent, așa cum credeam atunci cînd am întîlnit pentru prima dată principiul lui Frege cu privire la indiscernabilitatea identicilor, ci este ceva legat de limbajul uman ; teza extensionalității precizează această idee. Dacă respingem teza, aceasta nu trebuie să se datoreze numai faptului că unele ilustrări aduse de Carnap nu ne dau satisfacție, ci și unei obiecții de principiu împotriva modului său de tratare a enunțurilor intensionale ; de aceea, cel mai indicat este să supunem unui examen critic un caz simplu de vorbire indirectă, adică un caz în care pare cel mai plauzibil să afirmăm că utilizarea limbajului intensional nu este decît un substitut pentru relatarea cuvintelor rostite efectiv.

Să considerăm deci enunțul : „Oamenii cavernelor spuneau copiilor că focul frige". Enunțul este lesne de înțeles, dar nici un om inteligent care îl aude nu presupune că oamenii cavernelor spuneau copiilor lor cuvintele noastre „Focul frige", sau orice alte cuvinte aparținînd unei limbi cunoscute astăzi. Dacă se subliniază că enunțul se referă realmente la sunetele pronunțate de oamenii cavernelor, reducerea optimă pe pe care o putem oferi este : „Oamenii cavernelor spuneau copiilor lor o propoziție care însemna în limba lor același lucru ca «Focul frige» în limba noastră". Aceasta trebuie să fie adevărată, dacă originalul este adevărat ; și reciproc, dacă această reducere este adevărată, atunci enunțul inițial trebuie să fie adevărat. Trebuie să remarcăm însă că observația atribuită oamenilor cavernelor este specificată aici prin echivalența sa ca semnificație cu o propoziție din limba noastră. Urmînd această metodă, evităm o evidentă reîntoarcere la un limbaj intensional, ca cea implicată în afirmația : „Oamenii cavernelor spuneau copiilor lor o frază care în limba lor însemna că focul frige". Nici măcar nu adoptăm vreo concepție cu privire la semnificație, care ar putea fi cumva considerată a fi primejdioasă. Într-adevăr, noi nu spunem altceva decît că expresia folosită de oamenii cavernelor însemna în limba lor același lucru cu ceea ce însemnă acum o anumită propoziție din limba noastră de azi și este posibil ca noțiunea de a avea aceeași semnificație să poată fi explicată satisfăcător fără a recurge la ceea ce se numește uneori în mod abuziv reificarea sau ipostazierea semnificației. Dar reducerea pe care o oferim rămîne totuși nesatisfăcătoare, deoarece introduce o referire la limba noastră, care nu figurează în enunțul inițial[14].

[14] A se vedea A. Church, "On Carnap's Analysis of Statements of Assertion and Belief", *Analysis*, X (1950), pp. 97—99.

Cum putem să evităm această referire nedorită fără a reveni la întrebuinţarea unei clauze care începe cu „că"? Numai prin permiterea acelei utilizări mai laxe a vorbirii directe, care este atît de frecventă în traduceri. Cînd un fundamentalist citeşte în Biblia sa: „Domnul a spus: Să se facă lumină!", el şi-ar putea închipui că Domnul a rostit anumite cuvinte ebraice; dar, afară doar dacă nu este din cale afară de naiv, el nu-şi închipuie că Dumnezeu a spus ceva în română. Tot astfel, dacă producem enunţul: „Oamenii cavernelor spuneau copiilor lor «Focul frige»", nici un om inteligent nu va înţelege că vrem să spunem că oamenii cavernelor vorbeau româna; iar dacă cineva îşi dă osteneala să traducă observaţia noastră în franceză, el va traduce cuvintele din interiorul semnelor citării la fel ca şi tot restul. Dar această procedură a cvasicitării este ea însăşi o varietate a limbajului intensional. Într-adevăr, în acest context „«Focul frige»" nu figurează ca desemnare a sunetelor din română care corespund semnului „Focul frige", ci mai degrabă ca echivalent al expresiei „că focul frige". Uneori, cele două proceduri se apropie atît de mult în limba vorbită, încît este inutil să ne întrebăm care din ele a fost utilizată. Dacă un copil mic care a fost avertizat de un străin să nu se joace cu chibriturile o întreabă pe mama sa: „Ce spune el?", răspunsul mamei poate fi reprezentat în scris la fel de bine prin "El spune «Focul frige»" sau prin „El spune că focul frige". Faptul nu este surprinzător; într-adevăr, nu încape îndoială că în toate limbile procedeele principale de desemnare a intensiunilor au apărut din cvasicitarea cuvintelor sau expresiilor suficiente pentru exprimarea acelor intensiuni.

Carnap, care a fost susţinătorul cel mai viguros al tezei extensionalităţii, nu pretinde că aceasta ar fi un adevăr necesar, iar considerentele expuse ceva mai sus sugerează că plauzibilitatea ei se datorează unei ambiguităţi importante, dar puţin discutate, a utilizării pe care o dăm semnelor citării. Deşi Carnap profesează înlocuirea enunţurilor intensionale prin enunţuri referitoare numai la simboluri, de fapt el nu poate face să pară acceptabile traducerile sale altfel decît permiţînd fiecărui simbol menţionat de el să-şi păstreze statutul său lingvistic. Într-un cuvînt, semnele citării de care face uz nu indică, aşa cum îşi închipuie Carnap, menţiunea, ca distinctă de utilizare, a semnului; ele indică mai curînd o utilizare specială, bazată pe menţionare, şi echivalează în fapt cu desemnarea sensului exprimat de simbol, în cazul cînd ar apărea fără semnele citării. Cu toate acestea, încercarea extensională de tratare a paradoxurilor intensionalităţii ne poate învăţa ceva. Într-adevăr, un abstractor intensional funcţionează în anumite privinţe la fel ca semnele citării.

În orice expresie propoziţională care conţine o desemnare de orice gen, sensul întregului depinde de sensul desemnării, ca şi de sensul celorlalte semne din cuprinsul expresiei, dar în cazurile simple care se numesc extensionale valoarea de adevăr a judecăţii exprimate de întreg nu depinde de sensul desemnării ca distinct de referinţa acestuia. Astfel, judecata că Luceafărul de ziuă se învîrteşte în jurul soarelui este distinctă de judecata că Luceafărul de seară se învîrteşte în jurul soarelui, dar ambele au aceeaşi valoare de adevăr, deoarece Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară. Tocmai aceasta vrea să spună principiul indiscernabilităţii identicilor. Pe de altă parte, în cazurile mai complicate care se numesc intensionale, valoarea de adevăr a întregului poate foarte bine să depindă de sensul unei desemnări cuprinse într-o desemnare propoziţională ce constituie la rîndul ei o parte a întregului. Astfel, este adevărat că este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie Luceafărul de ziuă, dar nu este adevărat că este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie Luceafărul de seară. În general, indiferent de semnificaţia literelor F, G şi H, valoarea de adevăr a judecăţii exprimate de $F\{\S G[(\imath x)Hx]\}$ depinde de referinţa lui $\S G[(\imath x)Hx]$, iar aceasta depinde la rîndul ei de sensul lui $G[(\imath x)Hx]$, care la rîndul său depinde de sensul lui $(\imath x)Hx$, astfel că din egalitatea

$$[(\imath x)Hx = (\imath y)Jy$$

care garantează numai identitatea de referinţă, nu putem conchide cu certitudine

$$F\{\S G[(\imath x)Hx]\} \equiv F\{\S G[(\imath y)Jy]\}$$

În acest caz, abstractorul intensional, care îndreaptă atenţia asupra sensului semnului din domeniul lui de acţiune, serveşte şi pentru a aminti că nu ne putem baza pe principiul indiscernabilităţii identicilor în vederea justificării substituţiei în cadrul acestui domeniu de acţiune.

Sarcina noastră s-ar simplifica în mare măsură dacă am putea spune mai mult, că nici o expresie de forma $F(\S Gy)$ nu exprimă vreodată o funcţie propoziţională. Atunci am avea o paralelă aproape exactă între regulile de utilizare a abstractorului nostru intensional şi cele de utilizare a semnelor citării: principiul indiscernabilităţii identicilor ar putea fi acceptat fără nici o condiţie sau restricţie, şi cuantorii care cuprind în domeniul lor de acţiune abstractori intensionali şi leagă variabile din domeniul de acţiune al abstractorilor nu ar mai suscita dificultăţi, deoarece nu s-ar mai afla expresii înzestrate cu semnificaţie avînd cuantori în această poziţie. Dar uzanţele lingvistice se ridică împotriva acestei propuneri pripite. În limba engleză, propoziţia „Era un lucru despre care el spunea că îi place" este net distinctă

ca semnificație de „El spunea că era un lucru care îi plăcea" și nu încape îndoială că prima propoziție are forma $(\exists y)F(\S Gy)$. A fi considerat stupid de către Lenin, a fi suspectat de oportunism de către Troțki, a fi temut ca un rival de către Stalin — toate acestea sînt funcții intensionale sau atribute; cel ce citește ziarele interesîndu-se de problema în cauză poate să găsească ușor expresii pentru mult mai multe atribute. În această ordine de idei, este desigur important să distingem între $F(\S Gy)$ și $F(\S yGy)$. În timp ce prima exprimă o funcție intensională care poate avea ca valoare judecata exprimată de $F(\S GZ)$, a doua exprimă o judecată intensională despre funcția desemnată de $\S yGy$; tocmai pentru păstrarea acestei distincții se cere ca argumentul acestei expresii să fie legat printr-un alt y, inserat imediat după §.

Dificultățile noastre provin din faptul că avem funcții intensionale și că unele din ele nu pot fi satisfăcute de un obiect ca atare, ci numai de un obiect considerat a cădea sub incidența unei anumite descripții. Astfel, Oedip vroia să-l ucidă pe odiosul străin care îi poruncise să se dea la o parte de pe drumul strîmt care ducea de la Delphi la Phocis, dar el nu vroia să-și ucidă tatăl, deși străinul odios era de fapt tatăl lui. Ne putem declara necondiționat de acord cu cel ce susține că funcțiile de acest fel au un statut logic special, deoarece expresiile lor intră numai în discursul de ordinul doi (adică în discursul ce presupune o utilizare mai simplă a simbolurilor, în sensul că acestea se referă la ceea ce exprimă funcțiile și nu la înseși aceste funcții în mod direct); se pare însă că nu avem motive reale să negăm că acestea sînt funcții, și, de îndată ce am admis acest lucru, devine clar că singurul mod de a ieși din impas este de a restrînge principiul indiscernabilității identicilor astfel încît el să se aplice numai la funcții extensionale (adică neintensionale).

Insistarea asupra principiului indiscernabilității identicilor înseamnă de fapt a spune că în contextul afirmației noastre nu recunoaștem alte funcții decît cele existențiale. Restrîngerea principiului în modul propus mai sus înseamnă admiterea faptului că, dacă Fx exprimă o funcție intensională, nu putem infera *formal* din cele două premise, FX și $X=Y$, concluzia FY. Fără îndoială, natura unor contexte intensionale arată destul de limpede că un nume sau o descripție se pot substitui în locul altora *salva veritate*, dar este greșit să ne așteptăm la reguli de substituție valide în toate contextele de acest fel. Să presupunem, de exemplu, că nu ne îndoim de adevărul enunțului „Sf. Toma d'Aquino a spus că doctrina Filosofului asupra sufletului era adevărată". Putem repeta enunțul, punînd „Aristotel" în loc de „Filosoful"? Negreșit. Chiar dacă Sf. Toma a scris cuvîntul latin *Philosophus* în loc de *Aristoteles* în pasajul pe care pretindem să-l redăm,

substituţia noastră nu depăşeşte limitele permisiunii acordate prin obicei unei persoane care foloseşte vorbirea indirectă. Se poate argumenta, într-adevăr, că pentru mulţi cititori noua noastră versiune va fi preferabilă originalului, ca dînd naştere la mai puţine neînţelegeri. Putem atunci să substituim după plac „Stagiritul" pentru „Filozoful"? Este cu neputinţă de dat un răspuns simplu. În secolul al optsprezecelea, schimbarea n-ar fi întîmpinat probabil vreo obiecţie, deoarece aproape toţi cititorii ar fi recunoscut această expresie ca o descriere modernă a lui Aristotel introdusă din motive literare, şi de aceea n-ar fi fost tentaţi să creadă că Sf. Toma îl identifica pe Aristotel referindu-se la locul de naştere al acestuia. În secolul douăzeci, unii cititori ar recunoaşte manierismul secolului optsprezece, dar alţii ar putea fi cumva induşi în eroare, fiind împinşi să creadă că Sf. Toma a menţionat Stagira; şi, în sfîrşit, alţii, care nu ştiu că Aristotel s-a născut la Stagira, ar putea crede chiar că Sf. Toma avea în vedere o altă persoană. Nu pot exista reguli formale de substituţie valabile pentru toate contextele intensionale, pentru că ideile: afirmare, părere, cunoaştere, dorinţă, intenţie etc., idei pe care de multe ori le exprimăm prin intermediul limbajului intensional, nu sînt idei formale. În fapt, ele sînt convenţii care trebuie respectate în contexte de diferite feluri (căci fără convenţii de un fel sau altul nu poate exista vreo comunicaţie de felul celor pe care le avem în fapt), dar ar fi derutant să vorbim despre aceste convenţii ca despre obiecte de studiu ale logicii. Logica, aşa cum o considerăm în această carte, studiază forma propoziţiilor spre deosebire de conţinutul lor şi unica parte a teoriei enunţurilor intensionale care poate fi numită în mod adecvat formală este logica modală pură. De aceea, nu este surprinzător că aceasta a suscitat interesul cel mai mare în rîndul logicienilor.

Într-un enunţ modal adevărat, fie de forma $\Box \S G[(\imath x)Hx]$ fie de forma $\Diamond \S G[(\imath x)Hx]$ substituirea lui $(\imath y)Jy$ pentru $(\imath x)Hx$ poate duce la falsitate, sau chiar la absurditate, dacă ea nu poate fi autorizată de nimic mai mult decît de o aserţiune contingentă

$$(\imath x)Hx = (\imath y)Jy.$$

Astfel, ar fi ridicol să argumentăm de la premisa modală

$$\Box \S(12 < 13)$$

şi adevărul istoric

$$12 = \textit{numărul apostolilor}$$

la concluzia modală

$$\Box \S(\textit{numărul apostolilor} < 13).$$

De asemenea, nu este suficient să spunem, ca în teoria silogismelor modale a lui Teofrast, că concluzia trebuie să aibă modalitatea premisei mai slabe. Într-adevăr, ar fi la fel de ridicol să scoatem din premisa modală

$$\Diamond \S \sim(\textit{numărul apostolilor} < 13)$$

şi adevărul istoric

$$\textit{Numărul apostolilor} = 12$$

concluzia modală

$$\Diamond \S \sim(12 < 13).$$

Pe de altă parte, în toate contextele de acest fel putem să efectuăm substituţii *salva veritate* atunci cînd desemnarea care urmează a fi substituită are cu necesitate aceeaşi referinţă ca desemnarea pe care o va înlocui, de ex. cînd „7 + 5" va fi pus pentru „12". Aceasta nu înseamnă că rezultatul substituţiei va fi atunci o expresie avînd exact acelaşi sens ca expresia iniţială, ci înseamnă pur şi simplu că modificarea efectuată nu va afecta valoarea de adevăr a întregului. Două desemnări care au în mod necesar aceeaşi referinţă pot diferi totuşi ca sens şi sînt astfel capabile să determine o deosebire de sens între două expresii altfel similare în care ele apar, dar trebuie să fie astfel legate între ele încît oricare s-o poată înlocui pe cealaltă într-un context modal fără să-l facă fals. Pentru a se înţelege cauza acestui lucru, să analizăm încă o dată modul în care apar desemnările în contextele modale.

Dacă judecata exprimată de $\Box \S G[(\imath x)Hx]$ este adevărată, motivul trebuie să fie sau faptul că funcţia propoziţională exprimată de *Gy* este valabilă pentru toate argumentele posibile, sau că ea este implicată în mod necesar de sensul desemnării $(\imath x)Hx$. Ca exemplu al primei situaţii putem lua enunţul „Este necesar ca ultima regină a dinastiei Stuart să fie moartă sau să nu fie moartă". Întrucît orice fiinţă trebuie să fie moartă sau să nu fie moartă, putem să înlocuim aici „ultima regină din dinastia Stuart" printr-o altă desemnare de acelaşi tip general, fără a afecta valoarea de adevăr a întregului. Ca ilustrare a celei de-a doua situaţii putem lua enunţul „Este necesar că ultima regină din dinastia Stuart a fost femeie". Aici, sensul desemnării este de maximă însemnătate. Dacă am fi scris în schimb „ultimul monarh din dinastia Stuart", tot am fi reuşit să ne referim la regina Ana, dar noul nostru enunţ nu ar mai fi fost adevărat. Dar chiar şi în ultimul caz, presupoziţia existenţială a desemnării utilizate de către vorbitor nu este o parte a ceea ce el declară că este necesar. Probabil el este încredinţat că a existat o ultimă regină din dinastia Stuart, dar nu că *aceasta* este necesar; iar dacă vrea, el poate să clarifice acest punct, adăugînd cuvintele „dacă a existat într-adevăr o asemenea regină" sau formulînd întregul enunţ

în forma „Ultima regină a dinastiei Stuart ar fi în mod necesar o femeie". Într-adevăr, aceste noi moduri de exprimare lasă neschimbată substanța aserțiunii modale, fără să anuleze obligația implicată îndeobște de întrebuințarea unei desemnări. În simbolismul logic putem realiza același efect introducînd $H'x$ ca abreviere pentru $Hx \cdot (y)[Hy \supset y = x]$, adică cu sensul *x este unicul lucru H*, scriind apoi $\Box\S(x)(H'x \supset Gx)$ în loc de $\Box\S G[(\imath x)Hx]$. Putem spune că aserțiunile modale din care desemnările au fost eliminate în acest mod sînt în formă redusă. Dacă funcția propozițională exprimată de Gx este un truism, atunci $\Box\S(x)[H'x \supset Gx]$ trebuie să fie adevărat, oricare ar fi semnificația lui Hx și astfel primul dintre cele două cazuri pe care le-am distins mai sus poate fi subsumat celui de al doilea.

În cursul acestui raționament am admis, bineînțeles, că orice desemnare care apare într-un context modal poate fi tratată ca o descripție definită sau ca o abreviere a unei atare descripții; de exemplu, că „regina Ana" poate fi tratată ca abreviere a expresiei „regina numită «Ana»", iar „12" ca o abreviere pentru „numărul care revine tuturor mulțimilor echivalente în sensul lui Cantor cu mulțimea numerelor {«1», «2», «3», ··· «12»}". Această procedură ne este impusă de necesitatea de a ne îndrepta atenția în asemenea contexte la sensul desemnărilor noastre. În contextele extensionale, pentru care principiul indiscernabilității identicilor este valabil fără restricții, numele proprii pot fi utilizate fără să ne gîndim prea mult la sensul lor, astfel că substituirea lui „Napoleon" pentru „Bonaparte" sau *viceversa* pare de multe ori să fie simplă chestiune de stil. În contextele modale însă, situația este cu totul alta. Într-adevăr, spunem că este necesar că Napoleon este identic cu Napoleon dar că este doar contingent că Napoleon este identic cu Bonaparte; iar pentru ca să înțelegem aceasta trebuie, așa cum a arătat Frege, să luăm în considerație deosebirile de sens, adică trebuie să privim cele două denumiri ca abrevieri ale unor descripții. Fără îndoială, nu este necesar să fi existat un om numit „Napoleon"; dar este necesar ca singura persoană cu numele de „Napoleon", în caz că există o asemenea persoană unică, să fie identică cu singura persoană numită „Napoleon"[15].

Revenind acum la problema substituției în contexte modale, să presupunem că ni se dă

$$\Box\S[(\imath x)Hx = (\imath y)Jy].$$

---

[15] În *Principia Mathematica* *14.28, Whitehead și Russell spun într-adevăr că $(\imath x)Hx = (\imath x)Hx$ este adevărat dacă și numai dacă $(\exists x)H'x$ este adevărat. Această restricție impusă substituției în formula $x = x$ este cerută de analiza pe care ei o fac formulelor care conțin descripții definite. În limbile vorbite, problema implicației existențiale este tratată în modul indicat mai sus.

Din această formulă, potrivit regulilor uzuale de utilizare a descripţiilor definite, rezultă formula $\Box\S H'[(\imath x)Jx]$ şi, conform procedurii explicate mai sus, această formulă poate fi redusă la rîndul ei la $\Box\S(x)[J'x \supset H'x]$. Dar enunţul

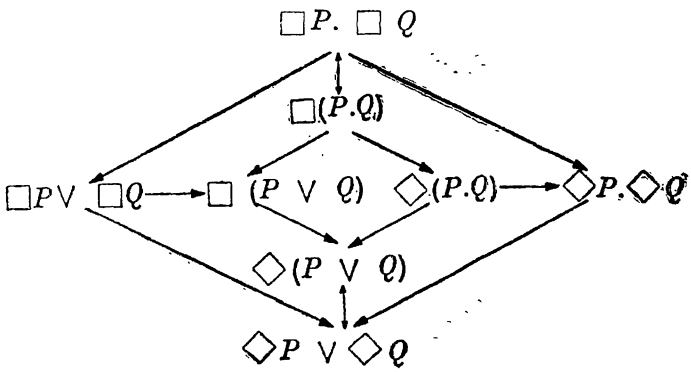
$$\Box\S G[(\imath x)Hx]$$

poate fi redus la $\Box\S(x)[H'x \supset Gx]$, şi astfel este uşor de văzut că împreună cu presupunerea identităţii necesare formulată mai sus, enunţul trebuie să implice în mod necesar consecinţa $\Box\S(x)[J'x \supset Gx]$, care, la rîndul ei, constituie forma redusă a formulei

$$\Box\S G[(\imath x)Jx].$$

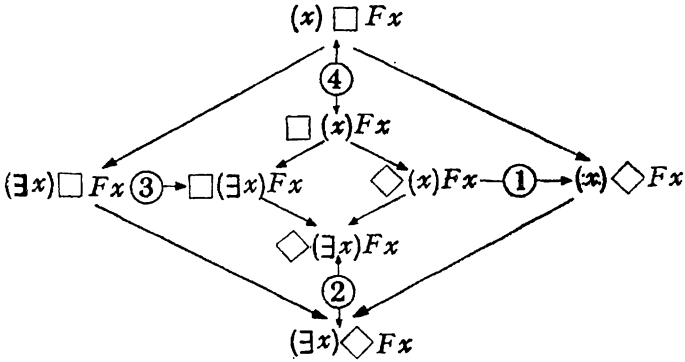
Raţionînd similar, putem arăta că identitatea necesară a referinţei în cadrul celor două desemnări este o condiţie suficientă pentru înlocuirea oricăreia dintre ele prin cealaltă *salva veritate*, într-un enunţ de posibilitate.

Trecînd la considerarea posibilităţii utilizării cuantorilor pentru a opera peste semnele modale şi deci peste abstractorii intensionali, este natural să presupunem că relaţiile dintre formulele care combină în diverse feluri semnele modale cu cuantorii trebuie să fie guvernate de reguli similare celor pentru relaţiile dintre formulele care combină în diverse feluri semnele modale cu semnele conjuncţiei sau disjuncţiei. Or, în privinţa acestor din urmă reguli există un consens comun şi ele pot fi înfăţişate prin diagrama de mai jos, unde, pentru concizitune şi uşurinţa comparaţiei, am introdus convenţia omiterii din fiecare formulă a abstractorului intensional care ar urma într-o versiune neprescurtată imediat după semnul modal:



Este deci evident că analogia pretinde ca şi primele reguli să fie indicate ca în diagrama corespunzătoare, în care cuantificarea univer-

sală ia locul conjuncției, iar cuantificarea existențială locul disjuncției:



Formulele patrulaterului interior sînt cele ce nu suscită nici o problemă, deoarece cuantorii lor intră în domeniul de acțiune al semnelor lor modale, în timp ce formulele patrulaterului exterior sînt formule discutabile, avînd cuantori care operează peste semnele modale. Săgețile numerotate reprezintă implicații necesare garantate de principiile general acceptate ale logicii, iar formulele prevăzute cu numere reprezintă implicații necesare, sugerate de analogia sus-menționată[16]. Trebuie observat că implicațiile din ultimul grup sînt singurele legături între formulele celor două patrulatere și că nu toate sînt independente între ele. Prin substituție și contrapoziție, (3) se poate deduce din (1), iar (4) din (2), sau viceversa. Dacă se acceptă toate aceste relații putem spune că prefixele pătrat și romb din logica modală se comportă ca niște cuantori noi, universali, respectiv existențiali. Aceasta iarăși este un lucru la care trebuia să ne așteptăm, în virtutea analogiei. Într-adevăr, cînd spunem că o judecată este necesară, înțelegem prin aceasta că ea ar fi adevărată în toate lumile posibile, iar cînd spunem că o judecată este posibilă înțelegem prin aceasta că ar fi adevărată în unele lumi imaginabile.

Fără îndoială, nu este ușor să găsim exemple care fac ca toate relațiile numerotate să fie intuitiv plauzibile. Dar am putea argumenta, eventual, că aici motivul este același cu motivul dificultăților pe care unii logicieni cred că le suscită principiile de reducere din logica modală. În limbile naturale, cuvintele modale apar uneori, incontestabil, după

[16] Cele patru principii numerotate pot fi găsite la R. Carnap, *Semnificație și necesitate*, 1947; (ed. rom. 1972, p. 244). A se vedea și Ruth Barcan, "A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication", *The Journal of Symbolic Logic*, XI, (1946), pp. 1–16.

cuantori; dar oriunde ar apare, ele sînt aproape întotdeauna întrebuinţate într-un mod eliptic, adică sînt întrebuinţate ca să semnifice că ceva este necesar sau posibil, după cum este cazul, în raport cu altceva care nu este indicat în mod explicit, dar poate fi identificat cu uşurinţă de către interlocutor. În simbolismul tehnic al logicii modale însă, se presupune că totul este făcut explicit. În consecinţă, dacă încercăm să redăm sensul simbolismului tehnic în vorbirea obişnuită, putem ajunge la anumite dificultăţi, deoarece cuvintele folosite sugerează o suplimentare acolo unde nu se cere nici o suplimentare. Să presupunem, de exemplu, că $(\exists x) \diamond Fx$ ar însemna „Există un lucru care se poate aprinde" şi $\diamond (\exists x)Fx$ ar însemna „Poate să existe un lucru aprins". Ajungem imediat la dificultatea că cele două propoziţii româneşti sînt fără îndoială neechivalente. Într-adevăr, prima propoziţie poate fi aplicată în vederea enunţării faptului că ceva este inflamabil, iar a doua pentru a spune că informaţia noastră nu garantează existenţa focului. Dar dacă aceste aserţiuni ar fi retraduse adecvat în simbolismul logicii modale, rezultatele ar fi mult mai complicate decît cele două formule legate în schema noastră prin relaţia (2). În logica modală, rombul semnifică numai necontradicţia, şi, conform acestei interpretări stricte, cele două formule menţionate mai sus par a fi logic echivalente, cel puţin pentru universul non-vid, asumat îndeobşte de logicieni. Din păcate, nici un logician care adoptă interpretarea strictă nu a oferit exemple care să facă cu totul satisfăcătoare relaţiile numerotate prin (1) şi (3).

Nici unul din sistemele de logică modală considerate de către C. I. Lewis nu conţine mijloace pentru operarea cuantorilor asupra semnelor modale, iar dezvoltarea schiţată în ultimele cîteva alineate nu a fost acceptată de către toţi logicienii. Acei care obiectează împotriva ei susţin sau că inovaţia este inutilă, sau că este absurdă. Astfel, după G. H. von Wright, ea este o complicaţie de prisos, deoarece orice lucru exprimabil în acest mod poate fi exprimat şi altfel, într-un mod mai simplu[17]. Spunînd aceasta, el pleacă de la presupunerea că toate atributele lucrurilor se pot împărţi în două grupe: atribute formale, a căror prezenţă în lucrurile care le posedă şi absenţă în lucrurile care nu le posedă este necesară, şi atribute materiale, a căror prezenţă în lucrurile care le posedă şi absenţă în lucrurile care nu le posedă este numai contingentă. De exemplu, se presupune că atributele aritmetice fac parte din prima grupă iar culorile din a doua. Din această ipoteză (pe care o numeşte principiul predicaţiei) pare să urmeze că cuantorii ce operează peste semnele modale sînt inutili pentru cel ce ştie dacă un atribut este formal sau este material. Într-

[17] *An Essay on Modal Logic*, p. 27.

adevăr, dacă Fx exprimă un atribut formal, $(\exists x)\Box Fx$ şi $(\exists x) \diamond Fx$ sînt ambele echivalente cu $(\exists x)Fx$; dacă Fx exprimă un atribut material, prima expresie este în mod evident absurdă, în timp ce a doua este un truism.

Von Wright admite că principiul său are cîteva aparente excepţii; dar principiul este expus unei obiecţii de ordin general, pe care el nu o semnalează. Apartenenţa necesară a unui atribut la un subiect care are acest atribut nu depinde întotdeauna numai de natura atributului. A fi mai mic ca 13 este un atribut aritmetic, şi, dacă vrem, putem spune că el revine în mod necesar numărului 12; dar este fals că numărul apostolilor este în mod necesar mai mic ca 13, deşi numărul apostolilor este incontestabil 12. Se pare că Wright a fost cumva indus în eroare aici de distincţia dubioasă între modalităţile *de dicto* şi modalităţile *de re*, distincţie pe care o preia de la autorii medievali. Dacă expresia *de re* este înţeleasă în sensul că ar exclude dependenţa modalităţii de sensul termenului subiect ca distinct de referinţa acestuia, atunci în mod paradoxal, singurele enunţuri modale *de re* adevărate sînt cele în care termenul subiect poate fi înlocuit *salva veritate* printr-o altă desemnare oarecare a unui lucru din aceeaşi categorie, adică enunţuri ca „În mod necesar, regina Ana a murit sau nu a murit", unde termenul subiect nu aduce nici o contribuţie importantă iar adevărul întregului depinde de caracterul tautologic al expresiei „a murit sau nu a murit".

Obiecţia lui W. V. Quine împotriva cuantificării peste semnele modale este şi mai radicală: el spune că această cuantificare este nu numai inutilă, ci şi absurdă, şi sugerează chiar că am face bine să abandonăm întreaga teorie a modalităţii, împreună cu orice referire la judecăţi şi atribute, ce pare a fi cerută de această teorie. Argumentele sale pot fi rezumate în mod liber după cum urmează, cu ajutorul unui exemplu la care am recurs deja. Acei care permit utilizarea unor cuvinte şi expresii modale consideră că $\Box(12 < 13)$ exprimă o judecată adevărată. Dacă acceptăm acest lucru, vom admite, probabil, şi faptul că expresia $\Box(x < 13)$ exprimă o funcţie satisfăcută de către numărul 12, iar atunci nu mai putem refuza formarea propoziţiei existenţiale $(\exists x)\Box(x<13)$. Cum trebuie să înţelegem însă această inovaţie? Nu poate fi vorba despre asertarea existenţei unui număr care posedă o anumită proprietate; într-adevăr, dacă un asemenea număr ar exista, acel ce a făcut afirmaţia ar putea fi solicitat pe drept cuvînt s-o justifice prin enunţarea explicită a numărului care se bucură de proprietatea respectivă, iar pentru aceasta ar fi indiferent dacă ar răspunde spunînd „12" sau „numărul apostolilor", întrucît aceste desemnări au aceeaşi referinţă. Pe de altă parte, este inutil să propunem, aşa cum au făcut unii logicieni, ca variabila x să poată lua

ca valori intensiuni de un anumit gen. Într-adevăr, admiţînd intensiunile ca valori posibile ale variabilelor noastre, trebuie să abandonăm principiul indiscernabilităţii identicilor; iar atunci, dat fiind că nu dispunem de nici un criteriu clar al identităţii, vom fi incapabili să spunem ceea ce vrem să spunem cu privire la extensiuni:

„Ontologiile intensionale şi extensionale sînt ca untdelemnul şi apa. Admiterea atributelor şi judecăţilor concomitent cu folosirea liberă a cuantificării şi a altor expresii de bază exclude indivizii şi clasele. Ambele genuri de entităţi îşi pot găsi locul în aceeaşi logică numai prin intermediul unor restricţii, ca acelea introduse de Church, care permit păstrarea lor separată, iar aceasta seamănă foarte mult cu două logici separate, avînd fiecare universul ei propriu"[18].

Considerăm că nu filosofului îi incumbă misiunea de a elimina menţiunea judecăţilor şi atributelor, după cum nu lui îi revine sarcina să afirme că trebuie să eliminăm cuvintele „posibil" şi „necesar" din vocabularul nostru logic. S-ar putea ca statutul judecăţilor să suscite unele dificultăţi metafizice, ca acelea apărute în legătură cu natura societăţilor politice; dar aşa cum ar fi greşit să protestăm împotriva extravaganţelor lui Hegel prin afirmaţia „Nu există state", tot astfel este greşit să replicăm la afirmaţiile confuze ale lui Bolzano şi Meinong spunînd „Nu există judecăţi". Dacă, aşa cum a arătat Quine, încercările uzuale ale logicienilor de a opera cu cuantori peste semnele modale sînt deficitare, sursa dificultăţii trebuie căutată în detaliile simbolizării lor şi nu într-un defect general al oricărei referiri la judecăţi şi modalităţi. Astfel abordată, problema poate fi în fapt rezolvată destul de uşor, după cum putem constata.

Construirea unei formule ca $(\exists x) \Box Fx$ sau $(x) \Diamond Fx$ presupune cunoaşterea prealabilă a semnificaţiei unor formule cum sînt $\Box FY$ şi $\Diamond FY$. Să considerăm mai amănunţit primul caz. Am văzut deja că o desemnare care figurează în cadrul unui context modal poate fi întotdeauna eliminată. Dacă desemnarea nu este o descripţie definită ci un nume propriu (de ex. „Napoleon"), înlocuim mai întîi această desemnare printr-o descripţie definită cu acelaşi sens (de ex. „Persoana numită «Napoleon»"). Apoi, din descripţia noastră, să spunem $(\imath x)Gx$, extragem predicatul $G'x$, care înseamnă *x este unicul lucru* G. Şi în sfîrşit, în locul lui $\Box F[(\imath x)Gx]$ scriem $\Box (x)[G'x \supset Fx]$, sau $(x)\Box[G'x \supset Fx]$, care este tocmai un alt mod de asertare concomitentă, în terminologia necesităţii, a tuturor judecăţilor exprimabile prin formule de implicaţie necesară de forma $G'Z/FZ$. Or, cînd întîlnim formula $(\exists x) \Box Fx$, nu ştim care este descripţia relevantă a lucrului sau lucrurilor despre care se afirmă că sînt în mod necesar

[18] *From a Logical Point of View*, pag. 157. Lucrarea lui Church la care se referă Quine este "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation", contribuţie la volumul *Structure, Method, and Meaning: Essays in Honor of Henry M. Sheffer*, 1951.

exemplificări ale însuşirii exprimate prin Fx, dar avem de luat în consideraţie numai două posibilităţi. $(\exists x)\,\Box Fx$ poate însemna *Există ceva care în orice descripţie este în mod necesar F*, sau poate însemna *Există ceva care într-o anumită descripţie este în mod necesar F*. Dacă interpretarea urmărită este prima interpretare (*de re*), $(\exists x)\Box Fx$ nu poate exprima o judecată adevărată dacă Fx nu este un predicat truist şi deci un predicat care urmează de la sine oricărei descripţii imaginabile. Dar aceasta echivalează cu a spune că formula controversată este echivalentă cu $\Box(x)Fx$. Dacă, pe de altă parte, interpretarea vizată este a doua interpretare, $(\exists x)\,\Box Fx$ nu poate exprima o judecată adevărată dacă nu există un lucru care admite, din mulţimea descripţiilor sale posibile, o descripţie ce atrage după sine predicatul Fx. Dar aceasta este tot una cu a spune că formula controversată este echivalentă cu $(\exists x)Fx$. Deci $(\exists x)\Box Fx$ nu poate reprezenta în nici o interpretare un nou gen de judecată. Raţionînd similar, putem arăta că dacă $(x)\Diamond Fx$ are în genere vreo semnificaţie, ea trebuie să fie echivalentă sau cu $(x)Fx$ sau cu $\Diamond(\exists x)Fx$, astfel că şi aici reiese că nu sîntem obligaţi să admitem operarea cu cuantori peste semnele modale. Ce-i drept, am fi putut evita toată această controversă menţinînd integral explicaţia relaţională a modalităţii pe care am introdus-o în capitolul anterior, dar în acest caz am fi trecut cu vederea dezvoltarea interesantă a limbajului care face posibilă construirea unor enunţuri de formele $\Box F[(\imath x)Gx]$ şi $\Diamond F[(\imath x)Gx]$, şi nu am fi putut da o expunere plauzibilă a discuţiilor recente în jurul intensionalităţii.

4. *Identitate, funcţii şi clase*

În *Begriffsschrift* şi, din nou, în *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege ia identitatea ca noţiune de bază, pentru care este necesar să se formuleze axiome speciale. În *Principia Mathematica* (*13.01), pe de altă parte, Whitehead şi Russell evită necesitatea unor axiome speciale de identitate prin introducerea lui $X = Y$ ca abreviere pentru $(f)\,[f!X \supset f!Y]$. Semnul „$!$", pe care îl întrebuinţează aici după litera f, este destinat să arate că funcţiile considerate sînt toate *predicative*, în sensul tehnic al cuvîntului. Această restricţie este cerută de teoria ramificată a tipurilor a lui Russell, aşa cum vom vedea în capitolul următor, dar autorii subliniază că restricţia nu duce la nici o pierdere reală a generalităţii, deoarece principiul reductibilităţii, pe care ei îl introduc pentru a atenua rigoarea teoriei ramificate a tipurilor, ne permite să lucrăm cu definiţia în cauză ca şi cum ea ar trata despre toate funcţiile fără restrîngere. Uneori se spune că distincţia dintre

funcțiile predicative și celelalte funcții este una de *ordin*, dar acest mod de exprimare nu coincide cu accepția în care putem spune că discursul care necesită un limbaj intensional este de ordin mai înalt decît discursul exprimabil într-un limbaj pur extensional, și nu este suficient pentru înlăturarea dificultății legate de limbajul intensional. Dacă admitem existența unor funcții intensionale utilizînd totodată definiția în forma de mai sus, ne vedem obligați la concluzia bizară că pentru oamenii raționali nici o identitate nu poate rămîne necunoscută. Luceafărul de ziuă, după cum se pare, nu poate fi identic cu Luceafărul de seară, deoarece avem cel puțin o funcție, și anume aceea de a fi știut de toți oamenii raționali drept identic cu Luceafărul de ziuă, funcție care este satisfăcută de primul obiect, dar nu de al doilea. Din acest motiv, ceea ce s-a spus mai sus în legătură cu tratarea identității la Frege trebuie să se aplice, *mutatis mutandis*, și la tratarea acestei chestiuni în *Principia Mathematica*. Cu alte cuvinte, definiția identității pe care o dau Whitehead și Russell trebuie restrînsă astfel încît să se refere numai la funcțiile extensionale. Dar atunci avem oare un motiv temeinic pentru a prefera un mod de tratare celuilalt?

În sistemul lui Frege, ca și în *Principia Mathematica*, se presupune că teoria identității este o parte a logicii, dar nu este absolut clar de ce se include ea în logică, iar un critic ostil ar putea obiecta că Frege nu ne-a dat o expunere generală a logicii pe baza căreia să putem decide dacă el a rămas fidel programului său în acest punct. Cînd însă noțiunea de identitate este introdusă prin intermediul unei definiții, pare evident la prima vedere că teoria trebuie să constituie o parte a logicii. Într-adevăr, semnele identității apar acum numai ca un procedeu de abreviere a unor propoziții care s-ar fi putut enunța cu semne care sînt în exclusivitate și fără nici un dubiu semne logice. Dar acest aparent avantaj poate fi cîștigat numai prin utilizarea cuantorului (f) în cadrul definiției. Este adevărat că, potrivit propriilor sale explicații, formula lui Frege

$$x = y \supset (fx \supset fy)$$

trebuie tratată ca abreviere a formulei

$$(f)[x = y \supset (fx \supset fy)].$$

Dar am văzut că logicianul este autorizat să utilizeze variabile libere de un fel special pentru exprimarea universalității care revine propriilor sale enunțări. Speculînd această împrejurare, putem scrie:

$$X = Y \supset (FX \supset FY)$$

în locul formulei lui Frege, și nu ca un simplu substitut ci ca expresie a unei scheme adevărate în mod banal. În sistemul din *Principia*

Mathematica, pe de altă parte, utilizarea unei variabile funcționale *legate* este esențială în definirea identității. În adevăr, deși Whitehead și Russell vor să ne facă a înțelege că o expresie de forma $X = Y$ poate fi privită ca abreviere a unei expresii de forma $(f)[f!X \supset f!Y]$, nu încape îndoială că ei nu vor să sugereze că orice expresie de forma $X = Y$ poate fi înlocuită, pretutindeni unde apare, printr-o expresie de forma $F!X \supset F!Y$, sau viceversa. Or, aplicarea cuantorilor la variabile funcționale marchează trecerea la un calcul mult mai complicat decît calculul simplu sau restrîns al funcțiilor propoziționale pe care l-am considerat pînă acum în acest capitol. Dacă ne gîndim la faptul că acest nou calcul trebuie considerat ca o parte a logicii, atunci putem spune că Whiteahead și Russell au redus teoria identității la logică, în ipoteza de a fi putut găsi un mod satisfăcător de restrîngere a definiției lor astfel încît ea să privească numai funcții neintensionale. Dar dacă dintr-un motiv sau altul vrem să vorbim despre identitate fără a ne crea singuri de îndată toate dificultățile calculului nou, atunci trebuie să revenim la Frege și să prezentăm teoria identității ca un calcul mai puțin cuprinzător, în care axiomelor și regulilor calculului funcțional restrîns li se adaugă două axiome speciale. Unul din motivele pentru a face aceasta îl constituie tocmai faptul că teoria identității este legată strîns de distincția dintre limbajul intensional și cel extensional. Distincția între *Sinn* și *Bedeutung* i-a fost sugerată pentru prima oară lui Frege de meditațiile sale asupra unor enunțuri ca „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară" și poate că tocmai importanța pe care o avea această distincție în ochii săi l-a făcut să introducă identitatea ca noțiune de bază.

În perioada cînd scria *Begriffsschrift*, Frege nu vedea necesitatea adoptării unor măsuri speciale de precauție pentru calculul extins al funcțiilor în care cuantorii se aplică la variabile funcționale. Dar, cînd își reformulează sistemul de logică în vederea obiectivelor urmărite în *Grundgesetze*, el adaugă o nouă axiomă de cuantificare, care în simbolismul modern poate fi redată prin formula:

$$(f)g_x(fx) \supset g_x(hx).$$

Această axiomă înseamnă, de fapt, că ceea ce este valabil pentru toate funcțiile de nivel unu cu un singur argument este valabil pentru oricare dintre ele. Ca și în scrierea lui Frege, se presupune că litera mică scrisă ca indice la litera funcțională g arată că orice argument adecvat pentru paranteza ce urmează trebuie să fie o funcție de nivel unu de un singur argument. Ea este un fel de prefix de legare, deși nu un cuantor. Evident, noua axiomă se aseamănă foarte mult cu axioma de cuantificare pentru variabilele individuale, și anume

$$(x)fx \supset fy.$$

Dar în sistemul lui Frege această axiomă este unica autorizare explicită a aplicării cuantorilor la variabile funcționale și, ca atare, ea nu este cîtuși de puțin superfluă. Fără această inovație ad-hoc, Frege nu ar fi putut nici măcar să facă plauzibilă ideea că aritmetica este reductibilă la logică. Dacă ar fi considerat necesar să aplice cuantorii la variabilele funcționale de nivelul doi și de nivel mai înalt, el ar fi enunțat poate o axiomă separată de cuantificare pentru fiecare nivel succesiv în parte. Dar am văzut că el nu se simțea deloc la largul său cu formulele care presupuneau variabile funcționale de nivel mai înalt și a încercat să-și simplifice sarcina vorbind în schimb despre clase și despre clase de clase.

Este probabil că tocmai caracterul greoi al propriei sale notații l-a făcut pe Frege să repudieze formulele cu variabile funcționale legate. Iar această notație s-a datorat la rîndul ei opoziției pe care Frege se simțea obligat s-o releve între funcții și obiecte. Dar, orice am putea crede referitor la ideile generale ale lui Frege despre funcții, trebuie să admitem că utilizarea variabilelor funcționale legate prezintă un element nou și bizar. Faptul devine evident cînd încercăm să găsim o traducere literală pentru formulele în care figurează ele.

Deși nu este ușor să găsim în limbajul obișnuit echivalențe stricte pentru formulele cu variabile individuale legate, această dificultate poate fi de obicei depășită printr-o folosire judicioasă a termenului „lucru" și a diverselor pronume. Astfel, $(\exists x)[Fx.Gx]$ poate fi redată ca și cum ar fi o abreviere aproximativă a propoziției românești: *Există ceva care este F și este G.* Dar atunci cînd cuantorii se aplică la variabilele funcționale, gramatica simbolismului se abate atît de mult de la gramatica limbajului obișnuit încît nu mai este posibil să dăm o traducere literală a formulei, adică o traducere în care fiecare semn să fie tradus printr-un cuvînt. De exemplu, cum vom citi $(\exists f)[fX.fY]$? Cînd construiesc o formulă de acest fel, logicienii încearcă uneori să o redea oral, prin propoziția destul de apropiată de limba obișnuită: *Există un f astfel încît f este X și f este Y.* Acest jargon mixt este evident lipsit de eleganță, dar în afară de aceasta el este nesatisfăcător deoarece nu reușește să arate limpede rolul lui *f*. În corpul formulei, litera este suficient de adecvată pentru marcarea unui spațiu liber care ar putea fi completat printr-o expresie funcțională cum este un verb, dar în prefix litera este tratată ca și cum ar fi ceea ce logicienii medievali numeau un termen general de intenție secundă, echivalent poate cu „funcție". Auzind mai întîi expresia „există un", ne așteptăm în mod firesc să urmeze un substantiv comun, dar mai tîrziu constatăm că litera care a fost pusă să îndeplinească oficiul de substantiv poate lua și locul unui verb. Dificultăți similare survin atunci cînd cuantorii se aplică la variabile propoziționale. În fiecare caz

în parte, sursa dificultății rezidă în faptul că deși limba noastră are cuvinte ca „oarecum" și „oricum", ea nu conține nici o construcție care ar corespunde exact utilizării unui cuantor cu o *expresie* variabilă avînd statutul gramatical de verb sau de clauză completă. Dacă vrem să spunem într-o limbă naturală ceea ce în simbolismul logicii este spus prin formula $(\exists f)[fX.fY]$, nu putem produce nimic mai apropiat decît *Există o însușire exemplificată prin X și prin Y*. Aceasta este într-adevăr o redare destul de apropiată, dar ea nu traduce semn cu semn prin cuvinte formula logică simbolică pînă cînd nu modificăm efectiv convențiile noastre pentru utilizarea simbolismului, mai întîi prin luarea lui f în cadrul formulei ca un semn al unui spațiu liber ce marchează un loc pentru o *desemnare* a unei funcții, iar apoi prin luarea ordinii semnelor într-o expresie compusă oarecare de forma FX ca însemnînd că F este exemplificat de X.

Frege nu considera posibil să vorbim despre o funcție fără să păcătuim împotriva gramaticii, și din acest motiv nu putea să trateze variabilele funcționale ca pe niște semne care marcau locurile libere ce urmează să fie umplute de desemnări complete. După el, o funcție era esențialmente o entitate incompletă și el considera inevitabil ca această particularitate să se reflecte în forma axiomei sau axiomelor speciale de cuantificare utilizate pentru calculul lărgit al funcțiilor. Dacă distingem minuțios între expresie și desemnare, putem vorbi despre funcții fără să ajungem la impasul lui Frege, dar noua interpretare a simbolismului logic, propusă în alineatul precedent, nu ne va scuti de necesitatea unei reguli sau axiome speciale atunci cînd începem să aplicăm cuantorii la variabile funcționale. În calculul restrîns al funcțiilor, dispunem de reguli de raționament pentru expresii de forma $(x)Fx$ și de forma $(\exists x)Fx$, unde se presupune că Fx este o abreviere a unei expresii funcționale care conține x; dar dacă adoptăm convenția că FX este o prescurtare pentru *F este exemplificat de X*, regulile noastre nu ne vor mai permite să operăm cu formule de același tip ca $(x)[Gx \supset Hx]$ și fără îndoială nu vor fi suficiente pentru explicarea aplicării cuantorilor la variabile aflate în poziția lui F. Și totuși, introducerea unor reguli separate de cuantificare pentru diferitele genuri de variabile este nesatisfăcătoare, și de aceea pare indicat să vedem dacă prin utilizarea unui nou simbolism nu am putea ajunge la o simplificare.

Una din căile de ieșire din impas constă în a face ca FX să-și păstreze sensul conferit de către Frege dar să introducem o nouă constantă funcțională η avînd semnificația de „exemplifică". Întrucît noul simbol este un fel de verb tranzitiv, semnele care apar de cele două părți ale sale în cadrul unei formule simple trebuie să fie niște desemnări, iar înțelesul simbolului impune ca cel puțin al doilea semn să

fie o desemnare a unei funcţii. Aşadar, ca variantă pentru FX avem $X\eta Y$, unde Y este o prescurtare pentru $\S xFx$. Uneori, ce-i drept, primul semn utilizat împreună cu η poate desemna un şir ordonat de două sau mai multe lucruri, în timp ce al doilea semn desemnează o însuşire care nu poate fi exemplificată decît într-o atare secvenţă, dacă în genere poate fi exemplificată. Aceasta se va întîmpla ori de cîte ori este transcrisă în noua notaţie o propoziţie relaţională. În loc de $G(X,Y)$ avem atunci $\langle X,Y\rangle \eta Z$, unde Z este o prescurtare pentru $\S xyG(x,y)$. În alte formule însă, ambele semne care însoţesc semnul η pot fi desemnări de funcţii, anume atunci cînd despre funcţia însăşi se spune că exemplifică o anumită însuşire. Dar dacă una sau ambele desemnări care apar împreună cu η într-o formulă simplă sînt înlocuite printr-o variabilă, obţinem o expresie care poate servi ca matrice pentru enunţuri generale. Aşadar, matricile de forma $x\eta Y$ şi de forma $X\eta y$ vor fi în egală măsură deschise cuantificării în conformitate cu regulile obişnuite ale teoriei cuantificării, şi putem scrie de exemplu $(\exists z)[X\eta z.Y\eta z]$ pentru exprimarea propoziţiei că există o însuşire pe care lucrurile denumite X şi Y o exemplifică. Mai mult, în afară de simplificarea pe care o permite în exprimarea propoziţiilor generale despre funcţii, noua notaţie are marele merit de a arăta clar că teoria numită uneori calculul lărgit al funcţiilor propoziţionale este de fapt teoria exemplificării. Desigur, ar fi absurd să spunem că η trebuie luat ca unica expresie funcţională a limbajului nostru şi că trebuie utilizat în formularea tuturor propoziţiilor fără excepţie. Într-adevăr, cînd vrem să prescriem un atribut determinat unui lucru numit X, nu avem, evident, nimic de cîştigat dacă scriem $X\eta\S yFy$ în loc de FX; şi apoi, în orice caz, posibilitatea desemnării unei funcţii presupune întotdeauna posibilitatea exprimării ei. Este însă important faptul că acel calcul lărgit în care vorbim cu generalitate deplină despre funcţii poate fi prezentat ca un sistem cu un semn nou, ireductibil la semnele teoriei obişnuite a cuantificării. Căci aceasta echivalează cu afirmaţia că el este teoria ideii exprimate prin acest semn.

Cînd discuta în germană probleme filosofice, Frege vorbea adesea despre căderea unui lucru sub un concept, dar din motive pe care le-am examinat mai sus el nu era satisfăcut de acest limbaj şi de aceea nu a încercat niciodată să dezvolte un calcul al exemplificării de felul celui pe care l-am propus adineauri. Pe de altă parte, calculul apartenenţei la clase, prin care el încerca să evite dificultăţile propriei sale notaţii pentru aplicarea cuantorilor la variabilele funcţionale, are o structură foarte asemănătoare cu aceea a calculului exemplificării. Aşa cum FX poate fi redat prin $X\eta\S yFy$, tot astfel poate fi redat şi prin $X\varepsilon\hat{y}Fy$, unde ε este o abreviere pentru „este un membru

al". Şi după cum raportarea unui lucru la un altul într-un anumit fel poate fi privită ca exemplificarea unei însuşiri relaţionale de către un cuplu ordonat, tot astfel ea poate fi privită ca apartenenţa aceluiaşi cuplu ordonat la o clasă de cupluri ordonate. În fapt, unica deosebire însemnată dintre cele două calcule constă în condiţia de identitate pentru tipurile lor distinctive de entităţi. Atunci cînd a introdus în *Grundgesetze* o notaţie pentru clase, Frege a stipulat o axiomă (V) care în simbolismul modern se poate reda prin formula

$$(\hat{x}Fx = \hat{y}Gy) \equiv (z)[Fz \equiv Gz].$$

Aceasta echivalează cu a spune că avem pentru clase

$$(X = Y) \equiv (w)[w \varepsilon X \equiv w \varepsilon Y].$$

Propoziţia corespunzătoare nu este valabilă pentru însuşiri sau atribute şi nici măcar nu ar fi corect să spunem în cazul lor

$$(X = Y) \equiv \square(w)[w \eta X \equiv w \eta Y].$$

Într-adevăr, dacă din identitatea celor două însuşiri urmează că ele trebuie să fie în mod necesar exemplificate de unele şi aceleaşi lucruri, reciproca nu este adevărată. Toate triunghiurile echilaterale sînt cu necesitate triunghiuri cu unghiuri egale, şi viceversa, dar semnificaţia pe care o are „triunghi echilateral" nu este aceeaşi cu semnificaţia pe care o are „triunghi echiunghiular".

Din punct de vedere istoric este interesant faptul că dezvoltarea logicii matematice, care începuse prin tentativele lui Leibniz de a formula un calcul *de continentibus et contentis*, a trebuit să culmineze în opera lui Frege, Whitehead şi Russell cu o teorie a apartenenţei la clase. Dar nu trebuie să dăm prea multă importanţă similarităţilor terminologice. Leibniz nu făcea o distincţie clară între relaţia unui membru cu o clasă şi relaţia unei clase cu o clasă supraordonată, a cărei parte este, dar în cea mai mare parte spusele sale erau adecvate numai pentru cea de-a doua relaţie. Algebra claselor a lui Boole, pe care o privim ca pe o realizare a proiectului lui Leibniz, este fără îndoială o teorie a relaţiilor dintre clasele ai căror membri, în cazul cînd au membri, provin toţi dintr-un domeniu comun de indivizi numit universul discursului. În fapt, acest calcul este un fragment al calculului restrîns al funcţiilor propoziţionale. Pe de altă parte, calculul lui Frege nu priveşte numai relaţiile de incluziune, excluziune şi intersectare între clase de acelaşi nivel, dar şi apartenenţa unei clase la o alta. Pe scurt, acest calcul este teoria cantoriană a mulţimilor prezentată ca un produs derivat din calculul lărgit al funcţiilor propoziţionale. Chiar dacă aplicarea cuantorilor la variabile funcţionale nu l-ar fi preocupat, Frege ar fi dorit probabil să vorbească despre

clase din același motiv din care Cantor a fost împins să vorbească despre mulțimi. Pentru aducerea la îndeplinire a programului său este necesar să arătăm: (*a*) că aritmetica poate fi elaborată în cadrul teoriei mulțimilor, și (*b*) că teoria mulțimilor poate fi caracterizată în mod adecvat ca o parte a logicii. Vom analiza în capitolele următoare dacă aceste afirmații pot fi dovedite. Aici nu trebuie să considerăm decît ceea ce implică referirea la clase sau mulțimi, și nu referirea la funcții.

Deși Frege privea enunțurile despre clase ca înlocuitoare, în anumite contexte, ale enunțurilor despre funcții, el nu credea că este cu putință ca clasele și funcțiile să coincidă. Potrivit explicațiilor sale, enunțurile despre clase pot fi substituite enunțurilor despre funcții numai cînd acestea din urmă sînt de așa natură încît ar fi adevărate pentru toate funcțiile echivalente material celor considerate. Această idee era împărtășită de Whitehead și Russell pe vremea cînd elaborau prima ediție din *Principia Mathematica*. Dar în noua introducere, scrisă pentru ediția a doua a acestei opere, Russell declara că nu mai vedea necesar să distingă între clase și funcții, deoarece considera că toate funcțiile sînt extensionale, adică accepta orice aserțiune de forma

$$(x)[Fx \equiv Gx] \supset [H(\hat{Fx}) \equiv H(\hat{Gx})]$$

unde, conform convenției sale, $\hat{Fx}$ și $\hat{Gx}$ sînt desemnări de funcții[19]. Dacă Russell înțelege prin aceasta că simbolismul său nu conține mijloace de exprimare a funcțiilor intensionale, afirmația lui este fără îndoială corectă, dar nu prezintă prea mare importanță. Dacă însă înțelege prin aceasta că toate funcțiile de funcții exprimabile în vreun simbolism, oricare ar fi el, sînt extensionale, declarația sa prezintă un mare interes filosofic, dar este extrem de discutabilă, ca să nu spunem mai mult. Acesta este de fapt contextul de la care a pornit controversa în jurul intenționalității și de unde provine folosirea modernă, destul de deconcertantă, a termenilor „intensional" și „extensional".

În trecut, mulți logicieni vorbiseră despre clase, deoarece sperau să evite astfel dificultățile legate de universalii. De exemplu, ei au presupus că o clasă de lucruri materiale putea fi admisă ca entitate chiar și de omul cel mai încăpățînat, deoarece și o clasă ar putea fi privită ca un lucru material compus, chiar dacă membrii acestei clase nu sînt reuniți laolaltă într-un singur loc, ca pietrele unei grămezi. Dar Russell și adepții săi nu-și fac în această privință nici o iluzie. De exemplu, Quine subliniază că clasa statelor din S.U.A. nu este

[19] *Principia Mathematica*, Ed. 2-a, vol. I, p. XXXIX.

aceeași cu clasa comitatelor din S.U.A., deși teritoriul acestor state este același cu teritoriul tuturor acestor comitate[20]. Dacă este primejdios să vorbim despre abstracții, nu vom reuși să evităm primejdia întrebuințînd notația pentru clase, deoarece clasele sînt și ele abstracții. La fel, nu vom reuși să eliminăm nevoia de a utiliza la un anumit nivel al limbajului și alte expresii funcționale în afară de ε. Într-adevăr, orice desemnare a unei clase este sau un semn de forma $\hat{x}Fx$, sau un semn al cărui înțeles și referință sînt determinate făcîndu-se apel la un semn sau la niște semne de acest gen. Ce-i drept, o clasă poate fi uneori indicată prin enumerarea membrilor săi, adică prin construirea unui semn de clasă avînd forma $\hat{x}(x = Y \vee x = Z \vee \ldots)$, dar este evident că nu toate clasele pot fi indicate în acest mod. În caz contrar, toate enunțurile adevărate cu privire la apartenența la clase ar fi tautologice. În epoca modernă, logicienii care preferă să vorbească despre clase și nu despre funcții fac aceasta în scopul ocolirii problemelor de intensionalitate, iar uneori ei afirmă chiar că clasele despre care vorbesc *sînt universalii*.

În această ordine de idei, este interesant să notăm că logicienii care sînt de acord în ce privește preferabilitatea notației în termeni de clase, pot totuși să fie într-un dezacord tot atît de mare ca dezacordul filosofilor din trecut în legătură cu universaliile. După Quine, realismul, conceptualismul și nominalismul se pot găsi toate în operele autorilor moderni cu privire la fundamentele matematicii[21]. Prin „realism" el înțelege, după cum se pare, dorința de a admite existența claselor și a claselor de clase ori de cîte ori simbolismul nostru ne sugerează posibilitatea unor atare ipoteze: prin „conceptualism" înțelege o politică de admitere a existenței claselor numai cînd sîntem în măsură să stabilim alcătuirea acestora, iar prin „nominalism" încercarea de a ne dispensa de orice ipoteză cu privire la existența claselor. În practică, se presupune că cele trei atitudini au mai multă sau mai puțină bunăvoință în ce privește cuantificarea variabilelor de clasă. Este îndoielnic dacă această întrebuințare a vechilor etichete poate fi bună la ceva, în special dacă (așa cum se întîmplă adesea) realismul este identificat greșit cu platonismul. Dar faptul că Quine și alți autori se simt înclinați să vorbească astfel arată foarte limpede că ei nu consideră posibil să rezolve toate problemele legate de universalii prin simpla adoptare a unei notații pentru clase. Iar în această privință, desigur, au dreptate.

Cînd într-un așa-zis calcul funcțional de ordin superior cuantorii se aplică la variabile care marchează locurile destinate semnelor

[20] *Mathematical Logic*, § 22.
[21] *From a Logical Point of View*, pp. 127—129.

funcţionale, noutatea esenţială a sistemului rezultat poate fi trecută cu vederea deoarece nu s-a introdus nici un simbol nou. Pe de altă parte, dacă prezentăm în mod explicit sistemul ca o teorie a exemplificării sau apartenenţei, am putea cumva să trecem cu vederea faptul că acum sînt presupuse sorturi diferite de entităţi fundamentale în calitate de valori posibile pentru variabilele logicii generale subiacente sau ale teoriei cuantificării. În această ordine de idei, Hao Wang scria:

„Opoziţia dintre teoriile cuantificării unisortate şi multisortate este mai radicală decît cea dintre calculele predicatelor de ordin unu şi de ordine mai înalte. Deşi calculele de ordin mai înalt şi teoriile formulate în interiorul lor sînt sisteme multisortate, există teorii multisortate, cum ar fi geometria, care lucrează cu puncte, drepte şi plane, care nu sînt formulate în calcule de ordin mai înalt. Teoriile cuantificării multisortate tratează toate predicatele pe picior egal, pe cînd calculele de ordin superior rezervă un piedestal special pentru relaţia de apartenenţă. Într-adevăr, un calcul al predicatelor de al n-lea ordin nu este nimic altceva decît o teorie n-sortată care conţine o singură axiomă (axioma comprehensiunii), ce afirmă că orice formulă cu sens din sistem defineşte o mulţime."[22]

O teorie este multisortată atunci cînd are variabile de genuri diferite, fiecare gen de variabile fiind restrîns la un domeniu diferit de obiecte ca valori posibile. Diferenţele de gen dintre variabile pot fi indicate tipografic, dar aceasta nu este esenţial, căci contextul poate indica în măsură suficientă aceste diferenţe. Dacă într-o versiune a geometriei plane întîlnim expresia *x este situat pe y*, ştim că litera *x* marchează un loc pentru desemnările de puncte iar litera *y* un loc pentru desemnările de linii. Dacă însă teoria este într-adevăr multisortată, trebuie să asumăm că regulile de cuantificare se repetă pentru fiecare gen de variabile în parte. Fără îndoială, aceste reguli vor coincide exact ca formă pentru fiecare gen. Dar cerinţa ca ele să fie repetate este enervantă, şi este firesc să ne întrebăm dacă nu putem duce la îndeplinire ceea ce urmărim cu o logică generală unisortată, în care regulile de cuantificare sînt formulate numai o singură dată.

Răspunsul pare a fi că putem transcrie orice teorie multisortată într-o variantă unisortată standard, cu condiţia ca variabilele noastre să poată lua ca domeniu de valori suma tuturor categoriilor teoriei considerate şi cu condiţia ca să reintroducem apoi distincţia după categorii prin intermediul unui număr de predicate categoriale (de ex., „este un număr natural", „este un punct", „este o linie") cu care putem formula condiţii pentru teoremele sistemului. Astfel, în loc de a spune:

$$x(y + z) = xy + xz,$$

[22] "On Denumerable Bases of Formal Systems", *Mathematical Interpretation of Formal Systems* de Th. Skolem şi alţii, (1955), p. 76. Termenul „multisortat" a fost introdus de către A. Schmidt, „Über deduktive Theorien mit Mehreren Sorten von Grunddingen", *Mathematische Annalen*, CXV (1938), pp. 485—506.

unde se subînțelege că variabilele au ca domeniu de valori numai categoria numerelor naturale, spunem:

Dacă x,y,z sînt numere naturale, $x(y + z) = xy + xz$.

Această standardizare (cum este numită uneori) este o procedură la care recurgem fără nici o ezitare în vorbirea obișnuită și se pare că este infailibilă. Este interesant de asemenea să notăm că, în numeroase cazuri, cel puțin transcrierea unei teorii multisortate într-un limbaj unisortat standard poate fi efectuată fără adăugarea vreunui predicat nou categorial. În aceste cazuri, distincția după categorii poate fi făcută prin formularea condițiilor categoriale cu ajutorul simbolurilor aflate dinainte la dispoziția noastră[23].

Printre teoriile multisortate, cea care operează cu apartenența, adică teoria mulțimilor, are o însemnătate specială, după cum recunosc matematicienii, prin faptul că întrebuințează titulatura „elementar" pentru ramuri ale științei lor care nu presupun această teorie. Nu este însă deloc evident că aceasta este singura teorie multisortată necesară în vederea desăvîrșirii științei. Uneori, Russell precum și alți filosofi care s-au inspirat din opera acestuia s-au exprimat ca și cum nu ar putea exista decît o singură categorie fundamentală de indivizi și, în afară de aceasta, diverse categorii de mulțimi. S-ar putea ca teza lor să fie corectă. În orice caz, ea este o mostră interesantă de speculație filosofică ce ar putea sugera într-o bună zi un program detaliat de unificare a științei. Am greși însă dacă am crede că aceasta este garantat prin considerente de logică. În contexte deosebite, entități de categorii deosebite pot fi considerate ca indivizi, încît literele pe care logicienii le numesc uneori variabile individuale marchează spații libere care pot fi ocupate de orice denumiri sau desemnări care completează formulele lor într-un mod care are sens. Dacă, așa cum credea Aristotel, natura entităților de bază privește metafizica, chestiunile metafizicii nu pot fi soluționate prin considerente de logică formală, și aceasta nu pentru că logica formală ar fi independentă de structura lumii, ci pentru că ea privește scheme ce pot interveni la nivele diferite.

5. *Necesitate și limbaj*

Deși Frege avea multe de spus despre principiile sintaxei și s-a considerat întotdeauna pe el însuși drept creatorul unui nou limbaj, care ar fi deosebit de adecvat pentru scopurile științei, spre deosebire de

[23] Hao Wang, "Logic of Many-sorted Theories", *Journal of Symbolic Logic*, XVII (1952), pp. 105–116.

predecesorii săi el nu privea logica drept o *ars sermocinalis* și, fără îndoială, nu împărtășea ideea lui Hobbes și Berkeley că necesitatea logică este impusă de regulile umane de utilizare a cuvintelor. Dimpotrivă, atunci cînd a spus că aritmetica s-ar putea reduce la logică, a subliniat că nu înțelegea s-o trateze nici ca pe o ramură a psihologiei și nici ca pe o ramură a filologiei. Pentru el, logica era cea mai generală dintre toate științele despre realitate, era acea *doctrina formarum* despre care scrisese Leibniz, și ea era legată de gramatică numai întrucît studia schemele de bază pe care orice limbaj natural trebuie să fie apt a le exprima. Aceasta a fost și doctrina lui Whitehead și Russell în perioada cînd a fost elaborată *Principia Mathematica*. Dar, mai recent, mai mulți filosofi au adoptat teoria convenționalistă asupra necesității iar logica este chiar tratată de unii ca și cum ar fi identică cu semantica, adică cu studiul acelor reguli sau uzanțe lingvistice care conferă cuvintelor semnificația lor. Schimbarea pare să dateze de la publicarea de către Ludwig Wittgenstein, în 1921, a operei sale *Tractatus Logico-Philosophicus*, deși este aproape sigur că inițial Wittgenstein nu urmărea nimic de acest gen.

În anii de dinainte de 1914, pe cînd studia la Cambridge cu Russell, Wittgenstein a remarcat că adevărurile logicii nu puteau fi definite satisfăcător ca fiind acele adevăruri care sînt exprimabile într-un anumit vocabular special, dar puteau fi deosebite de alte adevăruri printr-o însușire specială a lor, pe care el a numit-o tautologie, înțelegînd prin aceasta nu caracterul lor repetitiv, ci mai curînd vacuitatea lor. La această propunere Russell s-a referit într-o operă scrisă pe cînd executa o condamnare la închisoare pentru activitățile sale pacifiste:

„Putem lua axioma infinitului ca un exemplu de propoziție care, deși poate fi enunțată în termeni logici, nu poate fi asertată de logică drept adevărată. Toate propozițiile logicii au o caracteristică exprimată în mod obișnuit prin afirmația că ele ar fi analitice, sau că contradictoriile lor ar fi autocontradictorii. Acest mod de formulare nu este însă satisfăcător. Legea contradicției este doar una dintre propozițiile logice; ea nu are o preeminență specială; demonstrația faptului că contradictoria unei propoziții se contrazice pe sine însăși reclamă, probabil, pe lîngă legea contradicției alte principii de deducție. Cu toate acestea, caracteristica propozițiilor logice pe care o căutăm este cea care a fost intuită și a cărei definiție s-a căutat de către cei ce spuneau că ea consta în deductibilitate din legea contradicției. Această caracteristică, pe care o putem numi pentru moment tautologie, nu aparține, evident, afirmației că numărul indivizilor în univers este *n*, oricare ar fi acest număr *n* ... Propozițiile logice sînt de așa natură încît pot fi cunoscute *a priori* fără a studia lumea actuală. ... Aceasta este o caracteristică nu a propozițiilor logice în sine, ci a modului în care le cunoaștem. Dar ea are repercusiuni asupra chestiunii naturii lor posibile, întrucît există anumite genuri de propoziții despre care ar fi foarte greu să presupunem că le-am putea cunoaște în absența experienței. Este clar că și definiția «logicii» trebuie căutată prin încercarea de a da o nouă definiție a vechii noțiuni de propoziție «analitică». Deși nu mai putem fi satisfăcuți cu definirea propozițiilor logice ca propoziții ce rezultă din legea contradicției, putem și trebuie încă să admitem că ele constituie o clasă cu totul deosebită de propoziții în comparație

cu cele pe care reuşim să le cunoaştem în mod empiric. Ele toate au caracteristica pe care, puţin mai sus, am convenit s-o numim «tautologie». Aceasta, împreună cu faptul că ele pot fi exprimate integral în termeni de variabile şi constante logice (o constantă logică fiind ceva ce rămîne constant într-o propoziţie atunci cînd *toate* elementele componente ale acesteia sînt modificate) — va da definiţia logicii sau matematicii pure. Pentru moment, nu ştiu cum trebuie definită tautologia. (Importanţa «tautologiei» pentru o definiţie a matematicii mi-a fost arătată de fostul meu elev Ludwig Wittgenstein, care lucra asupra acestei probleme. Nu ştiu dacă el a rezolvat problema şi nici măcar dacă trăieşte sau nu)"[24].

Deşi susţinea că adevărurile logicii ar fi într-un anumit sens vide, Wittgenstein nu considera că ele ar fi lipsite de însemnătate, şi la acest stadiu al evoluţiei sale el era departe de a crede că adevărurile logicii ar fi creaţii arbitrare ale omenirii. În unul din cele mai citate pasjea din *Tractatus,* el scria :

„Propoziţiile *(Sätze)* logice descriu scheletul lumii, sau mai bine zis îl prezintă. Ele nu «tratează» despre nimic. Ele presupun că numele au referinţă şi că propoziţiile elementare au sens. Iar aceasta este legătura lor cu lumea. Este clar că trebuie să arate ceva despre lume faptul că anumite combinaţii de simboluri — care au în esenţă un caracter determinat — sînt tautologii. Aici este punctul decisiv. Am spus că în simbolurile pe care le folosim ceva este arbitrar şi ceva nu este arbitrar. În logică numai ceea ce nu este arbitrar exprimă : dar aceasta înseamnă că în logică nu *noi* sîntem cei ce exprimăm, prin intermediul semnelor, ceea ce vrem, ci natura semnelor esenţialmente necesare afirmă ea însăşi. Cu alte cuvinte, dacă ştim sintaxa logică a oricărui limbaj simbolic, atunci toate tezele *(Sätze)* logicii sînt deja date"[25].

Caracterul tautologic al aserţiunilor logice urma să fie clarificat — după cum se presupunea — prin metoda matricială de expunere (metoda tabelelor de adevăr) şi se considera că nu are mare importanţă faptul că condiţiile de adevăr ale aserţiunilor universale şi existenţiale nu puteau fi prezentate în tabele avînd un grad finit de complexitate. Accentul pe care îl pune Wittgenstein asupra definiţiilor sale pentru funcţiile de adevăr prin intermediul tabelelor de adevăr se datora, desigur, convingerii sale că logica nu opera cu o clasă specială de lucruri sau relaţii ale lumii, ci numai cu natura a ceea ce am putea numi cumva complexitatea logică. Într-un loc, el scrie :

„Operaţia de adevăr este felul în care o funcţie de adevăr apare din propoziţiile elementare... Fiecare propoziţie este rezultatul operaţiilor de adevăr asupra unor propoziţii elementare... Toate funcţiile de adevăr sînt rezultate ale aplicărilor succesive ale unui număr finit de operaţii de adevăr la propoziţiile elementare. Aici devine clar că nu există lucruri cum ar fi «obiectele logice» sau «constantele logice» (în sensul lui Frege şi Russell)"[26].

Dar Wittgenstein nu se mulţumea să spună că adevărurile logicii sînt tautologii. El susţinea totodată că tautologiile logicii erau singu-

---

[24] *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919), pp. 202—205.
[25] *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6. 124.
[26] *Ibid.*, 5.3—5.4.

rele adevăruri necesare şi că ele constituiau întregul imperiu al cunoaş-
terii aprioric e :

„Din existenţa sau non-existenţa unei stări de lucruri (*Sachverhalt*, adică fapt atomar posibil) nu putem deduce existenţa sau non-existenţa altora. Stările de lucruri sînt independente între ele"[27].

„Cercetarea logică înseamnă investigarea *tuturor regularităţilor*. Iar în afara logicii totul este accident ... Necesitatea ca ceva să se întîmple deoarece s-a întîmplat altceva nu există. Există numai necesitate *logică*. La baza întregii concepţii moderne despre lume stă iluzia că aşa-numitele legi ale naturii ar fi explicaţii ale fenomenelor naturale"[28].

Rezultatul este ceva în genul filosofiei lui Hume, şi nu este surprinzător faptul că în cei doisprezece ani care au urmat publicării *Tratatului*, pozitiviştii logici din Cercul de la Viena, condus de Moritz Schlick, au încercat să combine explicaţia wittgensteiniană a logicii cu tradiţia humeistă pe care o moşteniseră de la Ernst Mach. Dar între cele două sisteme filosofice există o deosebire importantă. În timp ce Hume încerca să-şi sprijine concluziile pe o analiză psihologică, Wittgenstein se mărginea în cea mai mare parte la declaraţii oraculare, fără argumente în sprijinul acestora, cu excepţia acelora ce puteau fi derivate din considerarea simbolismului din *Principia Mathematica*. Explicaţia pare să fie faptul că el a admis pur şi simplu în mod indiscutabil suficienţa acestui simbolism în calitate de aparat sintactic al unui limbaj ideal. Am observat deja că el refuza să recunoască posibilitatea unui limbaj în mod ireductibil intensional, care ar permite desemnarea propoziţiilor în contexte ca „Ion crede că Pămîntul este turtit". Cînd spune că logica este un ansamblu de tautologii şi refuză să acorde vreo importanţă regulilor de inferenţă de felul celor pe care Frege, Whitehead şi Russell consideraseră necesar să le adauge propoziţiilor lor primitive[29], motivul său pentru aceasta pare să fie faptul că regulile de inferenţă care ne permit să trecem de la o formulă din *Principia Mathematica* la alte formule nu pot fi exprimate şi ele în simbolismul special al acestei lucrări. Modul în care un anumit limbaj oferă mijloace pentru ceea ce Wittgenstein numeşte uneori „logica lumii"[30] poate fi indicat, crede el, într-un limbaj, dar nu poate fi niciodată formulat. Această teză este cu siguranţă neadevărată, dacă presupunem că s-ar referi la toate limbile naturale. Aşa cum însuşi Wittgenstein admite la sfîrşitul *Tratatului* său, adevărul tezei ar implica lipsa de sens a declaraţiei prin care ea a fost asertată[31]. Dar este fără îndoială corect că simbolismul special din *Principia Mathema-*

[27] *Ibid.*, 2.061—2.062.
[28] *Ibid.*, 6.3, 6.37, 6.371.
[29] *Ibid.*, 5.132 şi 6.126.
[30] *Ibid.*, 6.22.
[31] *Ibid.*, 6.54.

tica nu permite traducerea întregului text formulat în cuvinte din această lucrare.

Deşi Wittgenstein considera că lumea este compusă din fapte atomare independente, care ar putea fi descrise de propoziţiile atomare (în acel sens metaforic al „descrierii" în care *faptul* că într-un tablou cuvîntul „afară" apare după numele unui om în capul casei scării ar putea fi caracterizat eventual ca descriind *faptul* că acel om iese din camera sa pe acea scară în acel moment)[32], el nu a dat niciodată exemple şi nici n-a explicat ce fel de fapte avea în vedere. Unii continuatori ai săi, dorind să lege opera sa de cea a lui Hume, din motivele arătate mai sus, au sărit la concluzia că faptele atomare trebuie să se refere la datele senzoriale şi la aşa-zisele *sensibilia*. Aceasta era şi presupunerea lui Russell în prelegerile sale din 1918 asupra *Filozofiei atomismului logic*[33] şi într-un număr de scrieri ulterioare. Dar Wittgenstein însuşi nu s-a angajat pe acest drum, el considerînd, probabil, că problema trebuie soluţionată empiric şi că deci într-un fel ea era sub demnitatea operei sale:

„Este clar că avem un concept al propoziţiei elementare separat de forma ei logică specială. Acolo unde însă putem construi simboluri conform unui sistem, acolo acest sistem este lucrul important din punct de vedere logic şi nu simbolurile izolate ... Dacă cunoaştem pe temeiuri pur logice că trebuie să existe propoziţii elementare, atunci acest lucru trebuie cunoscut de orice om care înţelege propoziţiile în forma lor neanalizată ... *Aplicarea* logicii este cea care decide ce propoziţii elementare există. Logica nu se poate intersecta cu aplicarea ei ... Dacă nu pot indica *a priori* propoziţii elementare, atunci încercarea de a le indica trebuie să ducă la un nonsens vădit"[34].

Este clar că la acest stadiu al evoluţiei sale, Wittgenstein făcea o distincţie netă între sintaxa şi vocabularul ştiinţei, considerînd că prima este cunoscută aprioric în cadrul unui studiu al logicii ca *Principia Mathematica* şi că al doilea este învăţat numai în conexiune cu experienţele particulare. Fără îndoială, încercarea sa de apărare a purităţii formale a logicii era justificată, dar refuzul său de a considera mai îndeaproape problema aplicării logicii este ciudat. Şi tocmai acest refuz duce la doctrina lui curioasă, potrivit căreia în afara logicii nu există necesitate.

Ca şi Frege, Wittgenstein introduce negaţia cu o definiţie avînd caracter de funcţie de adevăr, şi anume spunînd că $\sim P$ este adevărat dacă şi numai dacă P este fals, iar uneori se pare că el consideră

---

[32] *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1,2. 1,2. 14.
[33] *Logic and Knowledge*, ed. R.C. March, pp. 178—281.
[34] *Tractatus*, 5.555, 5.5562, 5.556, 5.5571.

suficientă afirmația că *P* este fals dacă starea de lucruri pe care o zugrăvește nu se realizează[35]. Dar într-un loc, el spune:

„Enunțul negator *(der verneinende Satz)* determină un loc logic *diferit* de cel determinat de enunțul negat. Enunțul negator determină un loc logic prin intermediul locului logic al enunțului negat, prin faptul că îl descrie ca aflat în afara acestui din urmă loc"[36].

Luată în serios, afirmația implică faptul că posibilitatea folosirii unei particule negative depinde în măsură însemnată de incompatibilitatea obiectivă a diverselor stări de lucruri imaginabile. Într-adevăr, deosebirea sau excluderea despre care vorbește aici Wittgenstein este presupusă de construcția enunțurilor negative și deci trebuie să fie o relație independentă de folosirea pe care o dăm unui semn negativ, deși în altă parte el admite că o atare incompatibilitate nu poate să existe. Poate că folosirea vagă a cuvîntului „logic" l-a împiedicat pe Wittgenstein să vadă această inconsistență a sistemului său. Cînd el spune că nu există necesitate în afară de cea a logicii, pare să înțeleagă prin „logică" teoria folosirii pe care o dăm semnelor; dar cînd vorbește despre logica lumii și cînd în particular se referă la poziții în spațiul logic, el pare să înțeleagă ceva ce ar putea fi numit mai adecvat metafizică. Dacă, așa cum sugerează cuvintele sale, există un sistem de alternative în care noi selectăm obiecte în vederea afirmării sau negării ori de cîte ori emitem enunțuri factuale contingente, structura acelui sistem trebuie să cuprindă, fără îndoială, toate principiile de imposibilitate și necesitate care pot fi formulate, dar studiul sistemului nu va constitui acea știință formală restrînsă pe care Frege o numea logică.

Se pare că Wittgenstein era uneori preocupat de neînțelegerile în jurul doctrinei sale asupra necesității logice. Spre sfîrșitul *Tratatului* său, el s-a explicat mai pe larg decît obișnuia:

„Așa cum există numai o necesitate *logică*, tot așa există numai o imposibilitate *logică*. Căci este imposibil ca două culori, de exemplu, să fie într-un același loc în cîmpul vizual, adică este logic imposibil deoarece aceasta este exclus de structura logică a culorii. Să considerăm cum se prezintă în fizică această contradicție. Se prezintă cam în felul următor: o particulă nu poate avea în același timp două viteze, adică nu poate fi în același moment în două locuri, adică particulele din locuri diferite la același moment nu pot fi identice. (Este limpede că produsul logic a două propoziții elementare nu poate fi nici tautologie, nici contradicție. Afirmația că un punct din cîmpul vizual are două culori diferite în unul și același moment constituie o contradicție)"[37].

Criticii au remarcat imediat insuficiența acestei încercări de a prezenta incompatibilitatea culorilor ca un caz al contradicției logice (adică formale), iar în 1929 însuși Wittgenstein a scris în legătură cu acest

[35] *Ibid.*, 2.06, 4.1.
[36] *Ibid.*, 4.0641.
[37] *Ibid.*, 6.375—6.3751.

exemplu: „Deşi nu se pot contrazice între ele, propoziţiile atomare se pot exclude unele pe altele"[38]. Această recunoaştere este fatală pentru doctrina lucrării sale anterioare, dar Wittgenstein se mai afla încă atît de mult sub influenţa utilizării sale vagi a cuvîntului, încît a încercat să prezinte această schimbare ca o reformă a *logicii* şi nu ca o abandonare a tezei sale că în afara logicii nu există nici o imposibilitate.

Dacă reflectăm, este evident că nici un enunţ nu poate atribui o însuşire unui lucru dacă nu exclude prin însuşi acest fapt o anumită altă însuşire. Chiar Spinoza, care credea că nu există decît o singură substanţă, Dumnezeu sau Natura, şi de aceea putea să fie înclinat la estomparea contururilor lucrurilor, a spus că orice determinaţie este o negaţie[39]; s-ar părea că nici un filosof nu a încercat vreodată să vorbească despre o specificare compatibilă cu oricare alta. Mulţi filosofi au scris însă ca şi cum ar fi considerat că opoziţia contrarie a predicatelor ar fi ceva instituit de fiinţele umane fără să se ia în consideraţie natura lucrurilor însăşi. Astfel, P. F. Strawson a spus: „Ceea ce face posibilă inconsistenţa este ··· propria noastră activitate de creare a limbajului prin folosirea lui, determinarea noastră a limitelor aplicării cuvintelor"[40]. Desigur, este adevărat că inconsistenţa cuvintelor este stabilită de uzanţele umane de folosire a cuvintelor; dar determinarea de către noi a limitelor aplicării unui cuvînt general nu este selecţia tuturor lucrurilor individuale la care vom aplica după aceea cuvîntul. Ea este mai curînd selectarea caracteristicilor specifice ce pot fi înfăţişate de către lucrurile la care aplicăm cuvîntul; aceste caracteristici trebuie să fie inconsistente într-un sens nelingvistic. Dacă concepem definiţia ca o fixare a frontierelor (şi tocmai acesta este sensul iniţial al cuvîntului) spaţiul în cadrul căreia operează ea are ca puncte — după cum trebuie presupus — nu indivizi, ci universalii perfect specifice şi care se exclud reciproc.

Deşi Wittgenstein a prezentat în *Tractatus* logica formală, desconsiderînd în mod nefiresc şi derutant aplicaţia ei, el a susţinut acolo ceea ce s-ar putea numi o concepţie absolutistă a adevărurilor logice. Cu alte cuvinte, el vorbea ca şi cum nu exista, şi nu putea să existe, decît un singur sistem de logică, şi anume o versiune simplificată a sistemului prezentat în *Principia Mathematica*. Dar în rîndul unora dintre cei ce s-ar putea numi adepţii săi, accentul pe care îl punea asupra importanţei convenţiilor simbolice a dus curînd la considerarea cu

---

[38] "Some Remarks on Logical Form", *Aristotelian Society, Supplementary Volume*, IX (1929), pp. 162—171, în special p. 168.

[39] *Scrisoarea* 50.

[40] *Introduction to Logical Theory*, p. 9.

simpatie a posibilității unor logici alternative, ca cele propuse de către Post, Łukasiewicz și Heyting. Astfel, îl găsim pe Carnap scriind în 1934:

„*În logică nu există nici un fel de morală.* Fiecare este liber să-și construiască propria sa logică, adică propria sa formă de limbaj, așa cum dorește. Dacă vrea să o discute, tot ce i se cere este să formuleze clar metodele sale și să dea reguli sintactice și nu argumente filosofice. Atitudinea tolerantă pe care o sugerăm aici este, în măsura în care este vorba de calcule matematice speciale, atitudinea împărtășită tacit de majoritatea matematicienilor"[41].

În măsura în care a încurajat cercetarea unor sisteme formale alternative, contribuind astfel la elucidarea structurii sistemelor de logică formală bivalentă acceptate în mod general, această atitudine convențională a avut efecte bune. Pentru cei care concep logica drept un calcul neinterpretat, această atitudine este într-adevăr cea mai indicată. Dar dacă presupunem că logica este legată de limbaj, cum face Carnap, adică presupunem că formulele ei trebuie interpretate ca legi despre negație, conjuncție, universalitate și tot restul, convenționalismul este o filosofie lamentabilă a logicii, deoarece presupune o altă concepție, pe care pretinde că ar respinge-o. Atunci cînd formulăm explicit — așa cum cere Carnap — un șir de reguli sau convenții sintactice, trebuie să recurgem pentru enunțarea lor la un anumit limbaj, iar încrederea în acest limbaj poartă cu sine în mod inevitabil acceptarea unor principii logice care nu sînt stabilite numai prin convenție. De exemplu, pentru exprimarea unei reguli a noului nostru simbolism trebuie să folosim un procedeu de exprimare a universalității, iar de cele mai multe ori ne trebuie și un procedeu de exprimare a dependenței condiționale. Împreună cu acestea, noi considerăm ca garantate principiile logice corespunzătoare; iar cînd ne-am îndeplinit sarcina, nu numim noul sistem o logică în sensul obișnuit dacă acest sistem nu reproduce unele principii pe care le admitem în prealabil[42]. Ca răspuns la observația lui Carnap că în logică nu există nici o morală, putem deci să spunem: (I) că logica în sens propriu constă în esență din legi restrictive despre combinațiile posibile de propoziții și (II) că aceste legi nu pot fi introduse prin convenții stabilite fără să cunoaștem restricțiile logice, tot așa cum legile morale nu pot fi introduse prin convenții stabilite fără să cunoaștem obligațiile morale. Teoria convențională a logicii este realmente ciudat de asemănătoare cu teoria dreptății pe

[41] *Logische Syntax der Sprache*, 1934 (trad. engleză 1937), § 17.

[42] Acest argument împotriva convenționalismului este prezentat în mod amănunțit de către W. V. Quine în eseul său "Truth by Convention", publicat în 1936 în volumul *Philosophical Essays for A. N. Whitehead* și retipărit în *Readings in Philosophical Analysis* (ed. Feigl și Sellars), 1949, pp. 250—273.

baza contractului social, pe care Platon o pune în gura lui Glaucon, în cartea a doua a *Republicii* sale.

În deceniile care au trecut de la apariţia *Tratatului*, concepţiile lui Wittgenstein despre logică au devenit cunoscute pe scară largă, exercitînd o mare influenţă în rîndul filosofilor de orientare pozitivistă sau antimetafizică. În cursul acestui proces de popularizare, doctrina magistrului a suferit în mod inevitabil unele modificări în diverse privinţe, în parte datorită eforturilor depuse de admiratorii săi de a sistematiza declaraţiile sale oraculare şi în parte datorită largii răspîndiri a relatărilor despre doctrina sa orală de mai tîrziu, dar în mare parte şi datorită zelului simplificator al unor persoane pe care le interesa mai mult atacarea metafizicii decît elucidarea teoriei deducţiei. Drept rezultat, a apărut o nouă versiune a convenţionalismului hobbesian, în care nu numai teoremele aritmetice analizate de Frege ci şi toate adevărurile asertabile aprioric sînt caracterizate ca analitice sau logic necesare şi deci ca simple tautologii adevărate prin definiţie, cu alte cuvinte ca produse auxiliare, neinformative ale activităţii umane în cadrul creării regulilor de utilizare a simbolurilor. Uneori însă, cei ce declară că enunţurile necesar adevărate nu ne spun nimic despre lume merg mai departe, afirmînd că formulele tautologice pot fi folosite pentru a ne instrui asupra regulilor lingvistice, ca atunci cînd un adult spune unui copil „Un oculist este un doctor de ochi", vrînd prin aceasta să-l înveţe pe copil cum să folosească cuvîntul — relativ rar întîlnit — „oculist". Şi astfel se susţine de multe ori că emiterea unei formule tautologice este informativă dacă şi numai dacă este luată ca o prescurtare a unei observaţiii despre un limbaj, şi anume a unei observaţii în sensul că regulile limbajului în care ea este formulată sînt de aşa natură încît o fac tautologică.

Orice simplificare filosofică ce ajunge la o popularitate atît de largă ca cea a doctrinei de mai sus trebuie să conţină un adevăr important, adică un adevăr care se cere subliniat în acel moment; în cazul de faţă, este uşor de văzut care este acest adevăr. Orice ajungem să cunoaştem aprioric constituie un adevăr de ordin doi despre relaţiile între propoziţii sau constituie un truism derivat dintr-un asemenea adevăr; şi într-un caz şi în altul, acest adevăr de ordin doi este învăţat prin reflectare asupra semnificaţiei cuvintelor sau altor simboluri. Un animal, bunăoară un cîine, poate cunoaşte eventual — am putea spune — un fapt contingent, de pildă că pe un cîmp se află două oi, dar pare absurd să spunem că un cîine ar putea cunoaşte chiar şi un adevăr atît de simplu al aritmeticii cum este propoziţia că $2 + 2 = 4$; iar motivul nu poate fi acela că toate vieţuitoarele care nu sînt oameni ar fi lipsite de acel gen special de *intuiţie* care, potrivit lui Kant, ne permite să aflăm adevărurile aritmeticii. Numeroase explicaţii eronate

ale cunoașterii apriorice au fost inspirate de ideea platoniciană a contemplației (θεωρία) ca un fel de supraveghere intelectuală în care sufletul poate afla fapte cu privire la obiecte suprasensibile; dacă vrem să ne eliberăm de influența acestor explicații greșite, este fără îndoială important să ne dăm seama de legătura dintre cunoștințele apriorice și folosirea simbolurilor. Dar convenționalismul simplificator al secolului douăzeci a produs alte rezultate, care nu constituie cîtuși de puțin perfecționări ale aparatului nostru intelectual. În special, el a dus la estomparea a două distincții importante.

În primul rînd, adepții acestei concepții admit că termenii „analitic", „aprioric" și „necesar" împrumutați din logică, respectiv din teoria cunoașterii și din metafizică, sînt coextensivi. Fără îndoială, orice propoziție analitică adevărată poate fi cunoscută *a priori* și orice propoziție care poate fi cunoscută *a priori* este necesară. Dar nu este deloc evident că au loc și reciprocele. Dacă înțelegem „analitic" în sensul lui Frege, s-ar putea să existe adevăruri cunoscute *a priori* care nu sînt analitice, deoarece nu decurg din legile logicii formale nici chiar atunci cînd se admit în calitate de noi reguli de transformare anumite definiții explicite. Un exemplu mult discutat este propoziția că nimic nu poate fi în același timp și roșu și verde. Un alt exemplu este propoziția că relația de anterioritate temporală este tranzitivă dar ireflexivă. Mai mult, chiar dacă sîntem siguri că anumite însușiri și relații perceptibile oferă un model ce satisface postulatele unei geometrii abstracte, acest model trebuie să fie și el o mostră de cunoaștere aprioricâ, dar nu analitică. Nu putem arăta în același mod că există adevăruri necesare (adică adevăruri care nu admit alternativă) ce *nu pot* fi cunoscute *a priori*; într-adevăr, producerea unui exemplu ar presupune în mod clar revendicarea unei cunoștințe apriorice. Ne putem însă cel puțin imagina că există asemenea adevăruri. De regulă, admitem că există adevăruri ale matematicii pe care în fapt nimeni nu le cunoaște, și nu pare absurd să emitem sugestia că ar putea exista adevăruri necesare cu privire la calități sau relații nepercepute și pe care nimeni nu le poate cunoaște vreodată deoarece (așa cum ar putea spune Locke) nimeni nu posedă ideile cuvenite.

Situația este și mai rea atunci cînd, așa cum se întîmplă uneori, se presupune că cei trei termeni „analitic", „aprioric" și „necesar" sînt nu numai coextensivi, ci și sinonimi, astfel încît oricare din ei poate fi și un contradictoriu al oricăruia dintre cei trei termeni corespunzători „sintetic", „empiric" și „contingent". Ca exemplu putem lua *definiția* lui A. J. Ayer pentru propozițiile (adică în accepția sa, enunțurile) analitice și sintetice: „O propoziție este analitică dacă validitatea ei depinde numai de definițiile simbolurilor pe care le conține, și este sintetică dacă validitatea ei este determinată prin

faptele de experiență"[43]. Este evident că o asemenea confuzie face ca noțiunea kantiană de adevăr sintetic *a priori* să pară absolut absurdă, deși această noțiune a fost acceptată în epoca noastră de matematicieni de talia lui Frege, Poincaré, Brouwer și Hilbert. Într-adevăr, s-a emis ideea că expresia „sintetic a *priori*" nu este nimic mai mult decît un substitut mistificator pentru „necesar contingent"[44]. Dar aceasta nu este tot. În același timp, teza lui Frege cu privire la caracterul analitic al adevărurilor aritmeticii nu mai poate fi distinsă de banalitatea că aceste adevăruri sînt cunoscute *a priori*. Pînă și aserțiunea pozitivistă că toate adevărurile *a priori* sînt analitice devine o simplă tautologie, și ca atare fără obiect. Întrucît însă pozitiviștii nu se comportă deloc ca și cum doctrina lor fundamentală ar fi o simplă tautologie, se pare că în acest context unii pozitiviști trebuie să comită o eroare în genul celei care în etică a fost numită sofismul naturalist; este vorba de eroarea de a pune în teoria lor semnul de egalitate între cuvinte care sînt de obicei folosite pentru îndeplinirea unor misiuni diferite și de a folosi apoi cuvintele ca și cum între ele nu s-ar fi pus semnul de egalitate.

În al doilea rînd, convenționalismul modern confundă regulile logice cu cele lingvistice într-un mod care duce la erori serioase. Am văzut deja un exemplu de asemenea confuzii într-un citat din Carnap, dar acum trebuie să cercetăm mai îndeaproape această tendință. Cînd filosofii spun că toate adevărurile necesare sînt stabilite prin convenție lingvistică, ei par să aibă în vedere în mod implicit ideea că (așa cum a spus Wittgenstein) lumea este compusă din fapte independente și contingente, iar ceea ce oamenii numesc adevăruri necesare nu sînt decît umbre sau proiecții ale regulilor pe care ei înșiși le-au adoptat pentru a vorbi și a scrie. Influența acestui tablou simplificat este atît de puternică încît convenționaliștii regretă uneori utilizarea cu precumpănire a unuia și aceluiași cuvînt „adevăr" în scopul de a vorbi despre adevăruri contingente și adevăruri necesare. După ei, ar fi mai bine să despărțim în mod clar cele două idei, vorbind în schimb despre fapte și convenții. Dacă se obiectează că echivalarea dintre „necesar" și „convențional" are ceva paradoxal în ea, ei răspund că, aplicat la un adevăr, cuvîntul „necesar" nu exprimă mai mult decît hotărîrea vorbitorului de a menține o anumită formă verbală în toate circumstanțele. Nu avem, spun ei, nici o alternativă la un adevăr necesar *în cadrul limbajului vorbitorului*, dar numai pentru că el însuși și-a limitat astfel limbajul său. Susținînd în plus că (așa cum spunea Wittgenstein) orice necesitate este necesitate logică, ei ajung în mod natural la afir-

[43] *Language, Truth, and Logic* (1936), p. 103.
[44] P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, p. 263.

mația că enunțurile logice sînt enunțuri lingvistice de un anumit fel, și anume enunțuri despre inconsistența lingvistică (sau relații definibile prin referire la această inconsistență lingvistică) traductibile integral dintr-un limbaj într-altul[45]. Condiția privitoare la traducere este pusă în întîmpinarea obiecției că logica nu este presupusă de obicei a trata un anumit limbaj special. După P. F. Strawson:

„Important este să se observe că atunci cînd delimităm aplicabilitatea cuvintelor într-un anumit limbaj și legăm apoi cuvintele din acel limbaj de cuvintele altui limbaj prin intermediul regulilor de traducere, nu este nevoie să delimităm din nou aplicabilitatea pentru al doilea limbaj. Delimitarea este deja trasată. Din această cauză (sau parțial din această cauză), enunțurile logice încadrate într-un anumit limbaj nu sînt numai cu privire la acel limbaj"[46].

Dacă cele spuse mai sus înseamnă că regulile logice sînt reguli pentru toate limbajele posibile, aceasta revine în fapt la a admite că ele nu sînt convenționale și deci nu sînt lingvistice în vreun sens obișnuit al cuvîntului, ci sînt cerințe care trebuie satisfăcute cînd facem ceea ce numim de obicei reguli lingvistice. Uneori însă, filosofii care au această convingere vorbesc despre logica limbajului obișnuit și chiar despre „comportamentul logic" al unor cuvinte din limba engleză ca și cum ar fi angajați într-un fel de filologie apriorică. S-a spus, de exemplu, că atenția, *logic vorbind*, ar fi un concept polimorf, deoarece cuvîntul englez „attend" (a fi atent) poate îmbrățișa multiple activități diferite. Fără îndoială, cuvîntul englez „attend" are într-adevăr numeroase folosiri diferite, dar dacă logica este o știință apriorică ea nu poate revendica dreptul la această descoperire, deoarece existența diverselor accepții ale unui cuvînt constituie un accident istoric. În germană nu avem nici un cuvînt cu același domeniu de aplicare ca „attend", deși germana nu este o limbă cumva mai săracă decît engleza.

Am văzut deja că inconsistența cuvintelor generale presupune incompatibilitatea însușirilor. De aici urmează imediat că necesitatea nu poate fi un simplu produs al regulilor și uzanțelor lingvistice. Desigur, este un accident istoric faptul că sunetele „red", „yellow", „green" și „blue" sînt folosite așa cum sînt folosite în procesul de comunicare de către cei ce vorbesc limba engleză și este un truism că orice limbaj în care putem găsi echivalente exacte ale celor patru cuvinte din engleză trebuie să conțină sunete supuse unor reguli asemănătoare celor valabile în engleză pentru „red", „yellow", „green" și „blue". Dar nu este nici accident istoric și nici truism (cel puțin în sensul peiorativ al cuvîntului) faptul că există un domeniu de nuanțe distincte care pot fi

[45] P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, p. 11.
[46] *Ibidem*, p. 12.

divizate așa cum le divizăm noi prin utilizarea cuvintelor noastre pentru culori. Cel ce acceptă convenționalismul ignoră acest lucru, și astfel ajunge în practică la concepția că cuvintele generale sînt simple denumiri cu denotații multiple. John Stuart Mill a detectat această eroare în opera lui Hobbes și a construit teoria sa asupra conotării în scopul remedierii sale; dar, așa cum se întîmplă adesea în istoria filosofiei, eroarea a apărut într-o nouă travestire. În loc de a spune „Lumea este compusă din indivizi: universaliile țin de limbaj", convenționaliștii moderni spun „Lumea este compusă din fapte: necesitățile țin de limbaj".

Dacă am argumentat corect, prima erezie este implicată în cea de a doua. Dar, în afară de aceasta, este interesant să notăm că a doua erezie poate fi respinsă direct prin considerente în genul celor despre care se admite în mod general că sînt fatale primei erezii. După cum indivizii sînt în esență corelativi la universalii și ca atare sînt de neconceput luați în sine, tot astfel faptele, care sînt contingente în sensul că țin de domeniile unor alternative posibile, sînt în esență corelative cu legile de necesitate sau imposibilitate și ca atare sînt de neconceput fără aceste legi. Argumentul presupune o idee de posibilitate pe care convenționaliștii o ignoră, dar chiar în cadrul propriilor lor presupuneri se poate argumenta că, dacă propozițiile necesare sînt necesare prin convenție, atunci propozițiile contingente sînt și ele contingente, adică nenecesare, prin convenție. Această consecință este inacceptabilă pentru convenționaliști — afară doar dacă ei nu o iau ca o versiune a tezei adevărate în mod banal, după care convenția determină ce forme verbale vor exprima propoziții contingente, iar în acest caz convenționaliștii sînt obligați să interpreteze și antecedentul într-un mod la fel de benign. Într-adevăr, dacă înlăturăm intrepretarea banală, concluzia trebuie să însemne că faptele din care este compusă lumea nu sînt nici necesare, nici contingente în ele însele. Vom vedea mai tîrziu că unii filosofi au susținut o asemenea concepție, dar ei nu se intitulează convenționaliști și au fost atacați de cei ce acceptă acest titlu.

Ideile lui Wittgenstein au avut în rîndul filosofilor o mai mare influență decît în rîndul logicienilor matematicieni. Astfel, în 1936 Tarski scria: „Conceptul de *tautologie* (adică de enunț care «nu spune nimic despre realitate»), ··· mie mi se pare a fi destul de vag. Dar ··· a jucat un rol capital în cadrul discuțiilor filosofice inițiate de L. Wittgenstein și de tot Cercul de la Viena"[47]. Cu puțin timp înainte, Gödel

[47] „Cu privire la noțiunea de consecință logică", articol apărut mai întîi în limba polonă sub titlul „O pojeciu wynikania logicznego" în *Przeglad Filozoficzny*, vol. 39 (1936) p. 58—68; retipărit în engleză în Alfred Tarski, *Logic, Semantics, Metamathem - tics*, 1956, pp. 409—420. Tradus în limba română în vol. *Logică și filozofie* (Ed. politică, 1966, pp. 283—294; Vezi p. 294).

arătase (într-o demonstrație la care vom avea prilejul să ne referim ceva mai încolo) că noțiunea obișnuită de consecință nu coincide cu noțiunea de deductibilitate formală. Avînd în vedere această nouă descoperire, Tarski scria:

„În cadrul oricărei teorii deductive (cu excepția unor teorii extrem de elementare), oricît de mult am completa regulile obișnuite de inferență cu noi reguli pur structurale, se pot construi propoziții care decurg în accepția obișnuită a cuvîntului din teoremele teoriei, fără a fi însă demonstrabile în cadrul teoriei pe baza regulilor de inferență admise. Pentru a obține noțiunea adecvată de consecință, intim legată de noțiunea obișnuită, va trebui să apelăm la metode cu totul diferite și să aplicăm un aparat conceptual cu totul diferit în definirea noțiunii"[48].

Tarski a propus atunci o metodă care, în esență, coincide cu metoda lui Bolzano, deși pe cînd publicase pentru prima oară în legătură cu subiectul în discuție el nu cunoștea nimic despre această parte a operei lui Bolzano.

Însuși Tarski a rezumat după cum urmează explicația pe care o dă relației de consecință:

„Fie L o clasă de propoziții. Înlocuim toate constantele extralogice care intervin în cazul propozițiilor care aparțin lui L cu variabilele corespunzătoare, aceleași constante fiind înlocuite cu aceleași variabile iar constantele diferite cu variabile diferite. În acest mod obținem o clasă L' de funcții propoziționale. Un șir arbitrar de obiecte care satisface orice funcție propozițională a clasei L' se va numi *model* sau *realizare a clasei L de propoziții* (tocmai în acest sens se vorbește de obicei despre modelele unui sistem de axiome ale unei teorii deductive). În particular, dacă clasa L este compusă dintr-o singură propoziție X, modelul clasei L va fi numit de asemenea *modelul propoziției X*.

În acești termeni putem defini noțiunea de consecință logică după cum urmează: *Propoziția X este o* consecință logică *a propozițiilor clasei K dacă și numai dacă orice model al clasei K este totodată un model al propoziției X*"[49].

Ceva mai încolo, el adaugă:

„Putem conveni să numim *contradictorie* o clasă de propoziții în cazul cînd această clasă nu posedă nici un model. În mod analog, o clasă de propoziții poate fi denumită *analitică* atunci cînd orice șir de obiecte constituie un model al ei. Ambele concepte pot fi raportate nu numai la clase de propoziții, ci și la propoziții disparate ... De asemenea, putem arăta ... că sînt analitice acele și numai acele propoziții care decurg din orice clasă de propoziții (în speță, din clasa vidă), iar contradictorii sînt acele și numai acele propoziții din care decurge orice propoziție"[50].

După cum subliniază însuși Tarski, articolul său își propune să dezvolte clar implicațiile vechii doctrine care susține că relația de consecință logică are loc între enunțuri în virtutea formelor lor. Dar felul în care dezvoltă doctrina prezintă unele trăsături curioase care merită să fie menționate.

---

[48] *Ibid.*, p. 286—287.
[49] *Ibid.*, p. 291.
[50] *Ibid.*, p. 292.

În primul rînd, Tarski explică consecința logică prin referire la forma logică ce este exprimată prin constante logice, și nu ține deloc seama de rolul pe care — după cum s-a considerat îndeobște — îl au în această ordine de idei și definițiile. Astfel, după Tarski, „Socrate era bărbat" poate fi caracterizată ca o consecință a celor două propoziții „Socrate era tată" și „Orice tată este bărbat", dar nu ca o consecință numai a primei propoziții; a doua propoziție de mai sus, și anume „Orice tată este bărbat", propoziție pe care Kant ar fi numit-o fără îndoială „analitică", nu este calificată pentru acest titlu în cadrul clasificării lui Tarski, deoarece schema „orice — este ..." nu este satisfăcută de orice pereche de obiecte. După cum se pare, acest rezultat straniu se datorează faptului că Tarski încerca să efectueze analiza sa fără să se refere la regulile de transformare și de aceea nu putea ține cont de definiții decît atunci cînd acestea se prezintă sub forma unor enunțuri universale adevărate.

În al doilea rînd, deși Tarski consideră că relația de consecință are loc numai între propoziții și ca atare încearcă s-o explice cu referire la formele propozițiilor (forme pe care el le numește funcții propoziționale), explicația dată de el nu are un caracter integral sintactic, adică nu ia în considerație numai relațiile reciproce dintre semne, ci implică și noțiunea de satisfacere sau realizare. Conform terminologiei sale din articolul „Conceptul de adevăr", la care ne-am referit într-o secțiune anterioară, acest concept are un rol fundamental în semantică, adică în știința în care considerăm relațiile semnelor față de lucruri și ale lucrurilor față de semne. Spunem că Ion și Petru satisfac condiția „x și y sînt frați" dacă și numai dacă Ion și Petru sînt în fapt frați. Or, de aici rezultă că definiția consecinței logice la Tarski implică o referire la ceea ce are loc în lume. Astfel, ca să considerăm numai cel mai simplu exemplu cu putință, în teoria sa orice propoziție analitică (ce decurge dintr-o clasă oarecare de propoziții) prezintă particularitatea că toate exemplarele de forma sa sînt în fapt enunțuri adevărate. Fără îndoială, această caracteristică aparține oricărei propoziții analitice, dar filosofii ar putea fi surprinși de faptul că această caracteristică trebuie tratată ca definitorie în loc de a fi tratată, dimpotrivă, ca o proprietate rezultantă.

În al treilea rînd, deși Tarski ia ca noțiune centrală, în analiza consecinței, noțiunea de formă logică, la fel ca Bolzano înaintea lui, el nu este capabil să o definească precis, și de aceea conchide:

„În întreaga noastră discuție, un rol fundamental îl joacă împărțirea tuturor termenilor în termeni logici și extralogici. Această împărțire nu este desigur arbitrară. Dacă, de pildă, noi am include printre semnele extralogice semnul implicației sau cuantorul universal, definiția dată noțiunii de consecință ar duce la rezultate care contrazic flagrant accepția obișnuită a termenului. Pe de altă parte, nu cunosc temeiuri obiective care ne-ar permite să tragem o linie de demarcație rigidă între cele două grupe de termeni. Cred că

se pot include în rîndul termenilor logici anumiți termeni pe care logicienii îi consideră de obicei ca termeni extralogici, și aceasta fără consecințe care ar contrazice acut uzanțele statornicite. În cazul extrem, am putea considera toți termenii limbii ca termeni logici. Noțiunea de consecință *formală* ar coincide în acest caz cu noțiunea de consecință *materială*"[51].

Putem adăuga că în acest din urmă caz extrem conceptul de analitic ar coincide cu cel de adevărat.

S-ar putea ca cele trei dificultăți de care ne izbim să fie interconectate. Atîta timp cît nu ne preocupă recunoașterea semnelor logice, se pare că condiția lui Tarski pentru valabilitatea relației de consecință este suficientă, întrucît este evident că ea nu admite nimic ce nu s-ar numi în mod uzual un caz de consecință logică. Dar chiar și în acest stadiu al reflecției noastre, condiția nu pare necesară, deoarece exclude acele cazuri de consecință care depind de conexiune prin definiție. Dacă însă, așa cum considerăm îndeobște, o definiție este o stipulare a faptului că anumite expresii trebuie privite drept consecințe ale anumitor alte expresii, defectul nu este surprinzător. Într-adevăr, pentru a defini relația de consecință astfel încît să asigurăm conexiuni prin definiție ar fi necesar să spunem, printre altele, că o propoziție ar fi o consecință a unei anumite alte propoziții dacă există o stipulare sau o regulă de limbaj după care orice propoziție de forma exemplificată de propoziția dată ar urma să fie considerată ca o consecință a propoziției corespunzătoare de forma ilustrată de cealaltă propoziție. Această măsură nu ar fi mai circulară decît măsura legală că, avînd în vedere un anumit act al Parlamentului, este magazin orice instituție care face parte dintr-o clasă de instituții pentru care ministerul de resort a dat un certificat că ele trebuie considerate magazine. Dar aceasta s-ar îndepărta mult de explicația consecinței la Tarski, căci ea are în vedere numai satisfacerea funcțiilor propoziționale de către obiecte. Mergînd mai departe și considerînd îndoielile lui Tarski în ce privește posibilitatea demarcării precise între semnele logice și cele extralogice și în ce privește concluziile care, după el, ar decurge din admiterea imposibilității de a trage o asemenea linie de demarcație, vedem că toate trăsăturile ciudate ale analizei consecinței la Tarski izvorăsc din presupunerea că relația are loc numai dacă o anumită propoziție universală este adevărată. Într-adevăr, așa cum mulți filosofi care susțin că sînt adepți ai lui Hume au spus că necesitatea cu care un efect urmează cauzei sale nu este nimic altceva decît includerea acestei secvențe particulare într-o asociație naturală constantă, tot așa Tarski susține că necesitatea cu care o consecință rezultă în sensul logic al cuvîntului din premise nu este altceva decît includerea

[51] *Ibid.*, p. 293.

acestei secvențe particulare într-un fapt universal privitor la satisfacerea anumitor funcții propoziționale. Dacă, dînd curs propriilor sale sugestii, lărgim domeniul funcțiilor propoziționale considerate și includem printre factorii constanți din propozițiile noastre nu numai constantele logice tradiționale, ci și toți termenii generali fără restricții, ca, de pildă, „om", „fier", „foc" etc., constatăm că definiția consecinței la Tarski îmbrățișează nu numai consecința logică, ci și orice consecință în virtutea legilor naturii. Pe scurt, definiția echivalează cu o generalizare a teoriei necesității naturale pe bază de constanță. Dar acest rezultat nu poate fi pe placul adepților lui Hume, deoarece el presupune respingerea concepțiilor acestora că între necesitatea logică și cea naturală există o diferență de tip.

În apărarea definiției lui Tarski s-ar putea susține eventual că în cazul unei funcții propoziționale ca *Dacă p, atunci non-non-p* putem ști *a priori* că funcția este satisfăcută de orice șir de obiecte, în timp ce pentru o funcție propozițională ca *Dacă x a luat arsenic, x va muri* nu putem decît să conjecturăm satisfacerea universală a funcției, avînd în vedere temeiuri empirice. Acest lucru este adevărat, însă analiza chestiunii la Tarski nu conține nici un element de natură să explice deosebirea, iar Tarski însuși nu se pronunță în această privință. De asemenea, nu este adecvat ca distincția între diferite tipuri de consecințe să fie pusă în dependență de o distincție între cazurile în care putem și cazurile în care nu putem cîștiga o cunoștință *a priori*. Dimpotrivă, distincția epistemologică trebuie explicată luîndu-se în considerare diferențele de cazuri; or, pînă acum, tocmai acest lucru a lipsit.

Am văzut că convenționalismul presupune nominalismul și că, luat în serios, el poate fi făcut să susțină teza că lumea este alcătuită din fapte care în sine nu sînt nici necesare și nici contingente. De asemenea, am văzut că explicația consecinței la Tarski exclude posibilitatea ca o propoziție să decurgă din alta în virtutea unei definiții explicite și că încercarea lui de a defini relația de consecință prin referire la universalitate sfîrșește prin estomparea distincției dintre legile logicii și legile naturii. Majoritatea logicienilor consideră indezirabile aceste rezultate și, după cum am presupus, ele nu sînt urmărite nici de autorii teoriilor avute în vedere. Există însă cel puțin un filosof, și anume W. V. Quine, care le acceptă integral.

Concepțiile lui Quine se pot rezuma cel mai bine prin propriile sale cuvinte:

„Susțin că este o absurditate, și chiar rădăcina multor absurdități, să vorbim despre o componentă lingvistică și o componentă factuală în adevărul enunțurilor individuale. Luată colectiv, știința are o dublă dependență, față de limbaj și față de experiență; dar această dualitate nu poate fi urmărită în enunțurile științei luate unul cîte unul ...

Totalitatea așa-numitei cunoașteri sau opinii a noastre, începînd de la cele mai obișnuite probleme de geografie și istorie și terminînd cu cele mai profunde legi ale fizicii atomice sau chiar ale matematicii pure și logicii, constituie o construcție umană care vine în contact cu experiența numai de-a lungul marginilor sale. Sau, ca să folosim altă metaforă, totalitatea științei este un cîmp de forțe a cărui condiție la limită o constituie experiența. Conflictul cu experiența la periferie prilejuiește reajustări înăuntrul cîmpului. Dar cîmpul total este într-atît de determinat în mod subiacent de către condițiile sale la limită, de către experiență, încît avem o mare latitudine de alegere a enunțurilor ce urmează să fie reevaluate în lumina unei singure experiențe contrare ... Putem considera un enunț oarecare ca fiind adevărat, indiferent ce s-ar întîmpla, dacă facem reajustări destul de drastice pretutindeni în cadrul sistemului. Pînă și un enunț foarte aproape de periferie poate fi considerat adevărat în pofida experienței recalcitrante, apelînd la factorul halucinație sau amendînd anumite enunțuri de felul celor numite legi logice. Reciproc, datorită acestei situații, nici un enunț nu este imun la revizuiri. Pînă și revizuirea unei legi logice — legea terțului exclus — a fost propusă ca un mijloc de simplificare a mecanicii cuantice; și oare ce deosebire există în principiu între această modificare și modificarea prin care Kepler l-a înlăturat pe Ptolomeu, sau Einstein pe Newton, sau Darwin pe Aristotel? ... Problemele ontologice, potrivit acestei concepții, sînt de aceeași natură ca și problemele științelor naturii. Să considerăm, de pildă, problema dacă clasele trebuie incluse printre entități. Această problemă, așa cum am arătat în altă parte, este problema dacă trebuie sau nu cuantificate variabilele care iau ca valori clase. Carnap a susținut că aceasta nu este o chestiune factuală, ci de alegere a unei forme lingvistice adecvate, de alegere a unei scheme conceptuale convenabile în calitate de cadru al științei. Sînt de acord cu aceasta, dar numai cu condiția ca să admitem același lucru și în ce privește ipotezele științifice în general. Carnap a recunoscut că nu poate asigura un etalon dublu pentru problemele ontologice și ipotezele științifice decît prin admiterea unei distincții absolute între analitic și sintetic: nu mai trebuie să repet că eu resping această distincție"[52].

Aceasta este o încercare de o îndrăzneală lăudabilă de prezentare a unei analize unitare a demersului științific, o încercare deosebit de impresionantă într-un moment cînd mulți filosofi de profesie vorbesc ca și cum interesul pentru filosofia de sinteză ar fi o formă de maladie mintală. Dar, ca și idealiștii absolutiști, ale căror moduri de gîndire le-a adaptat la empirism, Quine este și el prea tolerant față de paradoxuri și prea suspicios față de bunul simț. Așa cum am observat într-o secțiune anterioară, el respinge nu numai întreaga teorie a modalității, ci și noțiunile de propoziție, atribut și relație. Odată cu acestea dispare și noțiunea de semnificație, deoarece ea este legată prin tradiție de referirea la enunțuri analitice. Pentru Quine, această eliminare nu pare un sacrificiu, ci, dimpotrivă, o înlăturare a unor prostii primejdioase. În ochii altora însă, ea se asemuiește cu actul unui căpitan care temîndu-se ca vasul său să nu se scufunde încearcă să-l ușureze de povară, aruncînd busola peste bord. Fără îndoială, Quine are dreptate să se declare nesatisfăcut de propunerea ca un enunț să fie făcut adevărat

---

[52] "Two Dogmas of Empiricism", publicată inițial în *The Philosophical Review*, 1951; retipărită cu unele modificări în *From a Logical Point of View*, pp. 20—46, în special 42—43 și 45—46.

numai pe baza regulilor lingvistice. În adevăr, a vorbi despre crearea adevărurilor este oarecum absurd. Doctorul Zamenhof a inventat regulile unui limbaj în care se pot construi o infinitate de propoziţii noi, ca de pildă *Ĉiu patro estas viro,* dar chiar şi cei mai pasionaţi admiratori ai operei sale, afară doar dacă filosofia proastă nu i-a corupt, nu pretind că Zamenhof a creat o infinitate de adevăruri noi. Este însă greşit să presupunem că, deoarece nici un enunţ nu devine adevărat numai pe bază de reguli lingvistice, urmează că orice enunţ trebuie să se raporteze la experienţă în acelaşi mod. Admiterea acestui lucru înseamnă acceptarea tezei de bază a convenţionalismului, şi anume că lumea este alcătuită din fapte fără necesităţi. Dacă considerăm cu toată candoarea evidenţa ce ne stă la dispoziţie, trebuie să admitem că afirmaţia că 2 + 2 = 4 se deosebeşte nu numai ca grad, ci şi ca gen de afirmaţia că Everestul este mai înalt decît Mont Blanc. Geografia şi matematica pura sînt într-adevăr amîndouă părţi ale unei mari construcţii edificate de umanitate, dar ele nu sînt părţi de acelaşi fel.

Faptul care pledează cel mai mult în favoarea tezei lui Quine este acela că numeroase enunţuri de universalitate nemărginită par să oscileze în cadrul teoriei noastre a cunoaşterii între un statut empiric şi unul aprioric. Destul de recent, s-a descoperit în mod empiric că fierul poate fi magnetizat; şi totuşi, un fizician modern, întrebat dacă ar concepe posibilitatea abandonării acestei generalizări, s-ar putea să se simtă pus în încurcătură şi să răspundă că ar înclina oarecum să trateze această chestiune ca ceva dincolo de chestiunile empirice. Numeroase cazuri de acest tip au fost discutate de către F. Waismann, care a propus în mod independent o concepţie despre ştiinţă oarecum asemănătoare cu cea a lui Quine[53], iar unele dintre exemplele cele mai interesante pe care le dă sînt împrumutate din vorbirea preştiinţifică cotidiană. Este oare enunţul „Vedem cu ochii noştri" o generalizare empirică sau este un adevăr pe care îl putem descoperi reflectînd asupra semnificaţiilor cuvintelor „a vedea" şi „ochi"? Nu putem răspunde la o asemenea întrebare dacă nu stabilim ce uzanţă a rămas pînă acum nedecisă. De cele mai multe ori, noi folosim satisfăcător termenii generali pe baza unor analogii, aşa cum judecătorii rezolvă cazurile uzuale după dreptul cutumiar; dar cînd unul dintre noi este chemat să dea o decizie cu privire la aplicabilitatea unui cuvînt într-o situaţie mai ieşită din comun, atunci, asemenea unui judecător care nu are nici un precedent după care să se ghideze, el trebuie în fapt să legifereze. Cu înclinarea lor spre ordine, filosofii au refuzat de multe ori să recunoască aceste fapte şi au vorbit despre limbile naturale ca şi

[53] "Analytic-Synthetic", *Analysis,* X (1949), pp. 25–40; XI (1950–1951), pp. 25–38, 49–61, 115–124; XIII (1953), pp. 73–89.

cum acestea ar fi sisteme de reguli şi definiţii, nu mulţimi de uzanţe. Dar pentru fiinţe de felul nostru este esenţial ca limbile noastre să se dezvolte aşa cum se întîmplă efectiv. Nu este un defect al limbii noastre că nu am decis dacă cuvîntul „ochi" înseamnă propriu-zis un organ al vederii sau un obiect de o anumită formă şi compoziţie chimică ce ar putea cumva să nu aibă nimic de-a face cu văzul. Atîta timp cît găsim numai fapte ca cele de care am dat pînă acum, le putem da o descriere adecvată fără a face vreo alegere între aceste alternative. Cuvîntul „ochi" nu este desigur lipsit de semnificaţie. Dar semnificaţia sa nu este determinată atît de complet cum ar putea fi, aşa că mai este loc pentru o legiferare ulterioară, dacă dezvoltarea ştiinţei ar cere-o sau ar sugera-o. Un exemplu similar de complexitate a folosirii obişnuite a cuvintelor îl dă enunţul „Pisoii sînt puii pisicilor". Acceptăm că putem recunoaşte pisoii fără nici o dificultate la simpla lor apariţie, şi totuşi înclinăm să spunem că semnificaţia cuvîntului „pisoi" implică faptul de a fi pui de pisică. Dacă s-ar găsi ceva care să arate exact ca un pisoi dar despre care să putem arăta că nu este pui de pisică, ar fi nevoie de adoptarea unei decizii pe care nimeni n-a găsit-o necesară pînă în clipa de faţă.

Un caz curios de specificare suplimentară a semnificaţiei în ultimele cîteva secole poate fi remarcat de către orice cititor modern care studiază minuţios argumentul prin care Toma d'Aquino încearcă să demonstreze teza că după învierea din morţi nu va mai fi nevoie de hrană (*quod in resurgentibus non erit usus ciborum*)[54]. Mai întîi, el spune că după ce viaţa coruptibilă va lua sfîrşit, nu va mai fi nevoie de hrană pentru înlocuirea materialului pierdut în cursul corupţiunii. Apoi, el subliniază că hrana va fi inutilă pentru creştere după resurecţie, deoarece fiecare va creşte la mărimea cerută (*in debita quantitate*). Iar apoi, îmboldit poate de considerarea propriei sale înfăţişări, el continuă observînd că a presupune că după înviere va mai avea loc consumare de hrană înseamnă a tăgădui ordinea bună a providenţei, căci un om care mănîncă fără a pierde nimic prin corupţiune ar creşte în proporţii nemăsurate (*perveniet ad immoderatam quantitatem*). Într-adevăr, dacă după învierea din morţi un om continuă să mănînce în tot cursul vieţii sale infinite, trebuie să presupunem că el va creşte la infinit (*oportet dicere quod corpus hominis resurgentis in infinitum augeatur*). Dar aceasta, spune el, este imposibil. Avem aici un argument care pînă la un anumit punct este condus cu rigoare ştiinţifică. Dar dacă îl considerăm cu toată seriozitatea în contextul ştiinţei moderne, teza lui Toma d'Aquino pare absurdă. Dacă are sens să vorbim despre un corp reînviat aşa cum vorbeşte el, trebuie să aibă sens şi

[54] *Summa contra Gentiles*, IV, 83.

să cercetăm ce se petrece în timpul mişcărilor voluntare ale acestui corp. Evident, trebuie să se producă şi contracţii musculare. Dar aceasta presupune oxidarea unor hidraţi de carbon şi un consum corespunzător de ţesut muscular, dacă pierderea nu este recuperată prin hrană, ceea ce Toma refuză să admită. Mai general, un corp resuscitat, de felul celui descris de Sf. Toma, ar fi un *perpetuum mobile* ce funcţionează contrar legilor termodinamicii. La aceasta s-ar putea răspunde eventual că corpurile resuscitate nu sînt supuse legilor naturii pe care omul le-a descoperit ca aplicîndu-se la corpurile coruptibile. Dar la acest punct devine clar pentru cei mai mulţi dintre noi că nu mai concepem aceste legi ale naturii ca generalizări pur empirice ce ar putea fi abandonate fără să abandonăm şi noţiunea de corp organic. În ştiinţa noastră, şi deci şi la nivelurile mai evoluate ale limbajului nostru, ele sînt acum legate între ele prin teoria metabolismului ; iar dacă cineva spune că ar exista un organism viu fără procese metabolice, ne simţim înclinaţi să spunem că el combină cuvintele într-un mod lipsit de sens.

Analiza humeistă a legilor naturii, care a fost pînă de curînd dogma empiriştilor, a provenit dintr-o teorie imagistă a semnificaţiei. Hume a remarcat foarte just că este întotdeauna posibil să ne imaginăm contradictoria oricărei presupuse legi a naturii şi a conchis pe această bază că nici o astfel de lege nu poate fi o lege a necesităţii obiective. Exponenţii de mai tîrziu ai doctrinei sale, care au considerat că semnificaţia este determinată întotdeauna de convenţii iniţiale, atrag atenţia asupra faptului că negaţia unei presupuse legi a naturii nu este niciodată o autocontradicţie formală şi nici nu este reductibilă la o atare autocontradicţie care să nu presupună legea însăşi. Nici unul din aceste argumente nu demonstrează ceea ce are de demonstrat. Desigur, este adevărat că ne putem imagina, în sensul strict al acestui cuvînt (adică ne putem reprezenta cu ochii minţii), oameni care trăiesc la nesfîrşit fără să se hrănească. Dar aceasta este neconcludent, deoarece nu discutăm despre facultăţile noastre imaginative. Este adevărat şi faptul că propoziţia „Omul va trăi de-a pururi fără hrană" nu prezenta vreun defect lingvistic evident înainte de a se fi dezvoltat fiziologia, şi că, pînă şi acum, dacă hotărîm un timp să ne concentrăm atenţia asupra contextelor în care am învăţat iniţial cuvintele componente, putem da un anumit sens acestui comentar. Dar nici aceasta nu este concludent, deoarece se poate spune că o remarcă are sens numai pentru că nu este exclusă de vreo regulă de întrebuinţare recunoscută.

La orice moment dat, semnificaţiile cuvintelor folosite sînt fixate prin doi factori, şi anume (I) relaţiile lor cu trăsăturile perceptibile ale anumitor situaţii care provoacă folosirea lor şi (II) relaţiile lor

reciproce în cadrul mecanismului limbii noastre. Filosofii de tradiție empiristă și-au îndreptat uneori atenția exclusiv la relațiile de primul gen, dar avem multe cuvinte care nu intră în asemenea relații, iar pentru toate cuvintele (de ex. chiar pentru cuvintele care desemnează culori), relațiile de al doilea gen prezintă o importanță cel puțin tot atît de mare. Încă înaintea evoluției științei, limbajul nostru era o structură complexă, care avea contact cu experiența numai în anumite locuri; dar pe măsură ce știința se dezvoltă, legăturile interne devin din ce în ce mai complexe și apar cuvinte noi, ca „electron" și „genă", care se îndepărtează mult de experiență dar nu sînt neapărat foarte depărtate de întreaga realitate. Scopul acestei restrîngeri a structurii interne a unei limbi este de a o face să corespundă mai bine lumii. Atîta timp cît putem construi liber propoziții ca „Omul va trăi în veci fără hrană", veșmîntul lingvistic pe care l-am croit lumii este prea larg, și, asemenea unor buni croitori, trebuie să intrăm cu foarfecele. Această ajustare deliberată, la care s-a recurs numai în ultimele cîteva secole, este metoda științei empirice, iar recunoașterea particularității ei trebuie să înlăture confuziile serioase iscate în jurul necesității și limbii.

Quine merge mult prea departe cînd încearcă să abolească distincția dintre adevărurile contingente și cele necesare. Pe de o parte, enunțurile istoriei și geografiei rămîn întotdeauna contingente, deoarece ar fi zadarnic să excludem alternativele printr-o legiferare de ordin lingvistic; iar pe de altă parte, enunțuri ca „Nimic nu este în același timp roșu și verde" sînt în mod necesar adevărate de la bun început, deoarece ele sînt garantate de regulile urmate de la bun început în distingerea culorilor. Dar nu întotdeauna este ușor să determinăm statutul propozițiilor de universalitate nemărginită pe care le formulăm în cadrul științelor empirice. Atîta timp cît sîntem gata să admitem că una din aceste propoziții poate fi infirmată, nu putem pretinde că cunoaștem în mod aprioric necesitatea ei. Dacă acceptăm vreodată o atare propoziție fără nici o rezervă, atunci noi revendicăm totodată o asemenea cunoaștere *a priori*. Dar aici trebuie să fim gata să distingem cazurile după cunoștințele necesare. Dacă decidem pur și simplu să privim fierul ca magnetic prin definiție, excludem posibilitatea simplei utilizări a cuvîntului „fier" pentru orice metal nemagnetic, dar în felul acesta noi nu sporim înțelegerea noastră a conexiunilor lumii fizice. Dacă însă introducem această nouă specificare a semnificației cuvîntului „fier" numai pentru a distinge fierul de un alt metal cu care în caz contrar s-ar confunda, noi facem ca enunțul „Fierul este magnetic" să fie chiar inutil în scopurile inferenței. Dacă, pe de altă parte, atunci cînd sîntem în măsură să recunoaștem satisfăcător fierul fără a-l supune unei testări pentru această proprietate, noi reușim să deducem această proprietate dintr-o teorie asupra constituției fierului, teorie

ce îmbrățișează nu numai un număr de alte generalizări despre fier, ci constituie în sine o parte integrantă a unei teorii mai largi despre substanță în general, avem dreptul să considerăm că am dobîndit un mare spor de cunoaștere. În orice caz însă, putem fi în stare să spunem că generalizarea noastră fără restricții se transformă datorită evoluției limbii într-un truism garantat de un principiu admis al conexiunii necesare. Logica, așa cum am încercat s-o prezentăm în cadrul secțiunii noastre de logică modală, este teoria acestei conexiuni necesare — nu teoria tuturor conexiunilor numeroase care au loc între diverse universalii, ci teoria acelui gen de conexiune în genere, și, ca atare, ea trebuie să ocupe o poziție unică în analiza pe care o facem științei.

Quine recunoaște că logica ocupă un loc special în rîndul științelor, dar insistă asupra faptului că și logica este pasibilă de revizuiri:

„Reevaluarea unor enunțuri atrage după sine reevaluarea altora, din cauza interconexiunilor lor logice, legile logice fiind la rîndul lor pur și simplu anumite enunțuri noi ale sistemului, anumite elemente noi ale cîmpului. Reevaluarea unui enunț ne obligă la reevaluarea altora, care pot fi enunțuri legate logic cu primul sau pot fi enunțuri despre conexiunile logice înseși"[55].

Iată o mostră nefericită de egalitarism. Într-adevăr, principiile fără de care nu putem concepe nici un sistem așa cum îl descrie el sînt în mod evident îndreptățite la o analiză separată. Fiind presupuse de însuși conceptul de sistem, ele sînt cel puțin absolute *a priori*, orice s-ar spune despre conținutul unui anumit sistem la un moment dat.

Analiza corectă a științei impune admiterea faptului că, dacă facem distincție între lume și acele trăsături ale limbajului care sînt create de om, conexiunile necesare aparțin lumii în nu mai mică măsură decît faptele contingente. Din păcate, teoria convenționalistă a necesității, derivată din opera lui Wittgenstein, are o influență atît de puternică, încît pînă și K. R. Popper (care în general nu este receptiv la influențe provenite din această sursă) a scris:

„Spre deosebire de Kneale, consider că «necesar» este un simplu cuvînt, o etichetă care ne permite să deosebim universalitatea legilor de universalitatea «accidentală». Desigur, orice altă etichetă ar fi tot atît de potrivită, deoarece aici nu intră prea mult în joc necesitatea logică. Sînt în mare măsură de acord cu spiritul parafrazei lui Wittgenstein la Hume: «Nu există necesitatea ca un lucru să se întîmple pentru că s-a întîmplat un alt lucru. Nu există decît necesitate logică»"[56].

În altă parte însă, el a scris:

„Un enunț poate fi caracterizat ca necesar în mod natural sau fizic dacă și numai dacă este deductibil dintr-o funcție propozițională care este satisfăcută în toate lumile

[55] *From a Logical Point of View*, p. 42.
[56] *The Logic of Scientific Discovery*, (1959), p. 438.

care se deosebesc de lumea noastră, dacă în genere se deosebesc, numai în ce privește condițiile inițiale"[57].

Aceasta pare să însemne că o lege naturală are loc pentru toate lumile *posibile* care conțin exemplificări ale aceloraşi atribute şi relații ce sînt ilustrate în lumea actuală şi numai pe ele. Dar Popper compară definiția sa cu definiția adevărului analitic la Tarski, fără să observe că atunci cînd vorbim despre adevăr în toate lumile posibile cu aceleaşi trăsături care revin, noi introducem un element radical nou, şi anume tocmai ceea ce urmărește apărătorul necesității obiective. Nici o necesitate, indiferent dacă este logică sau naturală, nu poate fi redusă — cum pare să creadă Popper — la universalitatea nudă, deoarece ne putem închipui că pînă şi o propoziție nemărginit universală trebuie să fie contingent adevărată. Dar nu se poate ridica nici o obiecție împotriva unei definiții a necesității ca adevăr în toate luminile posibile, deoarece particularitatea conceptului ce urmează a fi definit este păstrată aici de cuvîntul modal „posibil". Este clar că universalitatea cu care ceva are loc chiar şi în lumi diferite de lumea actuală nu poate fi doar contingentă.

Nu propunem însă ca noțiunea de necesitate să fie definită în acest mod, ci propunem ca noțiunea mai potrivită de cuprindere (involution) să fie recunoscută ca un concept fundamental în descrierea naturii şi chiar şi în explicarea funcționării limbajului obişnuit. Dacă noțiunea are într-adevăr acest rol, teoria ei trebuie să ocupe un loc privilegiat în rîndul științelor. În ultimele două capitole ale acestei cărți vom avea prilejul să considerăm din nou relația acestei teorii față de cercetările numite matematice, iar rezultatul analizei va fi o înțelegere mai clară a importanței sale.

[57] *Ibidem*, p. 433.

XI

FILOSOFIA MATEMATICII DUPĂ FREGE

1. *Paradoxurile teoriei mulțimilor*

Încă din 1895, Cantor a descoperit că teoria mulțimilor creată de el conținea o antinomie. Este vorba de paradoxul publicat doi ani mai tîrziu de către Burali-Forti, privind ordinalele transfinite pe care nu le-am analizat atunci cînd am schițat sistemul lui Cantor. După aceea, în 1899, Cantor a descoperit acel paradox despre mulțimi, mai simplu și fundamental, care poartă astăzi numele lui. Să presupunem că S este mulțimea tuturor mulțimilor. Conform propriei sale teoreme despre mulțimile putere, $\overline{\overline{\mathcal{U}S}} > \overline{\overline{S}}$. Dar întrucît $\mathcal{U}S$ este o mulțime de mulțimi (și anume mulțimea tuturor submulțimilor lui S), ea trebuie să fie o parte a mulțimii tuturor mulțimilor, adică a lui S. Iar de aici rezultă că $\overline{\overline{\mathcal{U}S}} \leqslant \overline{\overline{S}}$, ceea ce contrazice rezultatul pe care îl obținusem mai sus.

Fără îndoială, modul naiv în care Cantor asuma existența mulțimilor avea ceva defectuos în el, dar abia în 1903 dificultatea a devenit cunoscută pe scară largă. În acel an, Frege a publicat volumul doi din *Grundgesetze*, cu un post-scriptum (datat octombrie 1902) care începea astfel:

„Cu greu i s-ar putea întîmpla unui om de știință ceva mai de nedorit decît zdruncinarea uneia din temeliile edificiului său, după ce lucrarea sa a fost încheiată.

În această situație m-am găsit pus în urma unei scrisori a domnului Bertrand Russell, pe cînd tipărirea acestui volum se apropia de sfîrșit. Este vorba de legea mea fundamentală (V). Nu mi-am închipuit niciodată că această lege ar fi tot atît de evidentă ca și celelalte legi fundamentale, ceea ce de fapt s-ar și cere pentru o lege logică. Așa că, în prefața la volumul I, p. VII, am indicat această slăbiciune. Aș fi renunțat bucuros la acest fundament dacă aș fi cunoscut un înlocuitor oarecare al lui. Chiar și astăzi, nu văd cum ar putea fi întemeiată științific aritmetica și cum ar putea fi concepute numerele ca obiecte logice și supuse analizei dacă nu este permis — cel puțin în mod condiționat — să trecem de la un concept la extensiunea acestuia. Pot eu oare să vorbesc despre extensiunea unui concept, a unei clase? Iar dacă nu, cum sînt recunoscute excepțiile? Putem oare conchide întotdeauna, pe baza faptului că extensiunea unui concept coincide cu extensiunea altuia, că fiecare obiect care cade sub primul concept cade și sub al doilea? Aceste probleme au fost ridicate de comunicarea domnului Russell.

Solatium miseris, socios habuisse dolorum. Această consolare, dacă este cumva o consolare, îmi aparține și mie; într-adevăr, toți cei ce au făcut uz în demonstrațiile lor de extensiuni ale conceptelor, de clase, de mulțimi, sînt în aceeași situație cu mine. Aici nu

este pus în joc modul meu special de demonstrație, ci posibilitatea unei fundări logice a aritmeticii în general.

Dar să ne întoarcem la problemă! Domnul Russell a descoperit o contradicție care poate fi acum prezentată.

Nimeni nu va dori să afirme despre clasa oamenilor că este un om. Avem aici o clasă care nu își aparține ei înșăși. Într-adevăr, spunem că ceva aparține unei clase cînd cade sub conceptul a cărui extensiune este tocmai această clasă. Să considerăm acum conceptul *Clasa care nu își aparține ei înșăși*. Extensiunea acestui concept, dacă putem vorbi despre ea, este, așadar, clasa claselor care nu își aparțin lor înseși. O vom numi prescurtat clasa K. Ne întrebăm acum dacă această clasă K își aparține ei înșăși. Să admitem mai întîi că își aparține. Dacă ceva aparține unei clase, atunci cade sub conceptul a cărui extensiune este această clasă. Așadar, dacă clasa noastră își aparține, ea este o clasă care nu-și aparține. Prima noastră presupunere conduce deci la o contradicție. Să presupunem acum că clasa noastră K nu-și aparține ei înșăși; atunci, ea cade sub conceptul a cărei extensiune este ea însăși și deci își aparține. Din nou, o contradicție!"[1].

În același an, publicîndu-și cartea *Principles of Mathematics*, Russell a dat propria sa expunere a contradicției, iar doi ani mai tîrziu J. Richard a anunțat un alt paradox, care este deosebit de interesant deoarece imită procedeul diagonalei al lui Cantor.[2] Să considerăm mai întîi toate funcțiile zecimale definibile printr-un număr finit de cuvinte. Deși formează o mulțime infinită, ele pot fi ordonate astfel încît există o primă fracție, o a doua și așa mai departe. Într-adevăr, noi putem sorta fracțiile în grupe după numărul de cuvinte folosite în definirea lor, iar în cadrul acestor grupe le putem aranja în ordinea alfabetică a definițiilor respective. Dar odată astfel aranjate, putem defini o fracție zecimală spunînd că a n-a sa cifră este succesorul imediat (în ordinea naturală a cifrelor) al celei de-a n-a cifre din a n-a fracție a șirului, sau este 0 dacă a n-a cifră a celei de-a n-a fracții este 9. Evident, această nouă fracție nu coincide cu nici una din șirul dat, și totuși ar trebui să fie inclusă deoarece este în mod cert definită printr-un număr finit de cuvinte.

Încercînd să iasă din situația foarte nesatisfăcătoare pe care i-o semnalase Russell, Frege a analizat mai întîi sugestia că ar putea exista concepte cărora nu le corespund clase. Dacă conceptul unei clase care nu este un membru propriu al său ar fi de acest gen, paradoxul lui Russell ar dispare de la sine, căci atunci nu ar mai exista o clasă a tuturor claselor care nu sînt proprii lor membri. Dar Frege nu putea să se împace cu această inovație revoluționară și a încercat în schimb să evite contradicția modificînd a cincea axiomă din sistemul său, axiomă care-i trezise întotdeauna unele suspiciuni. El a propus acum ca două concepte să fie caracterizate ca avînd aceeași extensiune dacă și numai dacă fiecare obiect care cădea sub primul *dar nu era el însuși exten-*

[1] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, II, Band, Nachwort.

[2] „Les Principes de mathématiques et le problème des ensembles", *Revue générale des sciences*, XVI (1905), p. 541; retipărit în *Acta Mathematica*, XXX (1906), p. 295.

siunea primului cădea şi sub al doilea, şi reciproc. Într-un apendice la *Principles of Mathematics,* Russell recomanda această propunere unei analize serioase; dar el nu a apelat la ea în celelalte scrieri ale sale, pesemne pentru că în urma unei examinări mai minuţioase propunerea l-a nemulţumit, iar logicienii de mai tîrziu au demonstrat într-adevăr că această modificare nu este suficientă pentru a elibera de orice contradicţii sistemul lui Frege[3].

Cînd a avut răgazul să se oprească mai mult asupra problemei, Russell a ajuns la concluzia că prima propunere a lui Frege era mai bună. Russell considera că există unele funcţii propoziţionale care nu determină clase veritabile, iar problema care sta în faţa logicianului era de a stipula reguli pe baza cărora aceste funcţii *nepredicative,* cum le-a numit el, să poată fi distinse de celelalte funcţii. Contradicţiile păreau să rezulte din faptul că logicienii au admis în mod imprudent clase care, într-un mod foarte curios, se dovedeau a fi *autoreproductive.* Poate că asemenea monstruozităţi ar fi fost excluse prin limitări speciale ale utilizării notaţiei pentru clase, dar Russell înclina puternic să creadă că problema nu putea fi niciodată rezolvată integral atîta timp cît toate clasele nu ar fi fost eliminate din teoria logică în acelaşi mod în care infiniţii mici fuseseră eliminaţi din teoria calculului diferenţial; ca atare, el considera că trebuie neapărat să se studieze cît de mare este acea porţiune a matematicii ce ar putea fi prezentată fără să recurgem la o notaţie pentru clase[4].

Dacă simbolismul lui Frege pentru logică ar fi fost acceptat în mod general, eliminarea referirilor la clase ar fi fost un remediu efectiv pentru maladia paradoxurilor de care sufereau matematicile pe atunci. Într-adevăr, distincţia funcţiilor după niveluri, introdusă de Frege, face imposibilă în scrierea sa reproducerea unor paradoxuri despre funcţii, analoage contradicţiilor lui Cantor şi Russell cu privire la clase. Dezastrul la care a ajuns se datora de fapt indulgenţei cu care şi-a permis să recurgă la o notaţie pentru clase fără distincţii după nivele, ca un procedeu pentru evitarea complicaţiilor propriei sale teorii asupra funcţiilor propoziţionale. Acesta este un aspect foarte important, la care va trebui să revenim, dar deocamdată este suficient să notăm că atunci cînd Russell a venit cu teoria sa „fără clase", el descoperise deja un paradox care putea fi folosit pentru a arăta că referirea la clase nu era unica sursă a dificultăţilor. În locul clasei despre care presupunem că ar conţine toate clasele care nu sînt proprii lor membri, să considerăm proprietatea de a fi o proprietate care nu

[3] W. V. Quine, "On Frege's Way Out", *Mind,* N.S. LXIV (1955), pp. 145—159.

[4] „On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society,* IV (1906), pp. 29—53.

se exemplifică pe ea însăşi. Dacă această proprietate se exemplifică pe sine, atunci ea nu se poate exemplifica pe sine; iar dacă nu se exemplifică pe sine, atunci ea trebuie să se exemplifice pe sine. Este clar că natura dificultăţii este aceeaşi ca în paradoxul iniţial, şi totuşi aici nu se face nici o referire la clase.

Cînd Russell şi-a publicat sugestia sa după care unele funcţii propoziţionale ar fi nepredicative, Henri Poincaré era angajat în urmărirea ostilă a tentativelor lui Peano şi ale adepţilor acestuia de a explica raţionamentul matematic prin metodele logicii simbolice[5]. El susţinea că sursa miracolului matematic este inducţia matematică şi că aceasta depinde de intuirea posibilităţii unei recurenţe infinite, adică de ceva care niciodată nu va putea fi redus la vreo regulă formală. Descoperind un nou oponent în acest domeniu, el a produs în mod prompt un alt articol, destinat să arate că paradoxurile rezultau dintr-o înţelegere greşită a matematicii. Acceptînd distincţia russelliană dintre funcţii propoziţionale predicative şi nepredicative, el susţinea că adevărata explicaţie a deosebirii dintre ele trebuia găsită în nota lui Richard din anul precedent. După ce îşi expunea paradoxul, Richard continua prin a spune că de fapt nu există nici o contradicţie, întrucît mulţimea numerelor zecimale definibile printr-un număr finit de cuvinte nu putea fi de fapt concepută ca avînd un element definibil numai pe baza referirii la întrega mulţime. Generalizînd pe această bază, Poincaré scria: „Ainsi les définitions qui doivent être regardées comme non-prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux" [Aşadar, definiţiile care trebuie privite ca nepredicative sînt cele ce conţin un cerc vicios]. În literatura de mai tîrziu, expresia „nepredicativ" (sau „impredicativ") a fost utilizată adesea ca şi cum ar fi *definită* prin această remarcă, cu alte cuvinte ca şi cum „definiţie nepredicativă" ar fi echivalent cu „definiţie care urmăreşte să distingă un obiect aflat sub un concept prin intermediul unei referiri la totalitatea obiectelor posibile care cad sub acel concept"[6]. Dar din context rezultă clar că Poincaré nu intenţiona decît să *explice* de ce unele expresii avînd aparenţa unor definiţii nu reuşesc să definească nimic. De asemenea, este clar că după părerea sa cercul vicios care dădea naştere paradoxurilor din teoria mulţimilor era de o natură deosebită, el fiind legat de încercarea de a trata o mulţime infinită ca un întreg desăvîrşit. Într-adevăr, el continua spunînd: „Il n'y a point d'infini actuel. Les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction",

[5] "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, XIII (1905) pp. 815–835; XIV (1906), pp. 17–34 şi 294–317. Ciclul de articole este retipărit cu unele modificări în *Science et Méthode*.

[6] Vezi, de exemplu, A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 248.

[Nu există infinit actual. Cantorienii au uitat acest lucru și au căzut în contradicție].

Într-un răspuns publicat în același an, Russell a admis că paradoxurile se datorau unor cercuri vicioase și a stipulat ca principiu în vederea evitării unor atare cercuri vicioase că „orice implică totalitatea unei colecții nu trebuie să fie un element al colecției". Dar el spunea că Poincaré nu aprecia la modul cuvenit dificultățile aplicării unui atare principiu și că Poincaré se înșela presupunînd că sursa dificultății ar fi o doctrină greșită a infinitului introdusă de Cantor. Russell însuși credea că antinomiile teoriei mulțimilor trebuie să fie mai curînd de natură logică decît matematică (indiferent de sensul în care matematicul ar putea fi deosebit de logic), întrucît ele erau în esență de același gen ca vechiul paradox al lui Epimenide (sau paradoxul mincinosului); totodată, Russell considera demn de notat faptul că cercul vicios din acel exemplu fusese cunoscut încă în evul mediu, după cum arăta un articol despre *Insolubilia* din *Dicționarul de filosofie și psihologie* al lui Baldwin[7].

Aceste schimbări au dus la o resuscitare a interesului pentru paradoxurile logice de toate genurile, iar în 1910 Mincinosul lui Eubulide a fost onorat printr-un tratat întreg, *Der Lügner, Theorie, Geschichte und Auflösung*, de A. Rüstow. Printre noile paradoxuri inventate în acea perioadă sau la scurt timp după aceea, cele mai cunoscute sînt probabil paradoxurile lui Berry și Grelling. Paradoxul lui Berry privește *cel mai mic număr întreg nedenumibil în mai puțin de douăzeci și șapte silabe*. Deși pare evident că orice nume al acestui întreg trebuie să conțină cel puțin 27 silabe, cuvintele de mai sus, tipărite cursiv, oferă un nume care conține numai 26 silabe. Paradoxul lui Grelling are de-a face cu un cuvînt nou inventat. Unele adjective ca „scurt" și „român" se aplică lor înșeși, altele ca „lung" și „german" nu se aplică. Să numim adjectivele din a doua grupă *heterologice*. Este oare heterologic însuși adjectivul „heterologic"? Dacă este, atunci, în conformitate cu definiția dată mai sus, el nu se aplică lui însuși și deci nu poate fi heterologic. Pe de altă parte, dacă nu este heterologic, atunci, în conformitate cu definiția de mai sus, el se aplică la sine însuși și deci trebuie să fie heterologic. Întrucît aceste sofisme se aseamănă cu contradicțiile lui Cantor și Russell, dar nu au nimic de-a face cu infinitul, apariția lor a întărit întrucîtva poziția lui Russell împotriva lui Poincaré.

În cartea sa *Principles of Mathematics*, publicată în 1903, Russell a ajuns în mod independent la o concepție despre matematică similară

[7] "Les paradoxes de la logique", *Revue de métaphysique et de morale* XIV (1906), pp. 627—650. Articolul despre *Insolubilia* din *Dictionary of Philosophy and Psychology*, editat de Baldwin, era scris de C. S. Peirce.

concepției lui Frege, și deși găsea ca și Frege că paradoxurile constituie un factor perturbator, el mai spera încă într-o demonstrare satisfăcătoare a identității dintre aritmetică și logică. Iată de ce el credea că este important să se arate că paradoxurile proveneau dintr-o prezentare defectuoasă a logicii. Nu ar fi suficient să explicăm contradicțiile teoriei mulțimilor prin reflecții asupra trăsăturilor caracteristice ale agregatelor infinite, dar nici să le excludem printr-o legiferare *ad-hoc* a folosirii simbolurilor. Dacă ar fi ales una din aceste direcții, el nu ar mai fi fost capabil să spună că aritmetica e identică cu logica pură și nu ar fi avut nici o garanție că nu pot să apară contradicții noi. Singura soluție satisfăcătoare a problemei ar fi eliminarea paradoxurilor printr-o reformă care s-ar impune de la sine ca o necesitate evidentă de ordin logic încă din clipa în care ar fi propusă; și, după cum vom vedea, tocmai aceasta este ceea ce a încercat Russell în teoria tipurilor logice. Dar în 1908, anul în care a făcut prima expunere a acestei teorii, au mai apărut și alte două articole, care propuneau noi modalități de-a face față crizei și noi doctrine cu privire la relația dintre matematică și logică. În următoarele trei secțiuni urmează să analizăm aceste trei propuneri, precum și relațiile dintre ele.

2. *Teoria tipurilor logice a lui Russell*

În articolul său din 1908 cu titlul „Mathematical Logic as based on the Theory of Types"[8] și, de asemenea, doi ani mai tîrziu în al doilea capitol al introducerii la prima ediție din *Principia Mathematica*, Russell prezenta teoria sa asupra tipurilor logice ca pe o consecință a principiului cercului vicios, emis de el, și ca necesară pentru soluționarea paradoxurilor, însă o recomanda totodată ca fiind compatibilă cu bunul-simț și intrinsec credibilă. Să considerăm mai întîi raționamentul prin care această teorie a fost introdusă, precum și forma pe care a luat-o atunci cînd a fost dezvoltată pe deplin.

După Russell, o funcție propozițională presupune totalitatea valorilor sale dintr-un motiv pe care el îl formulează după cum urmează:

„Cînd vorbim despre «φx», unde x nu este specificat, înțelegem o valoare a funcției, dar nu una definită. Putem exprima acest fapt spunînd că «φx» *denotă în mod ambiguu* φa, φb, φc etc., unde φa, φb, φc etc. sînt diversele valori ale lui «φx» ... Rezultă că «φx» are o semnificație bine definită (bine definită, adică numai în măsura în care nu ține de esența ei de a fi ambiguă) dacă obiectele φa, φb, φc etc. sînt bine definite ... Rezultă de aici că nici o funcție nu poate avea printre valorile sale ceva ce ar presupune funcția, căci dacă ar avea, nu am putea considera obiectele denotate în mod ambiguu de

[8] *American Journal of Mathematics*, XXX (1908), pp. 222—262; republicat în *Logic and Knowledge*, pp. 59—102.

către funcția respectivă ca fiind definite atîta timp cît funcția nu era definită, pe cînd, reciproc, așa cum tocmai am văzut, funcția nu poate fi definită atîta timp cît valorile sale nu sînt definite. Acesta este numai un caz particular, dar poate cazul fundamental, al principiului cercului vicios. O funcție este ceea ce denotă în mod ambiguu ceva dintr-o anumită totalitate, și anume valorile funcției; prin urmare, această totalitate nu poate conține membri care presupun funcția, întrucît în caz contrar ar conține membri care presupun totalitatea, ceea ce, conform principiului cercului vicios, nu poate fi cazul pentru nici o totalitate"[9].

Terminologia acestui pasaj este nefericită. O funcție, nefiind un semn, nu poate denota nimic; și nici măcar despre o expresie funcțională, care într-adevăr este un semn, nu putem spune propriu-zis că denotă valorile funcției, fie ambiguu, fie neambiguu. Dar concluzia la care conduce raționamentul de mai sus este foarte interesantă:

„Deci nu poate exista nimic în genul unei valori pentru $\varphi\hat{x}$ cu argumentul $\varphi\hat{x}$, sau cu orice argument care ar presupune $\varphi\hat{x}$. Cu alte cuvinte, simbolul «$\varphi(\varphi\hat{x})$» nu poate să exprime o propoziție, așa cum exprimă «$\varphi(a)$» în cazul cînd φa este o valoare pentru $\varphi\hat{x}$. În fapt, «$\varphi(\varphi\hat{x})$» trebuie să fie un simbol care nu exprimă nimic: de aceea, putem spune că acest simbol nu este semnificator. Prin urmare, fiind dată o funcție arbitrară $\varphi\hat{x}$, există argumente pentru care această funcție nu are nici o valoare, după cum există și argumente pentru care are o valoare."[10]

În primul său articol cu privire la teorie, Russell spune că un tip poate fi definit ca un domeniu de semnificație, cu alte cuvinte ca acea colecție a argumentelor pentru care o funcție propozițională dată admite valori; dar ulterior el adaugă că funcțiile propoziționale se pot clasifica în tipuri după entitățile pe care le admit ca argumente adecvate. Aceste două modalități de a descrie starea de lucruri sînt echivalente; într-adevăr, considerațiile lui Russell ne cer să admitem o ierarhie de entități. Așadar, dacă considerăm oamenii ca indivizi sau entități de tipul 0 vom considera că a fi înțelept (adică funcția propozițională exprimată prin *x este înțelept*) este de tipul 1, deoarece poate fi asertată semnificativ, deși eventual nu în mod adevărat, despre Socrate sau Alcibiade, iar a fi o virtute cardinală este de tipul 2, deoarece ea poate fi asertată cu sens despre înțelepciune; în general, orice atribut este de un tip mai înalt decît entitățile despre care el poate fi afirmat sau negat cu sens. Este adevărat că argumentarea lui Russell, care pornește de la principiul cercului vicios, nu demonstrează nicidecum că un atribut trebuie să fie întotdeauna de tipul *imediat* mai înalt decît entitățile despre care poate fi afirmat sau negat cu sens; dar tocmai acest lucru este presupus de Russell atunci cînd își dezvoltă teoria sa și este necesar dacă — așa cum în mod evident consideră Russell — entități

[9] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 39.
[10] *Ibid.*, p. 40.

de acelaşi tip trebuie să fie substituibile una prin alta în mod universal, în sensul că ceea ce se poate afirma sau nega cu sens despre o entitate poate fi negat sau afirmat cu sens despre fiecare dintre celelalte entităţi.

Atîta timp cît operăm numai cu funcţii atributive, putem considera că diversele tipuri sînt aranjate în mod ierarhic într-o ordine ascendentă simplă; dar cînd luăm în consideraţie şi funcţiile relaţionale, trebuie să admitem o complexitate mai mare, ce nu poate fi reprezentată adecvat dacă facem uz numai de numere ordinale. Astfel, o relaţie cu doi termeni ar putea avea loc între entităţi care sînt amîndouă indivizi şi astfel ar putea fi caracterizată eventual ca fiind de acelaşi nivel ca un atribut al indivizilor, însă ea trebuie să se distingă ca tip de atare atribute şi totodată trebuie să se distingă şi de relaţiile ternare care au loc între indivizi. Tot astfel, pot exista relaţii, cum este relaţia de exemplificare, care au loc între entităţi de tipuri diferite. Utilizînd în continuare numeralul „0" pentru a reprezenta tipul indivizilor, putem spune eventual că funcţiile care iau ca argumente adecvate numai indivizi sînt de tipurile (0), (0, 0), (0, 0, 0) etc., că un atribut al unui atribut al unui individ este de tip ((0)), că un atribut al unei relaţii binare între indivizi, cum de exemplu este tranzitivitatea relaţiei de a fi un strămoş, este de tipul ((0, 0)), că o relaţie cum este exemplificarea poate fi de tipul (0, (0)) şi aşa mai departe. Ca regulă generală însă, nici o funcţie propoziţională nu poate lua argumente decît de tipul sau tipurile mai coborîte adecvate, adică de tipul sau tipurile al cărui semn sau ale căror semne în notaţia de mai sus ar fi găsite prin eliminarea parantezelor exterioare din semnul tipului funcţiei propoziţionale respective[11].

Această teorie este suficientă pentru a exclude paradoxul proprietăţii de a fi o proprietate care nu se exemplifică pe sine. Într-adevăr, dacă presupunem că litera F semnifică proprietatea paradoxală, ea trebuie introdusă printr-o definiţie cum ar fi $F(\hat{gx}) =_{\text{def.}} \sim g(\hat{gx})$, unde combinaţia semnelor din partea dreaptă este evident deficitară. Pentru a exclude paradoxul clasei tuturor claselor care nu se conţin pe ele însele ca membri, Russell consideră însă necesar să aplice şi teoria sa „fără clase". Această din urmă teorie are o denumire prea puţin fericită şi s-ar putea obiecta eventual că proiectul evitării paradoxurilor cu privire la clase prin evitarea claselor înseşi este extravagant, aşa cum extravagantă ar fi propunerea de a suprima bolile copiilor suprimînd copiii înşişi. Dar de fapt Russell vrea să spună ceva mult mai rezonabil decît ceea ce sugerează terminologia la care recurge. Russell susţine că desemnările claselor sînt simboluri incomplete, adică sim-

[11] R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, § 27.

boluri care nu pot fi definite în mod izolat dar pot fi definite însoţite, întrucît toate complexele în care intră cu sens pot fi înlocuite prin complexe echivalente în care aceste simboluri nu mai apar. Astfel, ori de cîte ori avem o expresie de forma $A\epsilon\hat{x}(Fx)$, putem înlocui această expresie prin una de forma FA, şi tot astfel, în cazuri mai complicate, semnele de clasă se pot elimina fără nici o pierdere. Uneori, Russell exprimă toate acestea spunînd că clasele sînt ficţiuni care nu rezistă analizei, dar asemenea remarci trebuie interpretate în lumina spuselor sale cu privire la simbolurile incomplete: ele sînt sugerate, fără îndoială, de terminologia juriştilor, care vorbesc despre corporaţii ca despre personalităţi fictive.

Acum, conform explicaţiei date de Russell, cînd încercăm să traducem paradoxul său asupra claselor în maniera cerută de teoria „fără clase", rezultatul la care ajungem constituie o combinaţie de simboluri interzisă de teoria tipurilor şi astfel este evident că paradoxul survine din cauză că gramatica obişnuită nu reuşeşte să satisfacă toate cerinţele logicii. Potrivit propriilor sale cuvinte:

„O propoziţie privitoare la o clasă trebuie redusă întotdeauna la un enunţ cu privire la o funcţie care defineşte acea clasă, adică cu privire la o funcţie care este satisfăcută de membri ai clasei şi nu este satisfăcută de nici un alt argument. Prin urmare, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcţie şi care presupune funcţia, aşa cum, de exemplu, $(x)\cdot\varphi x$ presupune funcţia φ. O clasă deci, conform principiului cercului vicios, nu are sens să fie argument pentru funcţia care o defineşte, adică, dacă denotăm prin «$\hat{z}(\varphi z)$» clasa definită de $\hat{\varphi z}$, simbolul «$\varphi\{\hat{z}(\varphi z)\}$» trebuie să fie lipsit de sens"[12].

În vederea soluţionării altor paradoxuri, cum este cel al lui Berry şi paradoxul mincinosului, este necesară o elaborare ulterioară, dar numai una ce pare a fi în orice caz cerută de principiul cercului vicios. Aceasta este teoria ramificată a tipurilor sau distingerea ordinelor înăuntrul tipurilor, iar Russell explică necesitatea acesteia după cum urmează:

„Fie $f(\hat{\varphi z}, x)$ o funcţie de două variabile $\hat{\varphi z}$ şi x. Atunci, dacă păstrînd pentru moment pe x fixat, afirmăm aceasta pentru toate valorile posibile φ, obţinem o propoziţie $(\varphi)\cdot f(\hat{\varphi z}, x)$. Atunci, dacă x este variabil, avem o funcţie de x; dar întrucît această funcţie presupune o totalitate de valori pentru $\hat{\varphi z}$, ea însăşi nu poate fi una din valorile incluse în totalitate, aşa cum ne arată principiul cercului vicios. Rezultă că totalitatea tuturor valorilor lui $\hat{\varphi z}$ vizate de $(\varphi)\cdot f(\hat{\varphi z}, x)$ nu este totalitatea funcţiilor în care x poate figura ca argument şi rezultă de asemenea că nu există nici o totalitate în genul totalităţii funcţiilor în care x poate figura ca argument"[13].

Pentru simplitate, în distincţia pe care o facem între ordine putem începe prin a presupune că avem de-a face numai cu funcţii care iau

[12] *Principia Mathematica*, vol. I, pp. 62—63.
[13] *Idem.*, pp. 48—49.

ca argumente adecvate indivizi. Dacă o funcţie oarecare de acest gen se poate defini fără aplicarea cuantorilor la nişte variabile oarecare diferite de variabilele individuale, putem spune că funcţia aparţine primului ordin. Luînd încă o dată oamenii în calitate de indivizi, putem da ca exemple funcţiile exprimate de *Socrate iubeşte pe x* şi *Fiecare îl iubeşte pe x*. Atunci, după Russell, „funcţiile de ordin 2 sînt astfel încît conţin variabile care sînt funcţii de ordinul 1, dar nu conţin nici o altă variabilă, exceptînd (eventual) indivizi"[14]. Strict vorbind, nu o funcţie, ci numai un semn funcţional poate că conţină o variabilă, dar sensul definiţiei este clar. Aşadar, expresia *x are toate calităţile de prim rang care fac un general mare* exprimă o funcţie de primul tip, dar de ordinul doi, deoarece ia indivizi ca argumente adecvate, dar ea este echivalentă ca sens cu $(f)\,[(y)\,(y \text{ este un mare general} \supset f!y) \supset f!x]$. În general, dacă variabila de tipul cel mai înalt care intră în expresia unei funcţii marchează un loc pentru semne de funcţii de al n-lea ordin, atunci funcţia astfel exprimată este de al $(n + 1)$-lea ordin. Conform terminologiei lui Russell din *Principia Mathematica*, o funcţie desemnată prin $F!\hat{x}$ va fi numită *predicativă* dacă şi numai dacă este de cel mai coborît ordin, compatibil cu faptul că are argumentul sau argumentele pe care le are efectiv[15]. Aşadar, în acest nou sens al cuvîntului, o funcţie predicativă nu presupune nici o totalitate, exceptînd totalitatea argumentelor sale posibile, precum şi orice totalităţi presupuse de aceste argumente.

Distincţia între ordinele funcţiilor contribuie la o soluţie a paradoxurilor ca cel al lui Berry, ea permiţîndu-ne să desprindem totalităţile nelegitime. Astfel, putem spune că în paradoxul lui Berry, cuvîntul „nume" este considerat în mod incorect ca acoperind nu numai numele proprii în sensul obişnuit, adică desemnările care nu presupun nici o funcţie, ci şi descripţiile care presupun funcţii de *toate* ordinele. Dacă vrem să vorbim corect despre descripţii, trebuie să fim în măsură a specifica ordinul sau ordinele funcţiilor pe care acestea le implică. Dar atunci, orice descripţie care se referă la descripţii ce presupun funcţii de ordin n va presupune la rîndul ei o funcţie de ordinul $n + 1$ şi astfel nu se va putea aplica la ea însăşi. Similar, paradoxul mincinosului poate fi înfăţişat ca o încercare de a utiliza descripţia „ceea ce spun" fără să se ţină seama de necesitatea unei distincţii între propoziţii după ordinele lor. Aceste rezultate ale teoriei ramificate a tipurilor sînt cît se poate de satisfăcătoare dar, din păcate, această teorie conduce la limitări foarte drastice ale discursului. Poate că nu are importanţă că nu avem voie să spunem „Napoleon avea toate calităţile necesare

[14] *Idem*, p. 52.

[15] *Ibid.*, p. 53. Aici „predicativ" este luat în altă accepţie decît în secţiunea precedentă.

unui mare general" atîta timp cît nu sîntem în măsură să adăugăm că respectivele calităţi sînt cele de ordinul unu sau, în orice caz, calităţile unei mulţimi finite de ordine. Important este însă faptul că, după cum se pare, ne este interzis să formulăm anumite teoreme matematice binecunoscute, şi în particular teorema că orice mulţime nevidă de numere reale superior mărginită are o margine superioară strictă.

Trebuie reamintit că, conform teoriei lui Eudoxus şi Dedekind, un număr real este o tăietură a numerelor raţionale sau, mai precis, este cea mai joasă dintre cele două mulţimi infinite în care poate fi divizată printr-o tăietură trama numerelor raţionale. De aici rezultă că o mulţime de numere reale este o mulţime de mulţimi de numere raţionale. Acum, dacă S este o mulţime nevidă de numere reale superior mărginită, marginea superioară strictă a lui S se presupune a fi un număr real care este în acelaşi timp reuniunea sau suma logică a tuturor numerelor reale din S, adică acea mulţime care are ca membri ai săi toate acele numere raţionale care sînt membri ai oricăruia dintre membrii lui S. Aici s-ar părea că avem o încălcare a teoriei ramificate a tipurilor. Într-adevăr, mulţimea numerelor raţionale care constituie un număr real, fiind o mulţime infinită, nu poate fi specificată decît dacă facem menţiune de o funcţie propoziţională pe care o satisfac toţi membrii săi, iar expresia funcţională despre care am presupus că specifică marginea superioară strictă a unei mulţimi infinite de numere reale trebuie să implice, după cum se pare, o referire la totalitatea funcţiilor propoziţionale care specifică numere reale, *inclusiv acea funcţie pe care o exprimă*. Dacă afirmăm că cea mai mică margine superioară trebuie să aparţină unui ordin de numere reale distinct de cel al numerelor lui S şi totodată că nu pot exista teoreme absolut generale despre numere reale, fără restricţii de ordin — analiza matematică, în accepţia ei uzuală, devine în acest caz imposibilă. Se pune întrebarea: cum poate să evite Russell această consecinţă neplăcută — dacă în genere o poate evita —, continuînd să utilizeze însă teoria sa ramificată a tipurilor în vederea excluderii paradoxurilor?

Russell încearcă să ajungă la o soluţie introducînd axioma reductibilităţii. Este vorba de presupunerea că pentru fiecare funcţie propoziţională există o funcţie predicativă (în sensul din *Principia Mathematica*) ce este satisfăcută de toate argumentele de aceeaşi natură şi de nici un alt argument[16], sau, în simboluri:

$$(f)(\exists g)(x)[fx \equiv g!x].$$

Dacă admitem aceasta, dificultatea cu privire la ordinele numerelor reale poate fi învinsă. Într-adevăr, putem spune că funcţiile propozi-

[16] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 56.

ţionale care specifică numere reale se împart efectiv în ordine distincte, dar pentru fiecare funcţie propoziţională de ordin mai înalt care specifică un număr real există o funcţie predicativă corespunzătoare care specifică acelaşi număr real, deoarece este satisfăcută de aceleaşi numere raţionale şi nu este satisfăcută de nici un alt număr raţional. Cu toate acestea, în principiu ne mai este încă interzis să facem generalizări cu privire la toate funcţiile propoziţionale, indiferent de ordin; dar în contexte ca cel de mai sus putem avea convingerea că dacă vorbim despre toate funcţiile predicative nu vom lăsa la o parte nimic din ceea ce trebuie spus. Un alt exemplu al avantajelor pe care ni le oferă axioma este posibilitatea de definire a identităţii (aşa cum am văzut în capitolul anterior) făcînd referire numai la funcţii predicative. În acelaşi timp, paradoxurile de felul celor obişnuite rămîn excluse, întrucît ele nu pot fi reformulate numai în termeni de funcţii predicative. Aşadar, dacă încercăm să reconstruim paradoxul lui Berry, vorbind însă numai despre întregi denumibili prin numiri de ordinul unu (de exemplu prin denumiri compuse din numerale engleze în aranjamente ca „cinci doi nouă"), constatăm că ceea ce spunem nu generează vreo contradicţie.

Dar atunci avem oare vreun motiv, în afară de convenabilitate, pentru a accepta axioma reductibilităţii? Russell recunoaşte că ar fi greu să spunem că această axiomă constituie un adevăr de la sine evident al logicii, dar el încearcă s-o explice şi s-o facă plauzibilă, arătînd conexiunile ei cu ceea ce au spus logicienii privitor la clase. În articolul său din 1908, el sugerează că această axiomă ar putea fi denumită axioma claselor, dar în introducerea la *Principia Mathematica* el scrie mai prudent:

„Dacă admitem existenţa claselor, axioma de reductibilitate poate fi demonstrată. Într-adevăr, în acest caz, fiind dată o funcţie arbitrară $\hat{\varphi z}$ de un ordin oarecare, există o clasă alcătuită din exact acele obiecte care satisfac $\hat{\varphi z}$. «φx» este deci echivalentă cu «x aparţine lui α». Dar «x aparţine lui α» este un enunţ care nu conţine variabile aparente şi, ca atare, este funcţie predicativă de x. Aşadar, dacă presupunem existenţa claselor, axioma de reductibilitate nu mai este necesară... Cu toate acestea, ţinînd seama atît de contradicţii, care necesită o tratare mai complicată în ipoteza admiterii claselor, cît şi de faptul că întotdeauna este indicat să facem cea mai slabă presupunere reclamată de demonstrarea teoremelor noastre, preferăm să admitem axioma de reductibilitate în locul existenţei claselor"[17].

Cînd Russell spune aici că „x aparţine lui α" este o funcţie predicativă de x, deoarece nu conţine variabile aparente, se pare că el nu face nici o distincţie între o funcţie şi o expresie funcţională. Dar, desigur, el nu urmăreşte să sugereze că introducerea literei greceşti ca abre-

[17] *Ibid.*, p. 58.

viere pentru $\hat{z}(\varphi z)$ este suficientă pentru a ne da toate beneficiile axiomei reductibilității, și ca atare trebuie să admitem că Russell consideră că α este o desemnare introdusă fără ajutorul lui φx sau al oricărei alte expresii funcționale de același gen. Totuși, nu este clar cum — fără a presupune axioma de reductibilitate — el își poate închipui posibilitatea unei atare noi desemnări pentru clasa desemnată anterior prin $\hat{z}(\varphi z)$, dacă nu cumva el crede în mod eronat că orice clasă poate fi indicată prin enumerarea membrilor săi.

Într-un pasaj ulterior, Russell vine cu o nouă argumentare:

„Axioma de reductibilitate echivalează cu presupunerea că orice combinație sau disjuncție de predicate (date în mod intensional) este echivalentă cu un predicat unic, adică este echivalentă cu presupunerea că, dacă afirmăm că x are toate predicatele ce satisfac o funcție $f(\varphi \hat{z})$ există un predicat pe care x îl va avea ori de cîte ori afirmația noastră este adevărată și nu-l va avea ori de cîte ori este falsă, și similar, dacă afirmăm că x are unul din predicatele care satisfac o funcție $f(\varphi \hat{z})$. Într-adevăr, prin intermediul acestei presupuneri, ordinul unei funcții nepredicative poate fi coborît cu o unitate; deci, după un număr finit de pași, vom fi în măsură să ajungem de la o funcție nepredicativă oarecare la o funcție predicativă formal echivalentă"[18].

Într-adevăr, această explicație revine la sugestia că o expresie avînd un cuantor universal trebuie privită ca o prescurtare pentru o conjuncție, iar o expresie avînd un cuantor existențial, ca o prescurtare pentru o disjuncție — și aceasta chiar dacă ar fi imposibil să scriem *in extenso* conjuncția sau disjuncția respectivă. Astfel, „Napoleon avea toate calitățile necesare unui mare general" trebuie luată ca o prescurtare pentru „Napoleon era inteligent, ager, inspira încredere, ghicea repede gîndurile altora ··· etc." Dacă acceptăm acest mod de a explica lucrurile, putem merge mai departe spunînd că distincția între ordine de funcții nu este, spre deosebire de ierarhia tipurilor, ceva impus de însăși natura lucrurilor, ci o complicație introdusă de exigențele limbii noastre și utilă numai în ce privește problemele legate de limbă. În fapt, aceasta este concluzia lui F. P. Ramsey din articolul său din 1925 „The Foundations of Mathematics"[19] și ea a fost acceptată de majoritatea (dar *nu* de unanimitatea) celor ce încearcă să meargă mai departe pe linia lui Frege, Whitehead și Russell. Așa cum a subliniat Ramsey, teoria simplă a tipurilor este suficientă în vederea exclu-

[18] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 59. Expresia dată de noi în paranteze apare în text ca notă la subsol.

[19] *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, XXV (1926) p. 338—384; retipărit în volumul *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, pag. 1—61.

derii paradoxurilor ce prezintă o importanţă specială pentru logician şi matematician (de ex., paradoxurile lui Cantor şi Russell), iar ramificările teoriei ordinelor nu sînt strict necesare pentru scopurile urmărite în *Principia Mathematica*, deoarece ele nu fac altceva decît să excludă paradoxuri legate de noţiuni semantice sau lingvistice ca denumirea sau definirea, noţiuni cu care matematicianul nu operează în activitatea sa profesională.

Odată admisă concepţia lui Ramsey, pare mai firesc să tratăm paradoxurile semantice prin măsuri semantice speciale, iar sugestia care a căpătat cel mai mare cîştig de cauză rezidă în distincţia între limbaj şi metalimbaj, introdusă de Tarski în lucrarea sa *Der Wahrheitsbegriff in die formalisierten Sprachen*[20]. Potrivit acestei distincţii, nici un limbaj necontradictoriu nu poate conţine înăuntrul său mijloacele pentru a vorbi despre semnificaţia sau adevărul propriilor sale expresii, iar paradoxuri cum sînt Mincinosul şi contradicţia lui Berry survin din cauză că nu s-a ţinut seama de această limitare. Dacă, de exemplu, vorbim despre *cel mai mic întreg nedenumibil în mai puţin de douăzeci şi şapte silabe*, trebuie să se presupună că vorbim cu referire la resursele unui anumit limbaj particular sau ale unor anumite limbaje particulare. Dacă înţelegem acest lucru, va fi limpede că expresia cursivă de mai sus nu este construită cu resursele limbajului sau limbajelor la care se face referire, ci aparţine unui metalimbaj esenţialmente mai bogat; cu această clarificare, paradoxul va dispărea. Din nefericire, adesea noi nu reuşim să înţelegem această distincţie cînd vorbim despre folosirea unei limbi naturale cum este româna, deoarece ne-am obişnuit să considerăm această limbă ca omnicompetentă; de aici provin toate necazurile noastre. Dacă vrem să evităm contradicţiile, trebuie să insistăm asupra faptului că, de regulă, ceea ce noi numim română este în realitate un şir infinit de limbi, şi anume română_1, în care putem discuta despre beţe şi pietre şi despre multe alte lucruri, dar nu despre română_1; română_2, în care putem discuta despre toate lucrurile pe care le putem discuta folosind română_1, dar în plus mai putem discuta şi despre însăşi română_1; română_3, în care putem discuta despre toate lucrurile pe care le putem discuta folosind română_2, dar în care mai putem discuta şi despre română_2, şi aşa mai departe. În cadrul acestei scheme, română_{n+1} este un metalimbaj în raport cu română_n.

Tarski recomandă distincţia sa ca fiind necesară în vederea soluţionării paradoxului mincinosului; este însă interesant să arătăm că această distincţie poate fi derivată din teoria simplă a tipurilor. Să presupunem mai întîi că încercăm să întrebuinţăm cuvintele „desem-

[20] A se vedea şi volumul *Logic, Semantics, Metamathematics*, p. 152—278.

nează" şi „desemnare" fără vreo referire implicită la un anumit limbaj particular şi că construim cu ajutorul acestora formula:

„Desemnare" desemnează desemnare.

Aici avem o încălcare vădită a teoriei simple a tipurilor, întrucît se spune că o relaţie este unul din propriii săi termeni. Nu este însă suficient să spunem că pe viitor vom vorbi întotdeauna despre *desemnare în română*. Exact aceeaşi dificultate survine şi atunci cînd construim formula:

„Desemnare în română" desemnează în română desemnare în română

Dificultatea încetează însă să fiinţeze dacă recunoaştem stratificarea explicită în paragraful anterior şi scriem:

„Desemnare în română$_1$" desemnează în română$_2$ desemnare în română$_1$

Într-adevăr, în acest caz, precizăm că relaţia despre care vorbim este de un tip mai înalt în comparaţie cu termenii săi. Iar aceasta, după cum se pare, constituie singura ieşire din impas.

Dacă respingem distincţia între ordine, trebuie să respingem şi principiul cercului vicios din care derivă această distincţie. A face aceasta constituie mai curînd un cîştig decît o pierdere, deoarece principiul este dubios iar aplicarea sa suscită dificultăţi. De ce, de exemplu, ar trebui să spunem, împreună cu Russell, că o funcţie presupune valorile sale? Dacă însă ne propunem să reţinem teoria simplă a tipurilor, abandonînd totodată principiul cercului vicios de care Russell lega această teorie, trebuie să reflectăm foarte serios dacă în adevăr teoria simplă are plauzibilitatea intrinsecă pe care Russell o revendica pentru ea, adică dacă este o teorie pe care am reţine-o pentru propriile sale merite, de îndată ce i-am înţeles conţinutul. Pentru a pregăti adoptarea unei decizii în această chestiune, să încercăm încă o dată să clarificăm ce presupune această teorie şi în ce relaţie stă ea cu teoria funcţiilor propoziţionale introdusă de către Frege.

Noutatea esenţială adusă de teoria lui Russell este o lărgire a regulilor de semnificaţie prin care Russell exclude din domeniul formulelor bine formate anumite combinaţii de semne care în caz contrar ar trece drept propoziţii corecte din punct de vedere gramatical; în particular, sînt excluse toate combinaţiile de forma $F(\hat{Fx})$ sau, în notaţia noastră, $F(\S xFx)$. În loc de a analiza dacă aceste combinaţii exprimă propoziţii adevărate sau propoziţii false, Russell afirmă că ele nu exprimă nici un fel de propoziţii. În analiza pe care o face funcţiilor de diferite

niveluri, Frege a anticipat distincția russelliană între tipuri; se pare însă că este un simplu accident faptul că regulile lui Frege pentru utilizarea semnelor funcționale fac imposibilă construirea în sistemul său a paradoxului proprietății de a fi o proprietate ce nu se exemplifică pe sine. Într-adevăr, Frege susținea că orice *obiect* poate intra ca argument în orice funcție propozițională de nivelul unu, așa încît tot ce s-ar putea spune mai rău despre alcătuirea „7 este mai înțelept ca luna" ar fi că exprimă o propoziție falsă; iar dacă ar fi acceptat posibilitatea de a vorbi despre *funcții* prin intermediul unor desemnări care nu conțin locuri goale, Frege ar fi fost probabil în măsură să le trateze în același mod. Dar el era convins că orice semn utilizat de noi pentru a vorbi despre o funcție trebuie să conțină un loc gol (care era marcat cu ajutorul unei consoane grecești mici care ea însăși nu făcea parte din scrierea sa), și de aceea presupunea că o funcție ar putea figura ca argument într-o altă funcție numai dacă expresia acesteia din urmă, să zicem a $\_\_\alpha\_\_\ \varphi(\alpha)$ ar permite umplerea locului gol din expresia primei funcții, să spunem $\Phi(\beta)$, producînd astfel o propoziție completă, de pildă a $\_\_\alpha\_\_\ \Phi(\alpha)$. Acest lucru reiese clar din modul în care Frege tratează funcțiile de nivel doi în *Grundgesetze*.

Dacă singurele semne pentru funcții ar fi expresii ca „... este înțelept", considerente de gramatică obișnuită ar fi suficiente pentru garantarea adevărului teoriei tipurilor. Într-adevăr, „... este înțelept" nu este, desigur, o propoziție a limbii noastre și nimeni nu-și va pune serios chestiunea dacă această combinație de cuvinte exprimă o propoziție adevărată sau o propoziție falsă. Atunci cînd în simbolismul nostru logic scriem $F(Fx)$, am putea eventual să presupunem pentru o clipă că această combinație de simboluri poate exprima o propoziție, dar dacă ne aducem aminte de faptul că litera x este un simplu semn pentru locul gol, vedem că aceasta nu este o expresie propozițională bine formată. Pînă la acest punct putem fi de acord cu Frege și uneori s-a sugerat că aceasta ar fi întreaga teorie a tipurilor[21]. Dar, în limba obișnuită, noi avem substantive fără nici un loc gol, de pildă „înțelepciune", care desemnează funcții, și, așa cum am văzut, se pot introduce semne de același gen și în simbolismul logicii. Problema importantă care se pune este de a ști dacă orice complex de forma $F(\S xFx)$ poate exprima o propoziție, iar la această

[21] S-ar putea ca acesta să fie sensul remarcii lui Wittgenstein din *Tractatus Logico-philosophicus*, 3. 332.

întrebare nu putem obține un răspuns limpede nici pe baza gramaticii academice, nici prin studierea uzului comun al cuvintelor. Într-adevăr, „Înțelepciunea este înțeleaptă" nu este în mod incontestabil negramaticală, și deși nimeni, exceptîndu-l poate pe Platon, nu ar oferi-o ca un enunț adevărat, mulți oameni ar putea afirma că „Nu este cazul că înțelepciunea este înțeleaptă", ca și cum ar considera că „înțelepciunea este înțeleaptă" ar avea o anumită semnificație. Cum putem rezolva această chestiune, dacă în genere o putem rezolva?

De foarte multe ori, o propoziție care conține desemnarea unei funcții poate fi înlocuită fără nici un prejudiciu printr-o propoziție de formă diferită în care nu mai figurează vreo atare desemnare, ci numai o expresie pentru funcție. Astfel, în loc de „Socrate era înzestrat cu înțelepciune" putem spune „Socrate era înțelept", iar în loc de „Teama de Dumnezeu este începutul înțelepciunii" — „Dacă un om se teme de Dumnezeu, el a și început să fie înțelept". Dacă s-ar putea dovedi că toate propozițiile cu sens care conțin desemnări de funcții trebuie să se reducă într-un mod sau altul la propoziții care nu conțin asemenea desemnări, am putea elimina „înțelepciunea este înțeleaptă" și toate celelalte complexe similare, ca fiind lipsite de sens, deoarece pare limpede că acestea nu se pot reduce. Nimeni însă nu a demonstrat că trebuie întotdeauna să fie posibilă eliminarea desemnărilor funcțiilor din discursul semnificativ și, avînd în vedere cele urmărite de noi, nu este suficient să citățm o multitudine de exemple în care acele complexe au fost eliminate cu succes; într-adevăr, cei care nu consideră plauzibilă teoria tipurilor vor obiecta că problema în cauză nu poate fi rezolvată prin metodele științelor naturii. Așa stînd lucrurile, maximum ce putem obține raționînd în acest fel este să arătăm că acel gen de complexe căruia teoria tipurilor îi contestă orice semnificație este în orice caz un gen cît se poate de aparte. Considerentul expus ne poate face să înclinăm spre acceptarea teoriei ca o cale de ieșire din impasul în care ne aflăm, dar este important să ne dăm seama că avantajele oferite trebuie plătite și că teoria are propriile sale dificultăți.

În primul rînd, teoria aduce o complicație enormă în modul nostru de expunere a logicii și — nu în cel din urmă rînd — în enunțurile noastre despre numere. Într-adevăr, sîntem obligați să distingem după tip nu numai numerele complexe, numerele reale, numerele raționale, întregii cu semn și numerele naturale, ci să distingem și între numerele naturale aplicabile la mulțimi de diverse tipuri. Astfel, conform dezvoltării russelliene a teoriei lui Frege, numărul patru care este numărul virtuților cardinale trebuie să fie o entitate de un alt tip decît numărul patru care este numărul regilor Angliei numiți William. Virtuțile sînt calități care pot reveni oamenilor și deci o mulțime determinată de

virtuți de un caracter aplicabil numai la atare calități nu poate fi caracterizată, riguros vorbind, ca aflîndu-se în aceeași clasă în care se află o mulțime de oameni, mulțime determinată de un caracter aplicabil numai la oameni. Se poate întîmpla că, așa cum spunea Frege, entitățile de toate genurile ce se pot concepe pot fi enumerate, dar se pare că pentru fiecare tip distinct trebuie să avem o aritmetică deosebită; cu alte cuvinte, că numeralele din egalitățile 2 *oameni* + 2 *oameni* = 4 *oameni* și 2 *virtuți* + 2 *virtuți* = 4 *virtuți* nu pot semnifica aceleași numere. Russell încearcă să depășească această dificultate spunînd că utilizează simbolurile logicii și matematicii cu *ambiguitate sistematică*. După el, avem într-adevăr tipuri deosebite de numere naturale (și astfel tipuri deosebite de numere raționale etc.), dar în dezvoltarea aritmeticii pure putem fără grijă să trecem cu vederea această complicație, întrucît formulele noastre se vor aplica fără nici o modificare la orice tip care ar putea fi pus în cauză în matematica aplicată, sau chiar și în acele ramuri ale matematicii pure în care numărăm înșeși numerele.

În al doilea rînd, teoria tipurilor înlătură posibilitatea obținerii definiției unei infinități de numere naturale în vreo modalitate de felul celei sugerate de Frege. Dacă spunem că 0 este mulțimea tuturor mulțimilor echivalente în sensul tehnic al lui Cantor cu mulțimea lucrurilor neidentice cu ele însele iar 1 mulțimea tuturor mulțimilor echivalente în același sens cu mulțimea {0}, este neapărat greșită afirmația că 2 ar fi mulțimea tuturor mulțimilor echivalente mulțimii ale cărei membri sînt 0 și 1. Într-adevăr, conform primelor două definiții, 1 este de un tip mai înalt decît 0 și deci nu poate exista vreo mulțime în care ambele să fie membri. Tratînd entitățile pe care le numea obiecte, Frege nu făcea nici un fel de distincții de niveluri; dar dacă Russell are dreptate, atunci definiția sa pentru 2 este tot atît de curioasă ca și presupunerea că Socrate și înțelepciunea ar putea avea o caracteristică comună, și în felul acesta metoda sa de procurare a unei infinități de numere naturale trebuie abandonată. Pentru matematică însă este esențial ca șirul numerelor naturale să nu aibă sfîrșit și de aceea Russell se vede constrîns să introducă o axiomă a infinitului specială, conform căreia există un anumit tip cu o infinitate de cazuri, acela probabil fiind tipul indivizilor, care este cel mai coborît în cadrul ierarhiei. Fără această axiomă, ne spune el, nu am avea nici o garanție împotriva posibilității dezastruoase ca obținerea de numere să eșueze la un anumit număr, cel mai înalt, adică la numărul membrilor celei mai largi mulțimi cu putință.

Axioma infinitului prezintă ceva profund nesatisfăcător. Ea nu poate fi caracterizată ca un adevăr al logicii în nici una din accepțiile rezonabile ale acestei expresii, și ca atare introducerea acestei axiome

ca o propoziție primitivă a aritmeticii echivalează de fapt cu abandonarea proiectului lui Frege de expunere a aritmeticii ca o dezvoltare a logicii. Totodată, nu este o protecție suficientă sugestia, pe care o făcea uneori Russell, că putem trata această axiomă ca pe un postulat sau ipoteză și nu ca o axiomă în sensul vechi. Într-adevăr, noi vrem să afirmăm că seria $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots$ este convergentă și are ca sumă pe 1 și nu că are suma 1 dacă se întîmplă ca în lume să existe o infinitate de indivizi. Dar chiar dacă renunțăm la orice speranță de a duce la îndeplinire în mod integral programul lui Frege și facem afirmația îndrăzneață că axioma lui Russell este cerută ca o premisă extralogică a matematicii, se pune întrebarea cum putem justifica faptul că o acceptăm. Ce sînt indivizii despre care vorbește Russell și cum putem spune dacă există o infinitate de atare indivizi? Russell spune că vrea să se refere la acele lucruri, oricare ar fi ele, ce nu pot fi denumite prin nume propriu-zis logice și care nu pot figura în cadrul propozițiilor decît ca subiecte. Dar el admite că este greu să indicăm în mod direct asemenea lucruri și sugerează chiar că s-ar putea cumva să nu existe nici un asemenea lucru, deoarece orice apare a fi un individ este în fapt o clasă sau un complex de un anumit gen. În ce privește a doua posibilitate, care pare a fi foarte misterioasă, Russell are amabilitatea să adauge că dacă aceasta este realizată, atunci axioma infinitului trebuie să fie în mod evident adevărată pentru tipurile existente în univers. Dar el nu afirmă că ar cunoaște cu certitudine starea de lucruri reală și termină prin a spune că nu avem nici o metodă cunoscută pentru a descoperi dacă axioma infinitului este adevărată sau nu[22].

În afară de aceste neplăceri pe care le ridică pînă și teoria simplă a tipurilor celor care încearcă să-l urmeze pe Frege în logicizarea aritmeticii, există o dificultate încă și mai serioasă: după cum se pare, formularea teoriei fără încălcarea propriilor sale mijloace pare imposibilă, deoarece cuvinte ca „funcție", „entitate" și „tip" trebuie să rămînă întotdeauna libere de orice restricții de tip. Dacă, de exemplu, spunem că nu putem afirma cu sens nici o funcție despre toate entitățile fără distincție de tip, propriul nostru enunț presupune generalitatea nelimitată pe care o declară imposibilă. De asemenea, defectuoasă este și acea definiție a unui tip potrivit căreia două entități sînt de același tip dacă o funcție propozițională care poate fi afirmată sau negată cu sens despre una din aceste entități, poate fi afirmată sau negată cu sens și despre cealaltă. Într-adevăr, cînd încercăm să aplicăm o asemenea definiție într-un caz particular spunînd, de exemplu, că Platon este de același tip ca Socrate dar înțelepciunea nu este de același tip, ne găsim noi înșine implicați într-o contradicție. Din

[22] *Introduction to Mathematical Philosophy*, p. 143.

declarația noastră rezultă că Platon nu este de același tip ca înțelepciunea, și totuși însăși decizia arată limpede că există cel puțin o funcție care poate fi afirmată în mod adevărat despre Platon și negată în mod adevărat despre înțelepciune, și anume funcția de a fi de același tip ca Socrate.

Critici de felul celor de mai sus l-au făcut pe Russell să admită că trebuia să distingă mai curînd între tipuri de *simboluri* decît între tipuri de entități[23]. Cuvintele „Platon" și „înțelepciune", ne spune acum Russell, aparțin unor tipuri diferite deoarece ele nu sînt substituibile una prin alta fără pierdere de semnificație. În timp ce „Platon era mai tînăr ca Socrate" are pe deplin sens, „Înțelepciunea era mai tînără ca Socrate" este un nonsens. Pe de altă parte, cînd construim denumiri pentru aceste cuvinte încadrîndu-le între semnele citării, noile noastre semne aparțin aceluiași tip, deoarece ele sînt substituibile unul prin altul fără pierdere de semnificație. De exemplu, dacă înlocuim „Platon" prin „înțelepciune" în propoziția „«Platon» este de același tip ca «Socrate»" rezultatul mai are încă sens, deși propoziția pe care o exprimă este falsă.

Cu prudență, această versiune nouă a teoriei tipurilor poate fi făcută să dea toate avantajele ce sînt derivabile din teoria inițială și ea poate constitui chiar o îmbunătățire a ei, nu numai pentru că ne pune la adăpost de noi paradoxuri, ci și pentru că ea pare să îndreptățească speranțe mai bune de înțelegere a situației. Este greșit însă să presupunem că, vorbind despre cuvinte și nu despre lucruri, ne putem sustrage de la toate complicațiile metafizice și putem baza distincțiile noastre pe simple considerente de ordin gramatical. În particular, este greșit să considerăm că diferența de tip ține întotdeauna de sintaxă, conform înțelegerii obișnuite a acestui termen gramatical. Există într-adevăr o deosebire sintactică între „Platon" și „... este înțelept", deoarece prima expresie este o desemnare, iar a doua o expresie funcțională; dar între „Platon" și „înțelepciune" nu avem o asemenea deosebire și nu este cîtuși de puțin evident că toate observațiile semnificative trebuie să se poată traduce într-un limbaj simplificat care ar conține numai desemnări de un singur tip.

Distincția de tip, importantă pentru soluționarea paradoxurilor ce i-au afectat pe matematicieni și pe logicieni la începutul acestui secol, este cea între cuvinte ca „Platon" și cuvinte ca „înțelepciune", despre care putem spune că reprezintă însușiri și relații posibile ale lui Platon. Influențați însă de Russell, filosofii s-au obișnuit să vorbească despre distincții de tip sau categorie în încercările lor de a rezolva probleme

[23] A se vedea critica lui Max Black și replica lui Russell în volumul *The Philosophy of Bertrand Russell*, editat de P.A. Schilpp, pp. 235 și 691.

de genuri foarte diferite. De exemplu, s-a emis ideea că vorbindu-se despre interacțiunea dintre spirit și corp se comite o confuzie de categorii[24]. Problema dacă o asemenea extindere a teoriei tipurilor este justificabilă sau nu trebuie soluționată, în fiecare caz în parte, printr-un examen amănunțit al modurilor în care gîndim și vorbim atunci cînd sîntem în largul nostru; întodeauna însă trebuie să avem în vedere două măsuri generale de precauție.

În primul rînd, nu avem voie să presupunem că cuvintele din limba obișnuită sînt înlocuibile unul prin altul *salva significatione* în toate contextele sau în nici unul. Deși în propoziția „Platon era înțelept" nu putem substitui „înțelepciune" pentru „Platon" fără a da naștere unui nonsens, putem efectua o asemenea substituție în „Socrate iubea pe Platon" fără a stîrni prin aceasta cea mai mică surpriză. De aceea trebuie să ne mulțumim a spune că diferența de tip este arătată de absența interșanjabilității în *unele* contexte, și pe această bază am putea fi conduși eventual la anumite dubii asupra faptului dacă două cuvinte sînt de același tip.

În al doilea rînd, cînd părăsim imperiul logicii și al matematicii pure pentru a studia gîndurile exprimate în limba obișnuită, nu este limpede întotdeauna unde ar trebui să tragem o linie de demarcație între nonsens și imposibilitate științifică. Să considerăm, de exemplu, următorul șir de complexe de semne:

1. Preotul crede în păcatul originar.
2. Copilașul crede în păcatul originar.
3. Pisica crede în păcatul originar.
4. Scaunul crede în păcatul originar.
5. Renta crede în păcatul originar.

În mod evident, primul complex poate fi rostit în scopul producerii unui enunț. De asemenea, pare rezonabil să spunem că ultimul este o absurditate. Cum stau însă lucrurile cu celelalte? Cu toții am auzit despre copii precoce: nu s-ar putea întîmpla oare ca un copil să fie atît de precoce încît preotul să se fi simțit obligat să-l inițieze în doctrina păcatului originar încă de mic copil? Apoi, întrucît unele pisici sînt mai inteligente decît altele, nu s-ar putea ca o pisică din această casă, auzind inițierea profesată de preot, să fi ajuns să creadă în păcazul originar? Și, în sîrșit, nu s-ar putea ca scaunul pe care stătea preotul respectiv să fie de fapt un credincios adevărat, care suferă din cauza farmecelor unui vrăjitor blestemat? Sau, cel puțin, nu au toate acestea un fel de sens? Vom spune atunci că linia de demarcație

[24] G. Ryle, *The Concept of Mind*.

este trasă între al patrulea și al cincilea exemplu al nostru? Ce fel de descoperire este însă aceasta? Să presupunem că cineva ne relatează că în poveștile copților credincioșii sînt prefăcuți adesea în rente, iar copiii copților înțeleg foarte bine asemenea povești. Vom admite atunci că orice colecție de cuvinte care, conform sintaxei obișnuite, este permisă, poate avea un anumit sens pentru cineva? Sau, dimpotrivă vom răspunde dogmatic că nu ne interesează poveștile copților, deoarece știm *a priori* că între al patrulea și al cincilea exemplu de mai sus trebuie trasă o linie de demarcație? În orice caz, pare clar că în contexte de genul celor pe care le-am considerat, teoria tipurilor nu ne pune la dispoziție o regulă simplă pentru detectarea unor absurdități care altminteri ar rămîne nebănuite. Dimpotrivă, acei ce vorbesc despre tipuri în asemenea contexte trebuie să admită că nimeni nu poate descoperi o diferență de tip atîta timp cît nu este deja capabil să detecteze un nonsens fără ajutorul acestei teorii.

Dacă ceea ce ne interesează este numai salvarea de antinomii a teoriei mulțimilor, putem trage foloasele teoriei russelliene a tipurilor, evitînd unele din dificultățile sale, cu ajutorul tehnicii de standardizare consemnată în capitolul anterior. Cu alte cuvinte, putem prezenta teoria multisortată a mulțimilor cu variabile definite pe un singur univers al discursului (conținînd entități de toate tipurile), cu condiția ca (I) să calificăm teoremele noastre prin condiții care disting entitățile după tipurile lor și (II) să introducem noua schemă de axiome

$$(x)(y)\{x\varepsilon y \supset [T_n(x) \equiv T_{n+1}(y)]\}$$

în care T-semnele sînt presupuse a fi predicate de categorie sau tip, predicate ele însele definibile în termeni de apartenență[25].

3. *Intuiționismul lui Brouwer*

În controversa sa cu Russell, de la începutul acestui secol, Poincaré sugera că paradoxurile teoriei mulțimilor s-ar datora erorii fundamentale de a admite agregate actual infinite. Poincaré nu a explicat în detaliu de ce această presupunere dădea naștere la contradicții; dar, fără îndoială, el avea dreptate să creadă că dacă matematicienii s-ar fi abținut să vorbească despre infinitate în maniera lui Cantor, ei nu ar fi fost puși în fața dificultăților cu totul aparte ale lui Cantor și, poate, ar fi susținut că era inutil să cheltuim timp pentru o discuție

[25] W. V. Quine, "Unification of Universes in Set-Theory", *Journal of Symbolic Logic*, XXI (1956), pp. 267–279. A se vedea și Wang Hao, "Logic of Many-Sorted Theories" *Journal of Symbolic Logic*, XVII (1952), pp. 105–106.

detaliată a unei presupuneri a cărei absurditate este evidentă chiar fără vreo referire la paradoxuri. Adoptînd o asemenea atitudine, Poincaré ar fi obținut sprijinul multor matematicieni de vază. La începutul secolului al XIX-lea, Gauss spusese că în matematică nu există loc pentru a vorbi despre un infinit încheiat[26], iar mai recent Kronecker inițiase o campanie împotriva programului cantorian. Dar nici unul dintre acești matematicieni nu și-a dat seama pe deplin de consecințele refuzului de a admite o altă infinitate decît infinitul potențial al unui șir care poate fi continuat *ad libitum* și abia lucrarea lui L. E. J. Brouwer a clarificat în secolul nostru problema — sau cel puțin a clarificat-o suficient pentru a-i interesa pe cei mai mulți matematicieni.

Ca și Kant și Poincaré, Brouwer susține că teoremele matematice sînt adevăruri sintetice *a priori*. În prelegerea sa inaugurală din 1912 la Universitatea din Amsterdam, el admite că dezvoltarea geometriei neeuclidiene a discreditat concepția kantiană despre spațiu dar, în opoziție cu Frege, Whitehead și Russell, susține că aritmetica, și împreună cu ea întreaga matematică, trebuie să fie derivată din intuiția timpului. Potrivit propriilor sale cuvinte, „neointuiționismul consideră separarea momentelor vieții în părți calitativ diferite, care urmează a fi reunite, rămînînd însă separate în timp, ca fenomenul fundamental al intelectului uman". Din această „intuiție a biunicității nude" obținem mai întîi noțiunea de șir de numere ordinale, iar apoi noțiunea de continuu liniar, adică „de relație *Între* care nu este epuizabilă prin interpunerea de noi unități, și de aceea nu poate fi concepută niciodată ca o simplă colecție de unități". În măsura în care admitem continuitatea, chiar și geometria este dependentă de aceeași intuiție. Nu există alte mulțimi decît cele numărabile și deci nu există cardinali transfiniți, cu excepția lui $\aleph_0$, cardinalul unei mulțimi ai cărei membri pot fi puși în corespondență biunivocă cu șirul numerelor naturale. În particular, nici o expresie cum ar fi „mulțimea tuturor numerelor reale dintre 0 și 1" nu are semnificație[27].

Ceea ce Brouwer are de spus cu privire la intuiție în manifestul său este obscur, iar celelalte articole ale sale nu aruncă mai multă lumină asupra acestei probleme, oricît de mult interes ar prezenta ea pentru filosofi; dar Brouwer nu lasă nici o îndoială asupra faptului că repudiază tot ce este în legătură cu noțiunea unui infinit actual (sau încheiat, sau extensional), inclusiv chiar libertatea de a vorbi despre mulțimea numerelor reale dintr-un interval. După păre-

[26] *Werke*, vol. VIII, p. 216.

[27] „Intuiționism și formalism", prelegere inaugurală la Universitatea din Amsterdam în 1912; traducerea în limba engleză a apărut în *The Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XX (1913), pp. 81—96.

rea sa, chiar şi şirul numerelor naturale trebuie conceput ca o varietate deschisă în perpetuă creştere şi care nu ajunge niciodată la un capăt: putem înţelege acest şir numai înţelegînd legea lui de construcţie.

Uneori, Brouwer şi elevii săi spun că intuiţia despre care vorbesc este tocmai aprehensiunea clară a minţii a propriilor sale construcţii; ei afirmă adesea că în matematică toate demonstraţiile satisfăcătoare sînt constructive. Este greu să ştim exact ce înţeleg ei prin „construcţie" şi „constructiv" în acest context, dar faptul că ei neagă adesea dependenţa gîndirii matematice de orice gen special de limbaj şi îşi exprimă neîncrederea faţă de tehnica de formalizare prin care anumiţi alţi matematicieni speră să se asigure, sugerează ideea că ei înţeleg prin demonstraţie constructivă o demonstraţie constînd în executarea unui experiment imaginar. A. Heyting, care este un membru de frunte al şcolii, a mers chiar atît de departe încît să afirme:

„Matematica intuiţionistă constă ... din construcţii mintale; o teoremă matematică exprimă un fapt pur empiric, şi anume succesul unei anumite construcţii. «2 + 2 = 3 + + 1» trebuie citit ca o prescurtare a enunţului *Am efectuat construcţiile mintale indicate de «2 + 2» şi «3 + 1» şi am găsit că ele conduc la acelaşi rezultat*"[28].

Cu greu însă i s-ar putea atribui intenţia de a reduce matematica la o autobiografie psihologică. Într-adevăr, este cît se poate de evident că Heyting consideră că teoremele pe care le-a demonstrat reflectînd asupra propriilor lui capacităţi de construcţie mintală pot fi demonstrate de oricare alt om care este destul de inteligent şi că nu este adecvat să spunem că orice om are propria sa matematică (afară doar dacă această expresie nu înseamnă pur şi simplu stocul teoremelor descoperite sau verificate de către el personal). Intuiţioniştii moderni sînt de acord, probabil, cu Kant în a spune că teoremele matematicii sînt obiective în sensul că sînt valide pentru toate fiinţele inteligente. Dacă aceasta este just, atunci expresia simbolică a unei teoreme ar putea fi înlocuită în anumite contexte printr-un enunţ cum că ceva este *demonstrabil*, dar ea nu poate fi tratată ca o relatare a faptului empiric că ceva a fost *demonstrat* de către autor. Fără îndoială, scrierea expresiei simbolice poate fi citată ca o mărturie a unei performanţe mintale realizată de autor, dar aceasta nu este un motiv suficient pentru a spune că expresia semnifică ceva cu privire la autor.

În practică, cerinţa cea mai importantă a programului demonstraţiei constructive este aceea de a nu admite în matematică nici un enunţ existenţial, decît atunci cînd putem demonstra acest enunţ prin producerea unui caz al său. După părerea lui Brouwer, cel ce nu respectă această măsură de precauţie, nu trebuie să-i reproşeze altcuiva decît sieşi faptul că ajunge la un paradox; într-adevăr, persoana res-

[28] *Intuitionism, An Introduction*, p. 8.

pectivă vorbește fără intuiție. Trebuie admis însă că și Brouwer însuși a fost condus la unele concluzii surprinzătoare, în încercările sale de a-și aplica în mod riguros programul. Încă din 1908, el a publicat un articol asupra incertitudinii principiilor logicii[29], iar din 1918 încoace a elaborat o serie de articole împotriva folosirii principiului terțului exclus în matematică. În aceste articole, el susține că matematica, fiind derivată direct din intuiție, nu presupune un sistem de logică, ci, dimpotrivă, este ea o sursă de principii logice, întrucît acestea din urmă se pot enunța la modul general numai după ce validitatea lor a fost stabilită de intuiția corespunzătoare. Nu există și nu poate exista un limbaj absolut sigur pentru matematică; cu alte cuvinte, un limbaj care să elimine orice posibilitate de neînțelegere; de aceea, este inutil să sperăm o formalizare completă a matematicii. Acest fapt ni-l arată izbitor istoria principiului terțului exclus. În preocupările lor cotidiene, oamenii au de obicei de-a face cu mulțimi finite, iar intuiția arată că regulile logicii lor obișnuite sînt adecvate pentru raționamentele cu privire la asemenea mulțimi. Aceste reguli au fost însă luate ca absolute și aplicate fără garanția intuiției în vederea raționării asupra mulțimilor infinite. În acest nou context, principiul identității, principiul non-contradicției și principiul silogismului sînt în fapt și aici adecvate; dimpotrivă, principiul terțului exclus precum și principiul, asociat acestuia, de eliminare a dublei negații nu mai sînt valabile.[30]

Să considerăm un enunț existențial $(\exists x)[Fx. \sim Gx]$ și enunțul universal $(x) \sim [Fx. \sim Gx]$, enunț presupus, de regulă, a fi contradictoriul primului. Dacă mulțimea desemnată de $\hat{x}Fx$ este finită, atunci în principiu este posibil să examinăm toți membrii, unul după altul, decizînd astfel în favoarea unuia sau altuia dintre aceste două enunțuri. Obiectivul se poate dovedi irealizabil din punct de vedere tehnic, dar dispunem de o concepție clară a unei metode pentru a decide care dintre alternative este adevărată. Dacă însă mulțimea desemnată de $\hat{x}Fx$ este infinit numărabilă, situația se schimbă. Enumerarea sistematică mai este încă suficientă pentru demonstrarea enunțului existențial, deoarece ea poate duce la un caz favorabil într-un număr finit de pași, dacă un asemenea caz există; dar ea nu mai este o metodă efectivă de demonstrare a enunțului universal, deorece nu are sens să vorbim despre parcurgerea tuturor

[29] „De onbetrouwbaarheid der logische principes", *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, II (1908), p. 152; retipărit în *Wiskunde, Waarheid, Werhelijkkeid.* Nu am avut sub ochi acest articol.

[30] A se vedea în special „Mathematik, Wissenschaft und Sprache", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVI (1929), pp. 153—164.

membrilor. Prin urmare, oricine reuşeşte să demonstreze conjectura lui Goldbach că orice număr par mai mare ca 2 este suma a două numere prime, trebuie să o demonstreze arătînd că această proprietate este inerentă naturii oricărui multiplu de 2. Or, Brouwer şi majoritatea intuiţioniştilor sînt gata să admită că una din căile de demonstrare a unui enunţ universal de acest gen constă în a arăta, dacă se poate, că enunţul existenţial implică o contradicţie şi, ca atare, trebuie respins; cu alte cuvinte, ei adoptă teza logică

$$\sim (\exists x)[Fx. \sim Gx] \supset (x) \sim [Fx. \sim Gx].$$

Pe de altă parte, ei nu admit teza

$$\sim (x) \sim [Fx. \sim Gx] \supset (\exists x)[Fx. \sim Gx\ ],$$

deoarece ei spun că dacă am reuşi să respingem enunţul universal arătînd că el implică o contradicţie, nu am fi mai aproape de descoperirea unui lucru numit A despre care să putem aserta $FA. \sim GA$, şi astfel nu am avea dreptul să asertăm propoziţia existenţială. Pe scurt, raţionamentul care implică a doua teză ar fi neconstructiv şi oricine asertează propoziţia existenţială ca o concluzie a unui asemenea raţionament s-ar afla într-un pericol intelectual la fel cum un om care aleargă în întuneric se află într-un pericol fizic. Dar respingerea celei de-a doua teze echivalează în fapt cu abandonarea principiului terţului exclus şi a principiului asociat de eliminare a dublei negaţii.

Această concluzie este destul de surprinzătoare pentru a-i face pe mulţi să bănuiască strecurarea unei greşeli în filosofia intuiţionistă a matematicii, dar caracterul straniu al concluziei este oarecum mascat atunci cînd Brouwer o identifică cu respingerea ipotezei că orice problemă matematică este rezolvabilă.[31] Într-adevăr, trebuie admis că problemele privind mulţimile infinite nu pot fi toate rezolvate printr-o regulă de triere ca aceea care duce în mod infailibil la o rezolvare a problemelor privitoare la mulţimi finite. Deşi putem spune cîte ceva despre forma generală pe care trebuie să o ia o demonstraţie a ipotezei lui Goldbach, în cazul cînd se va obţine vreodată o asemenea demonstraţie, nu sîntem în măsură să dăm instrucţii efective pentru descoperirea unei atare demonstraţii. Dar de ce trebuie Brouwer să presupună că afirmarea necondiţionată a principiului terţului exclus este echivalentă cu pretenţia posedării unei metode universale de rezolvare a problemelor matematice? Un motiv ar putea fi faptul că programul său de demonstraţie constructivă îl obligă să considere inadecvată asertarea oricărui enunţ disjunctiv atîta timp cît nu

[31] „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys. math. Klasse*, 1928, pp. 48–52.

sîntem gata să afirmăm unul dintre disjuncţi. Într-adevăr, conform acestui mod foarte strict de înţelegere a disjuncţiei, o persoană care scrie $p \vee \sim p$, utilizînd litera p ca variabilă liberă, lasă a se înţelege că este în măsură să afirme sau să nege orice propoziţie ce ar putea fi luată în considerare. Pare însă probabil că Brouwer mai este influenţat şi de ideea că în matematica intuiţionistă nu trebuie trasată nici o deosebire între $\sim (\exists x)[Fx. \sim Gx]$ şi $\Delta \sim (\exists x)[Fx. \sim Gx]$, unde Δ serveşte ca abreviere pentru „este demonstrabil că". Am observat deja că intuiţioniştii vorbesc despre teoreme ca despre enunţuri de demonstrabilitate şi este uşor de văzut că oricine accentuează, ca Brouwer, cerinţele demonstraţiei constructive, va afirma cu toată tăria că în matematică nu există loc pentru o universalitate pur accidentală. Heyting spunea că „În matematica intuiţionistă poate juca un rol numai falsitatea *de iure*: introducerea simplei falsităţi *de facto* ar intra în conflict cu principiul constructivităţii,"[32], iar din afirmaţia lui se poate deriva cu uşurinţă concepţia menţionată mai sus.

Oricare ar fi sensul precis al declaraţiilor sale cu caracter mai pronunţat filosofic, nu poate exista îndoială că pentru Brouwer ele au consecinţe serioase asupra matematicii. Într-adevăr, metodele pe care el le numeşte neconstructive sînt, din păcate, foarte răspîndite în teoria numerelor reale. Efectiv, este greu de văzut cum ar putea fi prezentată vreo parte substanţială a analizei clasice fără asemenea metode. În teoria lui Dedekind se consideră că un număr real este o mulţime actual infinită de numere raţionale şi pînă şi cele mai simple teoreme sînt de aceea demonstrate prin adoptarea principiului terţului exclus privitor la atare mulţimi. De exemplu, cînd se urmăreşte să se demonstreze că pentru două numere reale arbitrare x şi y sau $x > y$, sau $x = y$ sau $x < y$, se face mai întîi afirmaţia că sau există sau nu există un număr raţional în x care nu aparţine lui y. Brouwer şi adepţii săi resping toate acestea şi încearcă să reconstruiască matematica în conformitate cu propriile lor standarde de demonstraţie mai stricte. Subtilitatea şi ingeniozitatea cheltuită de ei în acest scop produce unor matematicieni o plăcere estetică, dar este încă de pe acum limpede că structura pe care o construiesc trebuie să fie în mod inevitabil mai complicată decît edificiul clasic pe care ar urma să-l înlocuiască.

În studiul logicii intuiţioniste, studiu care ne interesează în mod special, dezvoltarea cea mai importantă în cadrul şcolii a constituit-o formularea unui calcul de către Heyting în 1930.[33] Intrucît una din

[32] *Intuitionism, An Introduction*, p. 18.

[33] „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys. math. Klasse*, 1930, pag. 42—56. A se vedea şi *Intuitionism, An Introduction*, cap. VII.

afirmațiile intuiționiste este aceea că nu putem avea niciodată o garanție a finalității unui sistem formal, Heyting nu propune ca raționamentul matematic să fie limitat pentru totdeauna la argumente de tipul celor înfățișate de el; dar sistemul său a fost acceptat de Brouwer ca un rezumat corect al principiilor logice utilizate în prezent în matematica intuiționistă și de aceea merită o atenție deosebită. Regulile de deducție ale sistemului coincid cu cele din *Principia Mathematica*, dar sistemul prezintă două trăsături distinctive. În primul rînd, toate semnele logice (conjunctiv, disjunctiv, condițional, negativ, universal și existențial) sînt luate ca semne primitive nedefinite[34]; în al doilea rînd, diversele mulțimi de axiome date de Frege și alții pentru calculul propozițional sînt abandonate în favoarea următoarei mulțimi de unsprezece axiome:

1. $p \supset (p \cdot p)$
2. $(p \cdot q) \supset (q \cdot p)$
3. $(p \supset q) \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot r)]$
4. $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$
5. $q \supset (p \supset q)$
6. $[p \cdot (p \supset q)] \supset q$
7. $p \supset (p \vee q)$
8. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
9. $[(p \supset r) \cdot (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset r]$
10. $\neg p \supset (p \supset q)$
11. $[(p \supset q) \cdot (p \supset \neg q)] \supset \neg p$

Trebuie observat că în ultimele două formule, acolo unde l-am fi așteptat pe $\sim$ figurează noul semn $\neg$. Dar, în afară de aceasta, fiecare axiomă a lui Heyting este în aparență similară unei teze a logicii clasice și, împreună cu regulile de substituție și detașare, ele permit multe dintre modurile de raționament recunoscute de logica clasică; din ele nu este însă posibil să derivăm nici unul din cele două principii respinse de Brouwer, și anume cele exprimabile de către formulele $p \vee \neg p$ și $\neg\neg p \supset p$. Mai mult, sistemul prezintă particularitatea că nu admite nici o propoziție disjunctivă dacă cel puțin unul din disjuncții ei nu poate fi demonstrat în mod separat. Un sistem echivalent de reguli de „deducție naturală" se poate obține prin omiterea regulii (6b) din versiunea sistemului lui Gentzen, dată într-o secțiune anterioară.

Ce trebuie spus despre calculul lui Heyting? El este prezentat ca și cum ar fi o formalizare a acelei părți a logicii clasice împotriva căreia Brouwer nu ridică nici o obiecție; și într-adevăr, dintr-un anumit punct de vedere, calculul lui Heyting este tocmai aceasta.

---

[34] J.C.C. Mc. Kinsey a demonstrat că nici unul nu poate fi definit prin referire la celelalte, fără a modifica sistemul. A se vedea "Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting's Calculus of Propositions", *Journal of Symbolic Logic*, IV (1939) pag. 155—158.

Pe de altă parte, nu este cu putinţă să abandonăm principiile logicii clasice dacă conferim tuturor semnelor logice sensurile lor uzuale, deoarece sensul unui semn logic este definit de formulele logice în care acesta este introdus. Intuiţioniştii nu se mulţumesc să ignore formula $p \vee \neg p$, ci afirmă în mod explicit că aceasta nu-şi găseşte locul în calculul lor propoziţional. Se pare deci că dacă semnul $\vee$ îşi păstrează în logica intuiţionistă sensul său obişnuit, $\neg$ trebuie să însemne ceva diferit de $\sim$. În expunerea teoriei sale, Brouwer scrie adesea „este absurd" acolo unde ne-am fi aşteptat ca el să spună „nu este cazul", iar Heyting, aşa cum am văzut, spune că în matematica intuiţionistă nu avem o negaţie numai *de facto*. Aşadar, nu este surprinzător că mulţi critici au presupus că aşa-numitul semn al negaţiei din calculul intuiţionist ar fi de fapt un semn al imposibilităţii şi, ca atare, au spus că la drept vorbind infirmat nu este principiul terţului exclus, ci teza vădit inacceptabilă că orice propoziţie este sau adevărată, sau imposibilă[35]. Dar aceasta nu poate fi o explicaţie suficientă; într-adevăr, ultima din formulele de mai sus ale lui Heyting nu este un adevăr al logicii, dacă considerăm că $\neg$ înseamnă „este imposibil că", iar celelalte semne îşi păstrează sensurile lor obişnuite. În realitate, situaţia este mai complicată, aşa cum a arătat Kurt Gödel în două articole din 1932.[36]

Dacă admitem calculul lui Heyting ca parte a logicii clasice, atunci, în mod paradoxal, putem demonstra că această parte conţine într-un anumit fel întregul. Căci, deşi Heyting spune că toate semnele sale trebuie luate ca primitive nedefinite, nimic nu ne împiedică să introducem un nou semn al disjuncţiei, să spunem $\oplus$, precum şi un nou semn al implicaţiei, să spunem $\rightarrow$, definite de echivalenţele:

$$P \oplus Q = \neg(\neg P \cdot \neg Q)$$
$$P \rightarrow Q = \neg(P \cdot \neg Q).$$

Iar din acestea, împreună cu axiomele şi regulile de deducţie date de Heyting, putem obţine toate tezele logicii clasice a propoziţiilor, inclusiv principiul terţului exclus în forma $p \oplus \neg p$ şi principiul de eliminare a dublei negaţii în forma sa $\neg\neg p \rightarrow p$. Într-adevăr, cele două formule menţionate sînt simple abrevieri pentru $\neg(\neg p \cdot \neg\neg p)$ şi $\neg(\neg\neg p \cdot \neg p)$, care pot fi ambele demonstrate în cadrul sistemului lui Heyting. Trebuie observat însă că noile semne $\oplus$ şi $\rightarrow$ nu trebuie

---

[35] A se vedea, de exemplu, W. Kneale, "Are all Necessary Truths True by Convention?", *Aristotelian Society Proceedings*, sup. vol. XXI (1947), pp. 118—133.

[36] „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie" şi "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft IV (1932), pp. 34—38, 39—40.

identificate cu semnele intuiționiste $\vee$ și $\supset$, și că formula $\neg\neg p \rightarrow p$ nu poate fi aplicată în calculul intuiționist pentru eliminarea dublei negații, dat fiind că regula de detașare, sau *modus ponens*, pentru acest calcul se referă la $\supset$ și nu la $\rightarrow$.

Prin extinderea aceleiași proceduri, s-a demonstrat că versiunea clasică a calculului restrîns al funcțiilor și aritmetica elementară clasică pot fi reconstruite în cadrul sistemelor intuiționiste respective, și s-a presupus chiar că putem face același lucru și pentru analiza clasică.[37] O asemenea reproducere a calculelor clasice înăuntrul celor intuiționiste echivalează cu o demonstrație relativă de consistență pentru primele, tot așa cum modelarea unei geometrii neeuclidiene în cadrul geometriei euclidiene demonstrează că prima nu poate fi contradictorie dacă a doua nu este și ea contradictorie. Dacă matematica intuiționistă nu conține contradicții, atunci nici acele părți ale matematicii clasice ce se pot traduce în părți ale matematicii intuiționiste nu conțin contradicții.

În primul din cele două articole sus-menționate, Gödel trage concluzia că restricțiile impuse de Brouwer asupra demonstrațiilor din analiză și teoria mulțimilor nu se datorează, cum pretinde Brouwer însuși, abandonării principiului terțului exclus, ci respingerii definițiilor impredicative (adică respingerii definițiilor care conțin un cerc vicios de genul celui indicat de Poincaré). Indiferent dacă aceasta este corect sau nu, Gödel a demonstrat în mod cert că în cea mai simplă interpretare calculul lui Heyting include întreaga logică clasică și că intuiționiștii care acceptă această interpretare nu au dreptul să afirme că ar fi abandonat principiul terțului exclus, decît în sensul că nu îl folosesc în propriile lor raționamente în matematică.

Se poate replica însă că formulele intuiționiste înseamnă întotdeauna altceva decît formulele clasice de aceeași înfățișare și că, așa cum am văzut, avem motive să credem că aceasta este adevărat pentru formulele logice ale lui Heyting. Aici, Gödel vine din nou cu o idee interesantă[38]. Pornind de la indicațiile intuiționiștilor înșiși, el admite în cel de-al doilea articol menționat mai sus că cele patru semne ale calculului propozițional al lui Heyting diferă ca sens de semnele calculului clasic, dar că expresiile care conțin aceste semne pot fi considerate ca abrevieri ale unor expresii mai complicate, conform

---

[37] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, § 87 și A. Heyting, *Intuitionism, An Introduction*, pp. 112—114.

[38] A se vedea, de asemenea, J.C.C. McKinsey și A. Tarski, "Some Theorems about the Lewis and Heyting Calculi", *The Journal of Symbolic Logic*, XIII (1948), pp. 1—15. Interpretarea dată aici este a doua dintre cele două interpretări sugerate de către Gödel.

schemei de mai jos în cadrul căreia Δ are sensul „este demonstrabil că", iar semnele împreună cu care apare sînt clasice:

Expresie Heyting	*Dezvoltarea în formă clasică*
$\neg P$	$\Delta \sim \Delta P$
$P \cdot Q$	$\Delta P \cdot \Delta Q$
$P \vee Q$	$\Delta P \vee \Delta Q$
$P \supset Q$	$\Delta P \supset \Delta Q$

Rezultatul este că toate axiomele lui Heyting devin teze într-un sistem care se deosebește de sistemul modal S_4 al lui Lewis numai prin faptul că utilizează „demonstrabil" în loc de „necesar". Totodată, teza pe care Brouwer o respinge sub denumirea de „principiu al terțului exclus" se dovedește a fi o versiune a principiului de reducere tare. Într-adevăr, în formă dezvoltată, principiul este $\Delta p \vee \Delta \sim \Delta p$, iar aceasta echivalează cu $\sim \Delta p \supset \Delta \sim \Delta p$. Cu interpretarea sugerată, este ușor de văzut de ce spune Brouwer că teza respinsă este echivalentă cu principiul rezolvabilității tuturor problemelor matematice și este mult mai ușor să înțelegem de ce el este gata să respingă această interpretare. Într-adevăr, chiar cei ce cred în principiul tare de reducere din logica modală uzuală nu afirmă în mod unanim că li se pare intuitiv tot atît de evident ca principiul terțului exclus propriu-zis; conform interpretării propuse, teza respinsă nu privește necesitatea din logica modală obișnuită ci demonstrabilitatea prin metode constructive în matematică.

Ideea fundamentală a intuiționismului este dobîndirea certitudinii în matematici prin acceptarea în exclusivitate a demonstrațiilor constructive; de aceea este firesc ca acest calcul al lui Heyting să fie interpretat ca teorie axiomatică a noțiunii de demonstrabilitate prin metode constructive. Astfel înțeles, calculul are sens; căci, fără îndoială, noi nu susținem că despre orice conjectură matematică se poate demonstra că este adevărată sau se poate demonstra că ea nu nu poate fi demonstrată prin metode constructive. Dar, conform acestei interpretări, calculul lui Heyting nu este un sistem de logică în sensul strict, deoarece nu fixează sensul semnelor logice ce apar în formularea lui completă. Pe de altă parte, el presupune un calcul clasic al logicii și a fost considerat, în mod eronat, drept o logică alternativă numai datorită obiceiului nefericit al intuiționiștilor de a vorbi despre teoreme ca despre enunțuri de demonstrabilitate. Fără îndoială, pot exista teoreme cu privire la demonstrabilitatea unor teoreme, dar trebuie să existe și teoreme care nu sînt de acest gen, deși implică noțiuni logice ca acelea de condiționalitate și universalitate.

În practică, cel ce decide să accepte în matematică numai demonstrații constructive se poate vedea constrîns să respingă raționamentele care utilizează principiul terțului exclus la mulțimi infinite (și anume, dacă nu acceptă să explice caracterul nesatisfăcător al tuturor raționamentelor neconstructive în modul sugerat de Gödel). Dar atunci el trebuie să se mulțumească cu observația că asemenea raționamente nu oferă o bază pentru concepția pe care o promovează.

4. *Programul hilbertian al metamatematicii*

În anul 1908, an în care Russell a publicat prima versiune a teoriei tipurilor iar Brouwer s-a ridicat pentru prima dată împotriva certitudinii principiilor logicii, E. Zermelo a construit un sistem de axiome destinat să salveze de paradoxuri teoria mulțimilor[39]. Considerînd în continuare această teorie ca parte fundamentală a matematicii, el sugerează că teoria mulțimilor trebuie reconstruită prin stipularea unor principii în măsură să sprijine doctrina general acceptată, dar alese astfel încît să nu genereze contradicții. Admițînd că nu poate demonstra consistența axiomelor sale, Zermelo susține că a exclus cel puțin antinomiile descoperite în ultimii ani. Trăsătura esențială a metodei sale este că el nu mai vorbește despre mulțimi la fel de liber cum vorbea Cantor, ci admite în teoria sa numai acele mulțimi a căror existență este garantată prin axiomele sale.

Mai întîi, în *axioma lui de determinare* (I) el stabilește că două mulțimi sînt identice dacă orice membru al unei mulțimi este și un membru al celeilalte. Apoi el permite printr-un număr de axiome derivarea unor mulțimi din alte mulțimi, admise ca date. Astfel, în *axioma submulțimilor* (III) el spune că dacă avem o proprietate astfel încît pentru fiecare membru al unei mulțimi S este o problemă definită dacă acel membru are proprietatea sau nu are proprietatea respectivă, atunci există o a doua mulțime ai cărei membri sînt tocmai acei membri ai lui S care au respectiva proprietate; *axioma mulțimii-putere* (IV) spune că pentru orice mulțime S există o a doua mulțime ai cărei membri sînt toate submulțimile lui S; *axioma mulțimii-reuniune* (V) afirmă că pentru orice mulțime S există o a doua mulțime ai cărei membri sînt toți membrii membrilor lui S. Ultimele trei axiome corespund unor presupuneri implicite ale lui Cantor, dar Zermelo adaugă acestui grup o nouă presupunere proprie, numită *axioma alegerii* (VI), conform căreia pentru fiecare mulțime S ai cărei membri sînt mulțimi disjuncte două cîte două și distincte de mulțimea nulă există

[39] „Über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, LXV (1908), p. 261—281.

cel puțin o submulțime a mulțimii sale reuniune care conține un membru și numai unul din fiecare dintre membrii lui S. Independența acestei axiome și pînă și admisibilitatea ei au fost dezbătute foarte mult de către matematicienii de mai tîrziu. În sfîrșit, întrucît nici una dintre axiomele menționate pînă acum nu garantează *în mod necondiționat* existența unor mulțimi, Zermelo stabilește în *axioma mulțimilor elementare* (II) și în *axioma infinitului* (VII) că în domeniul mulțimilor există cel puțin o mulțime care conține ca membru mulțimea nulă și este astfel construită încît dacă ea include un membru oarecare A atunci ea include și clasa unitate {A}, adică clasa al cărei unic membru este A. Așadar, ca să folosim o expresie vagă, toate mulțimile reclamate de această prezentare axiomatică a teoriei sînt generate într-un fel sau altul pornind de la mulțimea nulă și se asigură infinitatea în același mod ca la Frege. Nu se face nici o distincție de tipuri, dar contradicțiile cunoscute sînt evitate prin procedeul limitării discuției la mulțimile care *nu sînt prea cuprinzătoare*. În particular, domeniul (*Bereich*) mulțimilor nu este el însuși admis în calitate de mulțime. Dar J. von Neumann, care a construit el însuși un sistem revizuit de axiome pentru teoria mulțimilor, argumentează în mod convingător că admiterea unor mulțimi foarte largi, ca cea de mai sus, nu creează un pericol suplimentar, cu singura condiție ca să nu presupunem niciodată că o mulțime tot atît de cuprinzătoare ca mulțimea tuturor lucrurilor în genere este capabilă să fie un *membru* al vreunei mulțimi[40].

În afară de faptul că nu înglobează nici o distincție de tipuri, versiunea zermeliană a teoriei mulțimilor se deosebește de versiunea lui Whitehead și Russell prin rolul pe care îl atribuie axiomelor. În *Principia Mathematica* se presupune că toate axiomele sînt adevăruri necesare, iar structura globală este concepută de către autori în același mod în care își concepea Euclid *Elementele*. Cu alte cuvinte, nu se face vreo sugestie că ar putea exista o alternativă, exceptînd eventual un sistem cu același conținut în care unele axiome prezente ar apare ca teoreme, iar unele teoreme prezente ar apare ca axiome. Fără îndoială, Russell își face păreri greșite cu privire la axioma sa de reductibilitate și axioma sa a infinitului, dar el continuă să creadă că dacă ele urmează în genere să fie acceptate, ele trebuie să fie acceptate ca adevăruri și de aceea emite cît mai multe considerente pentru a-și convinge cititorul sau cel puțin a-l face să încline de partea

[40] „Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, CLX (1929) pp. 227—241. În unele scrieri ulterioare, de ex. *Axiomatic Set Theory* de P. Bernays și A. Fraenkel, termenul „mulțime" este rezervat pentru entități capabile de apartenență ca membri, deși termenul „clasă" este utilizat într-un mod mai larg.

sa. Zermelo, fără îndoială, vrea şi el ca axiomele sistemului său să apară plauzibile, dar el le prezintă mai curînd ca un geometru modern care ar prezenta un sistem de axiome pentru o geometrie neeuclidiană. Dacă sistemul de axiome este consistent, el delimitează un obiect de studiu şi oferă o definiţie implicită a semnului de apartenenţă, semn utilizat ca simbol primitiv în formularea axiomelor.

Noţiunea de definiţie implicită datează încă de la Gergonne, dar importanţa pe care o prezintă pentru matematicienii moderni axiomatica formală, ca opusă axiomaticii materiale, se datorează în mare parte operei lui Hilbert. În *Grundlagen der Geometrie* (1899), Hilbert a construit primul ansamblu de axiome cu adevărat satisfăcător pentru geometria euclidiană, iar într-un articol din 1904 cu privire la fundamentele logicii şi matematicii, el a sugerat un program de eliminare a paradoxurilor tocmai descoperite prin axiomatizarea logicii, aritmeticii, analizei şi teoriei mulţimilor[41]. Hilbert nu considera că matematica s-ar reduce la logică, ci mai curînd că ele trebuie elaborate împreună pentru ca să se poată demonstra apoi că întregul sistem este liber de orice contradicţie. Articolul este o simplă schiţă, dar el prezintă deja unele principii călăuzitoare ale lui Hilbert şi în particular încrederea sa în metoda axiomatică, încredere care este exprimată mai deplin în opera sa ulterioară şi îndeosebi într-un articol din 1922:

„Metoda axiomatică este acum şi întotdeauna instrumentul adecvat cugetului uman şi indispensabil în orice cercetare exactă din orice domeniu. Din punct de vedere logic, ea este inatacabilă şi în acelaşi timp rodnică. Totodată, ea asigură cercetătorului cea mai deplină libertate de mişcare. A proceda axiomatic înseamnă în acest sens pur şi simplu a gîndi în cunoştinţă de cauză. Înainte, cînd nu aplicau metoda axiomatică, oamenii credeau cu un dogmatism naiv în diverse conexiuni. Axiomatica înlătură această *naïveté*, dar ne lasă totuşi avantajele opiniei"[42].

Explicaţia ultimei propoziţii citate precum şi motivaţia întregii opere a lui Hilbert în fundamentele matematicii apar cel mai clar în eseul său din 1926 „Despre infinit"[43]. Hilbert ne spune acolo că rolul infinitului în matematică este acel al unei Idei a Raţiunii în filosofia lui Kant: infinitul transcende întreaga experienţă şi, într-un fel, o completează. Cu alte cuvinte, teoria infinitului actual diferă radical de matematica constructivă, dar nu trebuie să o respingem din acest motiv. Dimpotrivă, trebuie să o salutăm ca „pe cea mai

---

[41] „Über die Grundlagen der Logik und Mathematik", *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg* (1904), pp. 174—185.

[42] „Neubegründung der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, I (1922), pp. 157—177.

[43] „Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, XCV (1926), pp. 161—190.

admirabilă înflorire a spiritului matematic" şi să încercăm s-o păstrăm cu cea mai mare grijă intelectuală. Pe scurt, „nu trebuie să lăsăm pe nimeni să ne alunge din paradisul pe care ni l-a creat Cantor". Aceste observaţii sînt îndreptate în mod evident împotriva lui Brouwer, ca şi afirmaţia făcută ceva mai jos în acel articol că orice problemă matematică este rezolvabilă. Dar cu toate acestea, Hilbert este de acord cu Brouwer în ce priveşte primatul intuiţiei şi al raţionamentului constructiv. El consideră că în matematică raţionamentul de bază, pe care el îl numeşte *finitist*, este un gen de „reflecţie directă asupra conţinutului care procedează fără presupuneri axiomatice şi prin intermediul unor experimente mintale cu obiectele imaginate în toată concretitudinea lor" şi prin utilizarea inducţiei matematice sau a raţionamentului prin recurenţă, căruia Poincaré îi acorda o însemnătate supremă[44]. Hilbert se deosebeşte însă prin aceea că consideră că matematica clasică cu teoremele sale „ideale" inaccesibile prin metode finitiste poate fi totuşi păstrată ca un bun de preţ dacă putem demonstra prin raţionamente finitiste consistenţa axiomelor din care este deductibilă. Programul său a fost caracterizat ca un plan de reducere la absurd a intuiţionismului strict[45], dar el nu este menit să fie o simplă polemică. Dimpotrivă, după Hilbert, necesitatea aplicării metodelor intuiţioniste în demonstrarea consistenţei aritmeticii clasice survine din însăşi natura problemei.

Un sistem suficient pentru deducerea teoriei numerelor, a analizei clasice şi a teoriei mulţimilor, trebuie să conţină nu numai regulile şi axiomele calculului restrîns al funcţiilor propoziţionale, ci şi axiomele lui Frege pentru identitate, axiome ale numărului ca cele ale lui Peano, precum şi axiome de apartenenţă ca acelea ale lui Zermelo, sau în orice caz, axiome de aceeaşi tărie ca totalitatea celor menţionate. Hilbert nu consideră raţional să numim logică tot acest amalgam, dar este evident că denumirea utilizată nu are mare importanţă şi nici măcar problema independenţei tuturor axiomelor nu trebuie să ne preocupe prea mult. Esenţial este că sistemul în ansamblu trebuie să fie demonstrat a fi consistent, iar în acest scop metodele uzuale sînt inaplicabile. Întrucît sistemul trebuie să trateze proprietăţile mulţimilor actual infinite, nu putem da o demonstraţie absolută de consistenţă a sistemului prin construirea unei mulţimi de obiecte ale căror relaţii satisfac toate condiţiile stipulate de axiome. Într-adevăr, deşi noţiunea noastră matematică de continuitate a fost sugerată iniţial prin reflecţie asupra continuităţii în lumea sensibilă,

---

[44] D. Hilbert şi P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, p. 20.

[45] J. von Neumann, „Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, XXVI (1927), pp. 1—46.

nu avem nici o garanție că cerințele ideii matematice sînt satisfăcute de orice întindere sau durată a căror continuitate o putem percepe și nu există un alt dat al experienței în care ar mai fi plauzibil să căutăm o mulțime actual infinită de elemente. De asemenea, nu putem da nici o demonstrație relativă a consistenței mulțimii axiomelor arătînd că toate axiomele sînt traductibile în enunțuri ale unui alt sistem, așa cum axiomele geometriei neeuclidiene sînt traductibile în enunțuri din geometria euclidiană; nu există un alt sistem a cărei consistență să fie cunoscută și care să pară suficient de cuprinzător pentru a permite o asemenea traducere[46]. Dar ne putem considera în măsură să atingem acest obiectiv pe altă cale. Afirmația că sistemul este consistent este echivalentă cu afirmația că aplicarea regulilor de inferență la axiome nu poate duce la două consecințe dintre care una este negația celeilalte. Nu am putea să demonstrăm aceasta raționînd la un nivel mai înalt, adică nu în cadrul sistemului, ci raționînd despre sistem sau, pentru a fi mai riguroși, raționînd despre formulele în care este exprimat sistemul? Formulele axiomatice sînt în număr finit și o deducție trebuie să fie un șir finit de pași efectuat în conformitate cu o anumită regulă dintr-un număr finit de reguli; ca atare, nu este evident că ar fi absurd să presupunem că demonstrația de consistență cerută poate fi obținută în acest mod aplicînd metode finitiste de raționament; așa cum în teoria elementară a numerelor aceste metode sînt suficiente pentru demonstrarea imposibilității găsirii a două numere naturale m și n astfel încît $m^2 = 2n^2$, tot astfel în această nouă cercetare denumită *teoria demonstrației* sau *metamatematică*, aceste metode pot fi suficiente pentru demonstrarea imposibilității găsirii a două deducții care duc de la axiomele date la concluzii contradictorii.

Începînd din 1917, Hilbert a lucrat la acest proiect cu diferiți colegi ai săi, iar în 1934 și 1939 a publicat, împreună cu P. Bernays, cele două volume din *Grundlagen der Mathematik* care explică situația și înfățișează rezultatele obținute pînă la data apariției. În această lucrare, autorii admit că ei sînt încă departe de soluția problemei fundamentale și vom vedea acum că avem temeiuri să credem că această problemă nu poate fi vreodată rezolvată în mod complet, așa cum s-a considerat inițial, dar nu încape îndoială că studiul inițiat de Hilbert a fost extrem de rodnic. Într-adevăr, în afară de problema consistenței, există numeroase probleme privitoare la sistemele deductive pentru care tehnica sugerată de el pare adecvată; în particular, probleme privitor la completitudinea sistemelor de axiome și la

[46] D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, p. 14 și urm.; vezi totuși conjectura lui Kleene și Heyting, menționată în secțiunea precedentă.

posibilitatea elaborării unor proceduri de decizie sau reguli de calcul pentru rezolvarea unor probleme din diferite ramuri ale matematicii. În toate aceste cercetări, esențial este ca teoria investigată să fie formalizată prin intermediul unui simbolism strict logic, așa că putem spune că cel puțin aici opera lui Leibniz și Frege s-a soldat cu rezultate importante pentru progresul matematicii, deși poate nu cu rezultatele așteptate de ei.

Uneori filosofia hilbertiană a matematicii este numită formalism, și la fel cum formaliștii secolului al XIX-lea erau atacați de către Frege, tot astfel Hilbert este atacat de Brouwer pentru că nu apreciază *conținutul* real al matematicii. Oponenții lui Frege susțineau că s-ar putea introduce prin definiții creatoare genuri noi de numere și că, dacă aceste definiții nu duc la nici o contradicție, ar fi inutil să căutăm orice altă demonstrație de existență a numerelor. La aceasta Frege răspundea că nu poate exista o altă demonstrație de necontradicție decît producerea unui exemplu și că inferența reciprocă era eronată. Hilbert argumentează însă că consistența unui sistem de postulate poate fi stabilită fără să construim un model. La aceasta Brouwer răspunde că intuiționismul nu presupune o inconsistență în aplicarea principiului terțului exclus la mulțimile infinite și că chiar dacă Hilbert ar reuși să realizeze ceea ce și-a propus, el nu ar face nimic pentru demonstrarea adevărului enunțurilor sale „ideale", deoarece încercarea de justificare a matematicii formaliste printr-o demonstrație a consistenței sale conține un cerc vicios. Ni se cere să acceptăm corectitudinea unui sistem de postulate atunci cînd s-a demonstrat că acestea nu duc la o autocontradicție; dar, după Brouwer această justificare nu are nici o valoare dacă nu sîntem deja în măsură să acceptăm principiul după care corectitudinea unei propoziții urmează din absurditatea absurdității sale și că aceasta este de fapt o altă versiune a legii terțului exclus[47]. După părerea sa, o teorie nu poate pretinde să fie adevărată numai pentru că s-a demonstrat că nu conține nici o contradicție, tot așa cum un răufăcător nu poate fi numit om cinstit pentru că s-a demonstrat că fapta sa nu poate fi pedepsită conform legilor în vigoare în țara respectivă. Așa cum a scris Fraenkel:

„Acel ce crede pînă la capăt în axiomatică privește problema lui Hilbert ca problemă supremă a întregii matematici, iar răspunsul la această problemă l-ar considera ca pe unul din cei mai îndrăzneți, mai originali și mai importanți pași în dezvoltarea problemei cunoașterii; dar pentru intuiționistul consecvent problema este lipsită cu desăvîrșire de orice semnificație în singurul punct care contează"[48].

---

[47] „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie, Phys.-math. Klasse*, 1928, pp. 48—52.

[48] *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 381.

Controversa este foarte ciudată ; părţile în dispută par să raţioneze avînd în vedere obiective diametral opuse. Brouwer vorbeşte ca şi cum Hilbert ar încerca să demonstreze adevărul axiomelor sale, şi deci adevărul celor ce rezultă din aceste axiome, prin demonstrarea consistenţei interne a axiomelor. Dar atunci cînd Hilbert trece la axiomatizarea întregii matematici, el consideră probabil axiomele sale ca postulate care determină sensul simbolurilor, altfel nedefinite, de care face uz. Dacă aşa stau lucrurile, o entitate matematică trebuie să fie pentru el tocmai ceea ce permit axiomele sale, nici mai mult nici mai puţin, şi orice enunţ matematic trebuie să aibă acelaşi statut ca un enunţ al geometriei pure, de ex. ca aserţiunea că într-un triunghi riemannian suma unghiurilor interne este mai mare ca două unghiuri drepte. În această interpretare, matematica axiomatizată a lui Hilbert nu este expusă obiecţiilor lui Brouwer. Într-adevăr, oricine vorbeşte despre numere reale în modul propus de Hilbert va utiliza expresia „număr real" pentru a desemna orice obiect care satisface anumite condiţii şi astfel enunţurile sale vor fi, de fapt, afirmaţii că axiomele sale au în virtutea formei lor anumite consecinţe. Într-un cuvînt, ele vor fi adevăruri ale logicii pure. Pe de altă parte, nu este limpede dacă Hilbert este satisfăcut cu această concluzie, după cum nu este limpede nici ce crede el despre relaţia ultimă dintre matematica axiomatizată şi cea constructivă. Uneori se pare că după o demonstraţie a consistenţei axiomelor sale prin metode constructive el ar fi bucuros să uite deosebirea şi să trateze matematica neconstructivă ca o continuare a matematicii constructive. Dar această atitudine nu poate fi corectă, dacă el şi Brouwer au dreptate considerînd că matematica constructivă presupune comprehensiunea unui obiect special ; se pare că nu avem nici o garanţie că teoremele la care ajungem fără această intuiţie comprehensivă privesc acelaşi obiect. Aşadar, o teoremă care poartă asupra numerelor naturale dar este demonstrată neconstructiv (de exemplu, prin recurs la analiza clasică) ar putea să nu privească în realitate numerele naturale în sensul iniţial. Se pare că la aceasta se referea Heyting spunînd că subiectul matematicii intuiţioniste, şi anume gîndirea matematică constructivă, „se plasează alături şi nu înăuntrul matematicii clasice, care studiază un alt obiect, oricare ar fi el."[49]

Aşa cum am remarcat anterior, avem motive să credem că programul lui Hilbert nu va putea fi niciodată îndeplinit integral, dar impulsul pe care acest program l-a dat studierii sistemelor de axiome a dus la unele descoperiri foarte interesante cu privire la proprietăţile logicii şi ale diverselor alte sisteme deductive. Ele vor constitui subiectul ultimului nostru capitol.

[49] *Intuitionism, An Introduction*, p. 4.

XII

TEORIA SISTEMELOR DEDUCTIVE

1. *Metateoria logicii primare*

În 1926, P. Bernays, unul dintre colaboratorii lui Hilbert, a publicat o cercetare asupra axiomatizării calculului propoziţiilor din *Principia Mathematica*[1]. Majoritatea rezultatelor sale el le obţinuse cu opt ani înainte, cînd şi-a scris teza de doctorat (unde se ocupă de asemenea cu posibilitatea înlocuirii axiomelor prin reguli de inferenţă), dar unele dintre acestea au fost între timp publicate de către E. L. Post, care le-a descoperit în mod independent în cadrul cercetărilor asupra proprietăţilor tabelelor de adevăr[2]. Într-un capitol anterior am arătat că cele trei chestiuni mai importante care se pun în legătură cu mulţimile de axiome sînt consistenţa, independenţa şi completitudinea; în această secţiune vom arăta cum se rezolvă asemenea probleme, referindu-ne la axiomatizarea calculului propoziţiilor înfăţişată în *Principia Mathematica*.

Poate că ar fi de prisos să mai demonstrăm consistenţa axiomelor şi regulilor de inferenţă stabilite de către Whitehead şi Russell în logica lor primară (căreia ei îi zic teoria deducţiei), deoarece fiecare dintre aceastea este prezentată acolo cu o explicaţie care o face acceptabilă prin propriile ei merite. Dar pentru programul de formalizare este important că se poate demonstra consistenţa unui sistem axiomatizat fără a recurge la interpretarea obişnuită şi este interesant de văzut cum se poate face aceasta în cazul foarte simplu unde Brouwer şi intuiţioniştii susţin că ne ameninţă pericolul inducerii în eroare datorat tradiţiei noastre logice. Însă, înainte de toate, este necesar să ne lămurim ce înţelegem în acest context prin „consistenţă". Nu este suficient să spunem că axiomele nu trebuie să se contrazică una pe alta în ce priveşte semnificaţia lor; căci acum vrem să gîndim asupra lor într-un mod pur formalist, iar în plus consistenţa care ne interesează nu este o proprietate a mulţimii de axiome considerată ca atare ci mai curînd o proprietate a sistemului format de axiome

---

[1] „Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der *Principia Mathematica*", *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 305–320.

[2] „Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *The American Journal of Mathematics*, XLIII (1921), pp. 63–185.

şi reguli de inferenţă. Ceea ce dorim să arătăm este că procedurile de substituţie şi detaşare care sînt permise în acest calcul nu pot niciodată să ne conducă de la axiomele

$$
\begin{array}{ll}
(p \vee p) \supset p & \textit{Taut} \\
q \supset (p \vee q) & \textit{Add} \\
(p \vee q) \supset (q \vee p)] & \textit{Perm} \\
[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)] & \textit{Assoc} \\
(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)] & \textit{Sum},
\end{array}
$$

în care o expresie de forma $P \supset Q$ trebuie considerată ca o abreviere pentru o expresie de forma $\sim P \vee Q$, la o pereche de formule care se află în aceeaşi relaţie ca P şi $\sim P$. O asemenea prezentare a chestiunii acoperă cererea ca nici o pereche de axiome să nu se afle într-o relaţie nedezirabilă, deoarece se poate spune că fiecare axiomă se obţine din ea însăşi, în mod banal, prin substituţia identitate (adică o substituţie care lasă nealterate literele iniţiale); dar este mai comprehensiv şi mai eficient să spunem că calculul este consistent dacă şi numai dacă există *o* formulă care *nu* se poate obţine în cadrul său. Căci dacă ar fi posibil să derivăm atît P cît şi $\sim P$, atunci printr-o argumentare ca cea dată de Pseudo-Scotus se poate arăta că ar fi posibil să derivăm orice altă formulă Q.

După ce ne-am clarificat obiectivul, să vedem cum îl putem atinge. Evident nu putem examina pe rînd toate derivările construibile în calcul, deoarece numărul acestora nu este limitat; dar putem încerca să demonstrăm ceea ce urmărim, raţionînd asupra proprietăţilor generale ale derivării. Or, a spune că o anumită formulă poate fi obţinută prin treceri permise de la axiome înseamnă a spune ceva cu privire la calcul fără a ne referi la vreo anumită interpretare; dar tocmai de aceea aserţiunea va fi valabilă pentru toate interpretările satisfăcătoare şi deci ea ar putea fi respinsă prin indicarea unei singure interpretări pentru care este în mod vădit fals că formula ar fi derivabilă din axiome. Însă în acest context o interpretare este satisfăcătoare dacă şi numai dacă elementele pe care ea le permite ca valori posibile pentru variabilele p, q, r etc. formează un grup[3], să zicem G, pentru care se pot defini o operaţie unară reprezentată prin $\sim$ şi o operaţie binară reprezentată prin $\vee$ astfel încît: (I) G este închis relativ la aceste operaţii, adică repetările acestor operaţii nu conduc niciodată în afara lui G, (II) toate axiomele primesc valori marcate, adică valori care cad în interiorul unui subgrup propriu al lui G, să zicem G*, şi (III) dacă două elemente oarecare reprezen-

[3] Sensul în care Bernays utilizează acest cuvînt nu presupune satisfacerea tuturor condiţiilor din teoria matematică a grupurilor de către clasa valorilor.

tate prin P şi $\sim P \vee Q$ sînt amîndouă în G*, atunci şi elementul reprezentat prin Q este în G. În interpretarea obişnuită pe care o vizează Whitehead şi Russell, G = {adevăr, fals} şi G* = {adevăr}, iar $\sim$ are sensul de negaţie şi $\vee$ are sensul de disjuncţie. Dar, dacă vrem, putem lua G = {0, 1}, G* = {0}, $\sim P = 1 - P$ şi $P \vee Q = P \times Q$, unde formulele nu sînt propoziţionale ci numerice iar derivarea nu este inferenţă, ci simplă trecere de la un semn numeric la alt semn numeric în concordanţă cu anumite reguli. Această a doua interpretare seamănă cu algebra lui Boole pentru 0 şi 1, dar aici în locul lui 1 valoarea marcată este 0, iar disjuncţiei îi corespunde înmulţirea şi nu adunarea. Pentru a evita confuzii cu noţiunile uzuale, să vedem ce ne poate da această schemă numerică.

Dacă ţinem seama de definiţia semnului $\supset$ şi utilizăm egalităţile de mai sus pentru determinarea semnificaţiei semnelor $\sim$ şi $\vee$, putem constata că toate axiomele calculului au valoarea marcată (sau preferată), indiferent de valoarea, 0 sau 1, pe care o atribuim variabilelor care figurează în ele. Aşa de exemplu

$$(p \vee p) \supset p = \sim(p \vee p) \vee p$$

şi dacă punem

$$p = 0$$

obţinem

$$\sim(0 \vee 0) \vee 0 = [1 - (0 \times 0)] \times 0 = 0,$$

iar dacă punem

$$p = 1$$

obţinem:

$$\sim(1 \vee 1) \vee 1 = [1 - (1 \times 1)] \times 1 = 0.$$

Mai departe, este evident că nici substituţia şi nici detaşarea nu pot conduce de la o axiomă sau două axiome din calcul decît la o formulă care are valorea 1. Căci dacă fiecare axiomă are valoarea 0, oricare ar fi valorile atribuite variabilelor care intervin în ea, atunci orice formulă derivată de aici prin substituţie pentru variabilele sale păstrează aceeaşi valoare în aceleaşi condiţii. Şi este de asemenea garantat că dacă P şi $\sim P \vee Q$ au amîndouă valoarea 0, atunci şi formula Q trebuie să aibă această valoare; în adevăr

$$0 = \sim P \vee Q = (1 - 0) \times Q = Q.$$

Dar aceste rezultate sînt suficiente pentru a stabili consistenţa calculului; conform cu interpretarea pe care o considerăm, toate formulele derivabile din calcul trebuie să aibă valoarea 0, astfel încît este imposibil ca două din ele să fie în aceeaşi relaţie ca P şi $\sim P$, care necesarmente au valori diferite în această interpretare.

Această demonstrație are marele merit de a fi independentă de interpretarea uzuală pe care o vizează calculul construit de Whitehead și Russell, dar utilizarea numerelor în cadrul acesta poate da naștere eventual la neînțelegeri. În primul rînd, cineva ar putea crede că argumentarea se referă doar la o demonstrație relativă de consistență, interpretîndu-se axiomele logicii în cadrul artimeticii. Dar această opinie este eronată, deoarece axiomele logicii propoziționale nu sînt transformate aici în *enunțuri* aritmetice, ci doar în semne numerice, iar raționamentul ulterior este cu totul diferit de cel cu ajutorul căruia se poate arăta că un sistem de geometrie este consistent în ipoteza că aritmetica n-ar fi contradictorie. Și totuși, se pare că unii cercetători au fost induși în eroare de această falsă analogie. În al doilea rînd, chiar dacă evităm acest pericol, am putea să cădem în eroarea de a presupune că introducerea numerelor ca valori pentru variabile este esențială pentru construcția unei demonstrații de felul celei date mai sus. De fapt însă, important este doar numărul valorilor alese și felul în care ele se leagă, adică *structura* interpretării, așa că, dacă vrem, putem reformula demonstrația astfel încît ea să nu cuprindă nici un apel la entități asemănătoare cu numerele, ci doar o grupă de valori care satisfac anumite condiții formale. De exemplu, putem pune $G = \{\alpha, \beta\}$ și $G^* = \{\alpha\}$ fără a specifica cine sînt α și β, ci adăugînd numai egalitățile:

$$\sim \alpha = \beta, \qquad \sim \beta = \alpha,$$
$$\alpha \vee P = P \vee \alpha = \alpha, \qquad \beta \vee \beta = \beta.$$

De fapt, acesta a și fost procedeul utilizat de către Bernays în articolul amintit mai sus și îl vom utiliza și noi în cele ce urmează, numai că — întrucît este mai convenabil — vom rezuma egalitățile de mai sus cu ajutorul unei matrici asemănătoare cu tabela de mai jos, unde asteriscul arată că este vorba de valoarea marcată:

$\vee$	α	β	$\sim$
$*\alpha$	α	α	β
β	α	β	α

Cercetînd independența axiomelor calculului propozițiilor din *Principia Mathematica*, Bernays a găsit că teza pe care Whitehead și Russell o numeau *Assoc* poate fi derivată din celelalte patru axiome și ca atare este redundantă. După cum ne putem aștepta, derivarea nu este deloc evidentă; dar ea nu cuprinde nimic nou în principiu, deoarece este construită în cadrul calculului. Cu totul altceva este de a demonstra că celelalte patru axiome sînt independente una de alta Aici trebuie în fiecare caz să arătăm că trecerile permise nu pot conduce niciodată de la trei formule date la a patra, ceea ce nu se poate face examinînd toate derivările posibile pornind de la cele

trei formule date. Dar tot așa cum se poate arăta că axiomele unui sistem de geometrie sînt independente, prin dezvoltarea unei tehnici de interpretare care este utilizată și pentru demonstrația consistenței, tot astfel și aici independența fiecărei axiome față de celelalte trei se poate demonstra cu ajutorul unui ansamblu de egalități, sau al unei matrici, ansamblu adecvat pentru celelalte trei. Metoda va deveni mai clară pe baza unui exemplu.

Să presupunem că vrem să demonstrăm independența axiomei *Taut* în raport cu *Add, Perm* și *Sum*. Sarcina noastră este îndeplinită dacă putem găsi o matrice care să satisfacă următoarele condiții: (1) elementele ei să formeze un grup închis față de operațiile reprezentate prin semnele primitive; (2) în cadrul interpretării specificate de matrice formulele *Add, Perm* și *Sum* obțin o valoare marcată indiferent de valorile atribuite variabilelor care figurează în ele; (3) elementele sînt astfel așezate în matrice încît dacă P și $\sim P \vee Q$ au amîndouă o valoare marcată, atunci și Q are o valoare marcată (ceea ce are ca rezultat că toate formulele derivabile din cele trei axiome menționate în concordanță cu regulile permise de substituție și detașare au o valoare marcată); (4) în cadrul acestei interpretări formula *Taut* nu ia întotdeauna o valoare marcată. Primele trei cereri sînt exact acelea pe care trebuie să le impunem atunci cînd vrem să demonstrăm consistența mulțimii formată exact din *Add, Perm* și *Sum*, iar efectul celei de a patra este de a ne asigura că matricea poate fi un contraexemplu suficient pentru a proba imposibilitatea de a deriva *Taut* din mulțimea dată cu ajutorul regulilor de derivare din acest calcul. În fapt, toate cele patru condiții sînt satisfăcute de către schema de mai jos

$\vee$	α	β	γ	$\sim$
$*\alpha$	α	α	α	β
β	α	β	γ	α
γ	α	γ	α	γ

în care *Add, Perm* și *Sum* au întotdeauna o valoare marcată, dar nu și *Taut*, deoarece $(\gamma \vee \gamma) \supset \gamma = \gamma$.

Independența fiecăreia dintre celelalte trei axiome se poate arăta în mod asemănător. Matricile convenabile sînt:

$\vee$	α	β	γ	δ	$\sim$
$*\alpha$	α	α	α	α	β
β	α	β	β	β	α
$*\gamma$	α	β	γ	γ	δ
δ	α	β	γ	δ	γ

unde *Taut, Perm* şi *Sum* au întotdeauna o valoare marcată, dar nu şi *Add*, deoarece $\gamma \supset (\beta \vee \gamma) = \beta$;

$\vee$	α	β	γ	δ	$\sim$
$*\alpha$	α	α	α	α	β
β	α	β	γ	δ	α
γ	α	γ	γ	α	α
δ	α	δ	δ	δ	γ

unde *Taut, Add* şi *Sum* au întotdeauna o valoare marcată, dar nu şi *Perm*, deoarece $(\gamma \vee \delta) \supset (\delta \vee \gamma) = \delta$;

$\vee$	α	β	γ	δ	$\sim$
$*\alpha$	α	α	α	α	β
β	α	β	γ	δ	α
γ	α	γ	γ	α	δ
δ	α	δ	α	δ	α

unde *Taut, Add* şi *Perm* au întotdeauna o valoare marcată, dar nu şi *Sum*, deoarece

$$(\delta \supset \beta) \supset [(\gamma \vee \delta) \supset (\gamma \vee \beta)] = \gamma.$$

Merită să observăm că toate matricile utilizate aici pentru demonstrarea independenţei permit mai mult decît două valori şi că una din ele permite mai mult decît o singură valoare marcată; dar ar fi o eroare să presupunem, aşa cum au făcut unii logicieni, că acesta ar fi un temei pentru a susţine că logica însăşi ar fi multivalentă, afară de cazul cînd cuvîntul „logică" vizează să acopere orice sistem abstract construit printr-o modificare a calculului propoziţiilor. Fără îndoială că sistemul care conţine, în afară de regulile de substituţie şi detaşare, numai axiomele *Add, Perm* şi *Sum* poate fi astfel interpretat, de exemplu în aritmetică, încît fiecare variabilă să admită trei valori proprii; dar el nu poate fi considerat logică în vreunul din sensurile obişnuite ale acestui cuvînt. Iar atunci cînd acest sistem este tratat ca o parte a logicii în sensul obişnuit, el este interpretat astfel încît *Taut* pare necesară deşi este independentă. Pe scurt, literele greceşti din matricile multivalente de mai sus nu trebuie înţelese ca valori de adevăr pentru propoziţii.

În afară de importanţa lor pentru metalogică, aceste demonstraţii de consistenţă şi independenţă pentru o versiune a calculului propoziţiilor prezintă interes deoarece ele ilustrează simplu şi clar felul în

care se poate utiliza noţiunea de model (sau: interpretare) pentru investigarea proprietăţilor unui sistem deductiv. În loc de a spune că formulele iniţiale ale unui calcul implică drept consecinţă o formulă dacă şi numai dacă este imposibil ca primele să fie adevărate fără ca şi ultima să fie adevărată, putem spune că formulele iniţiale implică formula-consecinţă dacă şi numai dacă aceasta din urmă este satisfăcută de către toate interpretările care satisfac primele. După cum am văzut, acest fel de a vedea lucrurile are meritul de a permite demonstraţii de independenţă cu ajutorul unor contraexemple, dar el poate da naştere la confuzii şi paradoxuri. Cît timp avem de-a face cu formulele în care anumite semne, în particular semnele logicii, se presupune că au un sens fixat, nu este greu de văzut ce înţeles are aserţiunea că o anumită interpretare satisface o formulă. În geometrie, de exemplu, spunem că un postulat este satisfăcut de o anumită interpretare a semnelor extralogice care figurează în el atunci cînd interpretarea respectivă îl transformă într-un enunţ adevărat. Dacă însă ne ocupăm cu *toate* semnele care intervin în formulele noastre supunîndu-le interpretării şi reinterpretării — aşa cum este cazul în investigarea calculului propoziţiilor pe care o întreprindem acum —, atunci nu mai este imediat clar ce trebuie înţeles prin „satisfacerea unei formule". Se întîmplă, după cum am văzut şi noi într-un exemplu, că o interpretare transformă o formulă nu într-o expresie propoziţională, ci în desemnare a unui număr; în acest caz, este limpede că rezultatul nu poate fi un enunţ adevărat. Atunci cum se poate vorbi aici despre satisfacere? Cînd am expus demonstraţiile, am ocolit dificultatea cu ajutorul unei definiţii *ad-hoc* pentru interpretarea satisfăcătoare, dar este de dorit să considerăm chestiunea dintr-un punct de vedere mai general.

Oricît de mare ar fi efortul de a ajunge la o abstractizare completă în prezentarea unui calcul, trebuie totuşi să recurgem la limbajul uzual pentru a spune că anumite formule iau o valoare marcată şi, cu ajutorul unei proceduri determinate, generează alte formule cu o valoare marcată. Pe scurt: prezentarea unui calcul este esenţialmente o activitate de ordinul al doilea, care pretinde semne ce nu fac parte din calculul considerat. În lucrările lui Frege precum şi în *Principia Mathematica* semnul asertării serveşte în practică pentru a indica că ceea ce urmează se presupune a fi un truism din logică, iar despre regulile de inferenţă se spune în mod expres că ele sînt permisiuni care nu pot fi formulate în simbolismul convenabil pentru atare truisme[4]. Firesc că, dacă vrem, putem face abstracţie de noţiunea

[4] Distincţia dintre reguli şi premise a fost clarificată de către C. L. Dodgson (Lewis Carroll) în "What the Tortoise said to Achilles", *Mind*, N.S., IV (1895), pp. 278–280.

de adevăr pe care Whitehead şi Russell au luat-o ca valoare marcată în prezentarea calculului lor; putem chiar să facem abstracţie de noţiunea de propoziţie; însă trebuie să reţinem ideea de valoare marcată şi să utilizăm limbajul uzual pentru a vorbi de transmiterea unei asemenea valori de la o formulă la altele. Aşadar, nu putem spune în mod propriu că interpretarea satisface succesiuni de semne vide cum ar fi $(p \vee p) \supset p$; mai curînd trebuie să spunem că interpretarea satisface postulatele de forma „dacă p este în G, atunci $(p \vee p) \supset p$ este în G*."

Într-un articol din 1934, E. V. Huntington a atras atenţia asupra părţii neformale, sau neoficiale, a teoriei deducţiei (adică a calculului propoziţiilor) din *Principia Mathematica* şi a arătat că întreaga teorie (inclusiv axiomele şi regula detaşării) ar putea fi derivată din următoarele opt postulate:[5]

1. Dacă P este în G şi Q este în G, atunci $P \vee Q$ este în G.
2. Dacă P este în G, atunci $\sim P$ este în G.
3. Dacă P este în G*, atunci P este în G.
4. Dacă $P \vee Q$ este în G*, atunci $Q \vee P$ este în G*.
5. Dacă P este în G*, atunci $P \vee Q$ este în G*.
6. Dacă P este în G şi $\sim P$ este în G* atunci P nu este în G*.
7. Dacă P este în G şi $\sim P$ nu este în G*, atunci P este în G*.
8. Dacă $P \vee Q$ este în G* şi $\sim P$ este în G*, atunci Q este în G*.

Aici am folosit simbolismul din *Principia Mathematica* (pe care Huntington nu-l utiliza) pentru a uşura comparaţiile, dar trebuie să fie limpede că aceasta nu ne angajează la interpretarea pe care o adoptă Whitehead şi Russell şi că putem accepta orice interpretare care ne-ar fi de ajutor pentru înţelegerea structurii sistemului determinat de cele opt postulate. Utilizarea cuvintelor din limba obişnuită pentru formularea acestor postulate atrage în mod implicit şi natural ipoteza că principiile logicii uzuale pot fi folosite pentru derivarea consecinţelor, dar acest lucru este inevitabil. Atunci cînd obiectul raţionamentului nostru este raţionamentul însuşi, trebuie să presupunem cunoscute anumite principii, şi singura chestiune pe care trebuie să o decidem este dacă ne permitem un aparat demonstrativ slab sau unul tare. Simplitatea relativă a sistemului de postulate al lui Huntington se datorează faptului că el admite în cadrul formulărilor nu numai vocabulele „dacă" şi „şi", dar şi „nu".

Sistemul de axiome pe care îl propun Whitehead şi Russell pentru calculul propoziţiilor este complet nu numai în sensul că este suficient

[5] "Independent Postulates for the «Informal» Part of *Principia Mathematica*", *Bulletin of the American Mathematical Society*, XL (1934), pp. 127—136.

pentru a demonstra toate formulele care sînt în mod necesar adevărate în virtutea felului particular în care se constituie ele cu ajutorul semnelor de negaţie şi disjuncţie (sau al unor semne care se definesc prin intermediul acestora, cum ar fi semnul conjuncţiei), dar şi în sensul tare că orice adăugare la axiome a unei formule care este compusă în mod convenabil cu ajutorul semnelor din calcul dar nu este derivabilă din ele, conduce în mod necesar la o contradicţie. Pentru a demonstra această teoremă de logică trebuie să începem cu stabilirea cîtorva leme.

În primul rînd vom demonstra în interiorul calculului următoarele biconditionări (sau echivalenţe materiale, cum se numesc ele de obicei):

(1) $\sim \sim p \equiv p$ (2) $p \vee p \equiv p$ (3) $p \cdot p \equiv p$
(4) $p \vee q \equiv q \vee p$ (5) $p \cdot q \equiv q \cdot p$
(6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (7) $p \cdot (q \cdot r) \equiv (p \cdot q) \cdot r$
(8) $p \vee (q \cdot r) \equiv (p \vee q) \cdot (p \vee r)$ (9) $p \cdot (q \vee r) \equiv (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$
(10) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \cdot \sim q$ (11) $\sim (p \cdot q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

Aici (1), (2) şi (3) sînt principii de simplificare care permit eliminarea unor repetări, (4) şi (5) sînt legi comutative care permit modificări ale ordinii, (6) şi (7) sînt legi asociative care ne îngăduie să facem abstracţie de paranteze în anumite situaţii şi, la nevoie, să scriem $p \vee q \vee r$, respectiv $p \cdot q \cdot r$, (8) şi (9) sînt legi distributive care ne permit ca în anumite circumstanţe să trecem de la o expresie disjunctivă la o expresie în care conectivul principal este semnul conjuncţiei, sau reciproc, iar (10) şi (11) sînt regulile lui De Morgan care ne permit să evităm negarea unor expresii complicate. Toate aceste biconditionări, dacă sînt interpretate în conformitate cu instrucţiunile precizate de Whitehead şi Russell, sînt evidente, aşa încît pare pretenţios să le derivăm din cele patru axiome independente ale calculului; de fapt, nici nu vom recurge aici la argumentări atît de largi, dar pentru demonstraţia completitudinii este esenţial faptul că aceste derivări se pot realiza.

Apoi vom demonstra că pentru orice funcţie de adevăr $\mathfrak{F}$ de un argument este permis să afirmăm:

$$(12)\ (p \equiv q) \supset [\mathfrak{F}(p) \equiv \mathfrak{F}(q)].$$

Deoarece în *Principia Mathematica* toate expresiile propoziţionale se pot reduce la expresii în care în afară de literele propoziţionale figurează doar semnele negaţiei şi disjuncţiei, începem prin a demonstra următoarele trei cazuri particulare pentru (12):

$$(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$$
$$(p \equiv q) \supset [(r \vee p) \equiv (r \vee q)]$$
$$(p \equiv q) \supset [(p \vee r) \equiv (q \vee r)].$$

Şi aici demonstraţiile se pot executa în cadrul calculului fără introducerea vreunui principiu nou. Dar nu mai putem executa tot în cadrul calculului raţionamentul care justifică pe (12) în întreaga sa generalitate pe temeiul că (12) se poate demonstra pentru orice particular $\mathfrak{F}$ prin aplicarea repetată a celor trei reguli simple în ordinea necesară pentru a stabili teorema complicată respectivă, cu toate că acest raţionament este în mod evident valid. Demonstraţia fiecărui caz particular determinat aparţine calculului dar demonstraţia generalizării nu-i aparţine.

Importanţa lui (12) este aceea că sîntem astfel îndrituiţi să utilizăm principiile (1)—(11) pentru transformarea unor părţi din formule sau a unor formule întregi în vederea reducerii oricărei expresii în care figurează funcţiile de adevăr la o expresie echivalentă în formă *normală conjunctivă*, adică o expresie care este o conjuncţie de disjuncţii astfel încît toate componentele tuturor disjuncţiilor sînt sau semne propoziţionale atomice sau negaţii ale unora dintre acestea. Pentru a ajunge de la o expresie la forma normală conjunctivă trebuie să executăm trei operaţii principale, în ordinea următoare: (I) eliminarea semnelor $\supset$ şi $\equiv$ din toate locurile unde figurează cu ajutorul definiţiilor obişnuite; (II) eliminarea semnelor de negaţie care se află în faţa parantezelor cu ajutorul regulilor lui De Morgan; (III) eliminarea semnelor de conjuncţie care figurează în interiorul parantezelor cu ajutorul legii de distributivitate. De asemenea trebuie să fie eliminate negaţiile duble oriunde intervin şi trebuie să executăm peste tot simplificările şi schimbările de ordine necesare. Ca exemplu de asemenea reducere putem considera următorul şir de expresii echivalente în care toate transformările diferite sînt executate separat:

$$
\begin{aligned}
(p \supset q) &\equiv (\sim q \supset \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (\sim q \supset \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (\sim \sim q \vee \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (q \vee \sim p)\\
[(\sim p \vee q) \supset (q \vee \sim p)] &\cdot [(q \vee \sim p) \supset (\sim p \vee q)]\\
[\sim (\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [(q \vee \sim p) \supset (\sim p \vee q)]\\
[\sim (\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [\sim (q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(\sim \sim p \cdot \sim q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [\sim (q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \cdot \sim q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [\sim (q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \cdot \sim q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [(\sim q \cdot \sim \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \cdot \sim q) \vee (q \vee \sim p)] &\cdot [(\sim q \cdot p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \vee q \vee \sim p) \cdot (\sim q \vee q \vee \sim p)] &\cdot [(\sim q \cdot p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \vee q \vee \sim p) \cdot (\sim q \vee q \sim p)] &\cdot [(\sim q \vee \sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim p \vee q)]\\
(p \vee q \vee \sim p) \cdot (\sim q \vee q \vee \sim p) &\cdot (\sim q \vee \sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim p \vee q).
\end{aligned}
$$

Oricît de complicată ar fi formula cu care începem, este limpede că aplicările succesive ale operaţiilor detaliate mai sus trebuie să conducă în final la o expresie în formă normală dorită. În fiecare caz particular reducerea se poate realiza în cadrul calculului propoziţiilor dar, încă o dată, generalizarea de care avem nevoie pentru demonstrarea completitudinii trebuie să fie stabilită printr-un raţionament exterior calculului.

Pot exista diferite expresii în forma normală conjunctivă, care sînt toate logic echivalente cu o expresie dată ; dar această multitudine nu prezintă importanţă, deoarece pentru argumentarea care urmează fiecare dintre aceste expresii este la fel de bună ca celelalte. Dacă după ce s-a operat reducerea la forma normală conjunctivă găsim, ca în exemplul de mai sus, că fiecare dintre disjuncţiile conjuncţiei conţine simultan o anumită expresie atomică şi negaţia ei, atunci expresia iniţială trebuie să fie necesarmente adevărată în virtutea formei sale şi derivabilă din axiomele calculului prin intermediul derivării formei normale echivalente. Într-adevăr, este uşor de dedus în interiorul calculului (I) disjuncţia oricărei formule cu negaţia ei, (II) disjuncţia unui truism astfel stabilit cu orice altă formulă şi (III) conjuncţia oricărui număr de formule deja demonstrate. Dar putem merge mai departe şi să afirmăm că fiecare enunţ care este necesarmente adevărat în virtutea formei sale ca funcţie de adevăr se poate deriva în acest fel din axiomele calculului propoziţiilor. Într-adevăr, dacă vreuna dintre disjuncţiile din forma sa normală conjunctivă n-ar conţine o expresie propoziţională atomică împreună cu negaţia ei, atunci ar fi posibil ca disjuncţia respectivă să fie falsă, de exemplu dacă fiecare semn propoziţional nenegat din ea ar fi fals iar fiecare semn propoziţional negat adevărat ; or, aceasta este tot una cu a spune că întregul ar putea fi fals, ceea ce este absurd.

Pentru a arăta că calculul propoziţiilor de care ne ocupăm acum este complet în sens strict, să presupunem că mulţimea axiomelor este extinsă prin adăugarea unei formule alcătuită din variabile propoziţionale şi semne ale funcţiilor de adevăr, dar nederivabilă din axiomele iniţiale. Atunci forma normală conjunctivă a acestei noi formule ar trebui să cuprindă cel puţin o disjuncţie care nu conţine simultan o variabilă propoziţională neînsoţită de negaţie şi aceeaşi variabilă însoţită de sensul negaţiei. Să substituim pe p pentru fiecare literă din această formulă disjunctivă care nu este precedată de semnul negaţiei şi $\sim p$ pentru fiecare literă care este precedată de semnul negaţiei. După eliminarea negaţiilor duble, noua disjuncţie se reduce la forma $p \vee p \ldots \vee p$, iar la rîndul său aceasta se reduce la p. Aşadar, din mulţimea extinsă a axiomelor putem deriva p prin treceri permise : or, un sistem care permite aceasta este contradictoriu.

Demonstrațiile de consistență, independență și completitudine pe care le-am examinat aici se referă toate la prezentarea calculului propozițiilor propusă de Whitehead și Russell în *Principia Mathematica*, dar cu anumite modificări convenabile ele pot fi adaptate pentru a arăta consistența, independența și completitudinea altor versiuni ale logicii propoziționale, inclusiv acelea care cuprind numai reguli de inferență. După cum ne putem aștepta, demonstrațiile sînt deosebit de simple pentru versiunea care utilizează doar reguli de dezvoltare.

Aici, pentru a demonstra consistența este suficient să arătăm că regulile nu ne permit să demonstrăm orice, iar aceasta se poate face găsind o interpretare a sistemului care exclude posibilitatea de a trece printr-o derivare legitimă de la o anumită formulă la o anumită altă formulă. În particular, considerăm un grup G pentru care operațiile reprezentate de diferitele noastre semne formale se pot defini astfel încît G este închis relativ la ele; considerăm de asemenea un subgrup propriu G* astfel încît dacă toate elementele reprezentate prin formule de deasupra liniei în schemele noastre de dezvoltare aparțin lui G*, atunci trebuie să fie cel puțin un element în formulele de sub linia corespunzătoare care de asemenea să aparțină lui G*. Deoarece avem de-a face cu diferite semne operaționale, o asemenea interpretare se poate înfățișa cel mai ușor în forma tabulară, după cum urmează:

P	Q	$P \cdot Q$	$P \vee Q$	$\sim P$	$P \supset Q$
$*\alpha$	α	α	α	β	α
α	β	β	α	β	β
β	α	β	α	α	α
β	β	β	β	α	α

Dacă sistemul de reguli ar fi inconsistent, atunci am putea să demonstrăm orice formulă, deci și o formulă având valoarea β. Mai mult, o asemenea demonstrare ar fi o derivare în care formulele inițiale ar putea fi înlocuite cu oricare altă formulă și deci cu o formulă având valoarea α. Dar o asemenea derivare nu se poate face aplicînd o singură dată vreuna dintre regulile noastre. Ea nu se poate executa nici printr-un număr mai mare de pași conform cu regulile noastre. Într-adevăr, atunci cînd formulele inițiale au toate valoarea α, o formulă cu valoarea β nu se poate introduce dedesubtul liniei decît aplicînd una dintre regulile (4), (5) sau (7a); și se poate arăta cu ajutorul tabelului că în fiecare asemenea caz se introduce în același timp o altă formulă cu valoarea α, astfel încît este imposibilă orice succesiune de aplicații ale regulilor noastre care să conducă de la o

formulă inițială cu valoarea α la o formulă finală unică cu valoarea β.

Fiind dată această interpretare, care poate fi denumită normală deoarece concordă cu intenția noastră inițială, putem să demonstrăm independența diferitelor reguli folosind pentru fiecare din ele în parte o interpretare modificată, deviată de la cea normală, pentru acele semne formale care lasă neafectate celelalte reguli (în sensul că ele continuă să fie inapte de a conduce de la o mulțime de formule care toate au valoarea α la o mulțime de formule care toate au valoarea β), dar permite ca această regulă să conducă de la o mulțime de formule care toate au valoarea α la o mulțime de formule care toate au valoarea β. Deoarece pentru fiecare semn formal nu avem decît trei reguli corespunzătoare, stabilirea unor asemenea interpretări nu este dificilă. În lista de mai jos, pentru fiecare regulă se dă o interpretare deviată de la cea normală pentru semnul ei special, interpretare care împreună cu interpretarea normală pentru toate celelalte semne este suficientă în demonstrarea independenței regulii date:

(1) $P \cdot Q = \beta$ (2a) $P \cdot Q = Q$ (2b) $P \cdot Q = P$
(3a) $P \vee Q = Q$ (3b) $P \vee Q = P$ (4) $P \vee Q = \alpha$
(5) $\sim P = \beta$ (6) $\sim P = \alpha$
(7a) $P \supset Q = Q$ (7b) $P \supset Q = \sim P$ (8) $P \supset Q = \alpha$.

Pentru demonstrarea directă a completitudinii regulilor noastre de dezvoltare (1) — (8), considerate ca sistem de logică propozițională, este necesar doar să modificăm demonstrația de completitudine dată mai sus, incluzînd argumentări care să arate că regulile permit atît reducerea formulelor la forma normală conjunctivă cît și raționamentul cu ajutorul căruia se poate dovedi că o expresie în această formă este adevărată dacă fiecare din disjuncțiile conjuncției conține simultan o expresie atomică și negația ei. Putem atunci trece mai departe și să arătăm că adăugarea oricărei reguli noi care nu este derivabilă din cele deja prezente ne-ar constrînge să acceptăm $*/P$.

Indiferent de forma calculului propozițiilor de care ne ocupăm, demonstrațiile de consistență, independență și completitudine pentru reguli și axiome (atunci cînd există axiome) cuprind în mod inevitabil raționamente care nu pot fi prezentate în interiorul calculului. Am observat exemple de asemenea raționament în demonstrația pe care o dă Post pentru completitudinea calculului prezentat în *Principia Mathematica*, dar am putea în aceeași măsură să atragem atenția asupra unor astfel de raționamente în demonstrațiile de consistență și independență. Într-adevăr, atunci cînd se arată că nici o derivare legitimă, oricît de lungă ar fi ea, nu poate conduce de la premise cu

o valoare marcată la o concluzie cu o valoare nemarcată, argumentarea nu poate fi validată doar cu ajutorul principiilor logicii propoziționale. Motivul nu rezidă în aceea că tezele pe care le demonstrăm sînt *despre* calculul propozițiilor (căci anumite raționamente despre un calcul pot exemplifica principiile calculului respectiv), ci mai curînd în aceea că tezele pe care le demonstrăm sînt *generale* și accesibile doar printr-un raționament care arată că o anumită proprietate aparține tuturor obiectelor unui șir deoarece aparține primului și este ereditară în acest șir, adică accesibilă doar prin inducție matematică. Deoarece principiul unui asemenea raționament depășește nu numai resursele logicii primare (sau propoziționale) dar și resursele logicii generale (sau a teoriei cuantificării), pare rezonabil să spunem că chiar și teoremele elementare de metalogică pe care le-am examinat în această secțiune nu aparțin logicii însăși.

2. *Metateoria logicii generale*

Trecînd la examinarea metateoriei logicii generale, să presupunem de dragul simplității că avem de-a face cu următoarele șase reguli:

(1) $P \supset Q,\ P/Q$
(2) $*/P \supset (Q \supset P)$
(3) $*/[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$
(4) $*/(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
(5) $*/(x)Fx \supset FY$
(6) $P \supset Fx/P \supset (x)Fx$, cu condiția că x nu este liber în P.

Aici subsistemul regulilor (1) — (4) este partea primară, iar ansamblul este o versiune simplificată a sistemului pe care îl dă Frege în *Begriffsschrift*, numai că peste tot axiomele au fost înlocuite prin reguli.

Pentru a demonstra consistența acestor reguli este suficient să arătăm că ele nu ne conduc la nici o pereche de formule care să fie în aceeași relație ca P și $\sim P$. Pentru aceasta adoptăm interpretarea pe care am folosit-o în demonstrarea consistenței din secțiunea precedentă, dar cu clauza adițională că cuantorii universali pot fi neglijați iar expresiile de forma Fx se tratează în același fel ca semnele propoziționale, adică se consideră că ele pot lua una dintre cele două valori α și β. În acest caz este evident că toate formulele introduse cu ajutorul uneia dintre regulile 2—5 trebuie să aibă valoarea marcată α și că această valoare va fi menținută de către toate formulele derivate din formulele din prima grupă prin utilizarea uneia dintre regulile (1) sau (6). Deoarece, conform cu această interpretare, două formule

care sînt de forma P şi $\sim P$ nu pot avea niciodată simultan valoarea α, consistenţa regulilor este astfel stabilită.

În această demonstraţie care pentru prima oară a fost publicată de D. Hilbert şi W. Ackermann în cartea lor *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928), interpretarea utilizată pentru simbolismul universalităţii conduce de fapt la ipoteza existenţei unui individ şi numai al unuia în domeniul pentru care generalizăm cu ajutorul acestui simbolism. În adevăr, dacă am avea exact un individ şi el ar avea numele Y, atunci expresia $(x)Fx$ ar fi echivalentă cu FY şi ar fi evident că regulile (5) şi (6), care sînt proprii logicii generale, nu implică vreun risc de inconsistenţă. Argumentarea de pînă acum nu este concludentă pentru domeniile cu număr mai mare de indivizi, şi în particular s-ar putea crede că ipoteza unui domeniu infinit ar putea conduce la o contradicţie. Dar dacă ar fi astfel, contradicţia ar rezulta dintr-o absurditate introdusă tocmai prin această ipoteză şi nicidecum din logica generală ca atare.

Interpretarea banală a simbolismului universalităţii, cu ajutorul căreia putem demonstra consistenţa întregului ansamblu de reguli, este utilă şi pentru demonstrarea independenţei regulilor (1), (2), (3) şi (4). În adevăr, această interpretare determină ca regulile (5) şi (6) să fie respectiv echivalente cu

$$(5') \quad */P \supset P$$
$$(6') \quad P \supset Q/P \supset Q$$

şi se poate arăta, cu ajutorul unei adaptări a metodelor utilizate în secţiunea precedentă, că nici una din primele patru reguli nu poate fi derivată din acestea luate împreună cu celelalte trei.

Pentru a arăta independenţa regulii (5), înlocuim cuantorul universal (x), oriunde intervine el, prin $\sim (x) \sim$, adică printr-o combinare de semne pe care o utilizăm în calitate de cuantor existenţial. Atunci regulile (1) — (4) rămîn neschimbate iar (6) se transformă în regulă derivată

$$P \supset Fx/P \supset \sim (x) \sim Fx.$$

De aici rezultă că fiecare regulă derivabilă în sistemul iniţial fără a apela la (5) trebuie sau să rămînă neschimbată prin această transformare, sau să treacă într-o regulă derivată. Însă (5) devine $*/\sim (x) \sim Fx \supset FY$, care nu este o regulă derivată, întrucît dacă o adăugăm la sistemul iniţial am fi conduşi la

$$*/FX \supset FY.$$

La fel, pentru a demonstra independenţa regulii (6), înlocuim $(x)Fx$, oriunde intervine, prin $(x) \sim (Fx \supset Fx)$. Atunci regulile (1) — (4) rămîn neschimbate iar (5) se transformă în regula derivată banală

$$*/(x) \sim (Fx \supset Fx) \supset FY.$$

Dar (6) devine

$$P \supset Fx/P \supset (x) \sim(Fx \supset Fx),$$

care desigur că nu este o regulă derivată.

Aceste demonstrații de consistență și independență pentru regulile unui sistem de logică generală care nu are axiome sînt adaptate după demonstrațiile de consistență și independență elaborate de către Bernays pentru un sistem cu axiome, dar ideea esențială a demonstrației de consistență este cuprinsă într-un memoriu al lui Herbrand[6]. O demonstrație de completitudine pentru un sistem de logică generală a fost dată pentru prima oară de către Gödel în 1930[7]. O vom explica în cele ce urmează, dar înainte de a intra în amănuntele ei trebuie să fim edificați asupra naturii acestui demers, căci situația cu care avem de-a face aici este mult mai complicată decît cea discutată în secțiunea precedentă.

Mulțimea noastră de reguli pentru logica generală nu este completă în sens strict, deoarece ea poate fi extinsă fără a ajunge la vreo contradicție; cu alte cuvinte, putem concepe diferite reguli care sînt consistente cu cele date mai sus, fără a deriva din ele. Un exemplu simplu ar fi regula

$$*/ \sim (x)Fx \supset (x) \sim Fx,$$

care, dacă semnele respective ne stau la dispoziție, se poate pune în una din următoarele forme:

$$*/(x)Fx \vee (x) \sim Fx,$$
$$*/(\exists x)Fx \supset (x)Fx,$$
$$*/ \sim [(\exists x)Fx \cdot (\exists x) \sim Fx].$$

Adăugarea acestei reguli la mulțimea noastră ne-ar conduce la o stipulare în favoarea interpretării speciale pe care am utilizat-o în demonstrația de consistență, adică la o restricție în cadrul căreia domeniul admisibil de indivizi ca argumente ale funcțiilor propoziționale trebuie să conțină doar un singur element. În adevăr, după cum arată cel mai clar ultima versiune, regula pretinde de fapt ca formula $(\exists x)Fx.(\exists x) \sim Fx$ să fie falsă, oricare ar fi interpretarea lui F, ceea ce revine la a spune că nu este loc pentru doi indivizi. Printr-o tehnică asemănătoare, se pot construi reguli în vederea limitării domeniului

---

[6] „Recherches sur la théorie de la démonstration", *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, math.-phys.*, XXXIII (1930), pp. 33—160.

[7] „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXVII (1930), pp. 349—360.

de indivizi la doi, trei sau orice număr dorit; aceasta se face după cum urmează:

[1] $*/(x)Fx \vee (x) \sim Fx$
[2] $*/(x)Fx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Gx)$
[3] $*/(x)Fx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Gx \vee Hx) \vee$
$(x)\ (\sim Fx \vee \sim Gx \vee \sim Hx)$
. . . . . .

În fiecare caz, numărul indicat între parantezele așezate în fruntea regulii este *numărul maxim* de indivizi pe care îl permite regula respectivă. În adevăr, deși schema propozițională cuprinsă în a doua din aceste reguli nu este validă (adică nu este în mod necesar adevărată pentru orice interpretare a literelor schematice care figurează în ea) într-un domeniu care conține trei sau mai mulți indivizi, ea este în schimb validă în orice domeniu care conține doi indivizi sau unul singur; la fel, orice schemă validă pentru un domeniu de $n + 1$ indivizi este validă în orice domeniu de n indivizi, cu condiția $n>0$. Aceasta se poate vedea din examinarea înțelesului afirmației că o schemă propozițională cu cuantori este validă într-un domeniu cu n indivizi.

Atunci cînd domeniul în care funcționează cuantorii este finit, o expresie universală poate fi în principiu înlocuită printr-o conjuncție, iar una existențială se poate înlocui printr-o disjuncție. Astfel, dacă domeniul conține numai doi indivizi și dacă indivizii se notează, în mod arbitrar, cu 1, respectiv 2, atunci în loc de $(x)Fx$ putem scrie $F1.F2$. Dacă și numai dacă rezultatul unor asemenea înlocuiri este o tautologie conform cu regulile logicii propoziționale, expresia inițială cu cuantori poate fi socotită ca necesarmente adevărată în domeniul finit la care se aplică. La fel, o *schemă* propozițională cu cuantori se poate spune că este *validă* într-un domeniu cu număr finit, specificat, de indivizi atunci cînd pentru orice interpretare a literelor sale schematice eliminarea cuantorilor în felul explicat mai sus o transformă într-un adevăr necesar. De exemplu, în cazul unui domeniu cu doi indivizi, schema care figurează ca a doua printre regulile restrictive de mai sus se poate reduce la

$$(F1 \cdot F2) \vee [(\sim F1 \vee G1) \cdot (\sim F2 \vee G2)] \vee [(\sim F1 \vee \sim G1) \cdot (\sim F2 \vee \sim G2)],$$

adică

$$F1 \cdot F2 \vee \sim F1 \cdot \sim F2 \vee \sim F1 \cdot G2 \vee \sim F2 \cdot G1 \vee G1 \cdot G2 \vee$$
$$\sim F1 \cdot \sim F2 \vee \sim F1 \cdot \sim G2 \vee \sim F2 \cdot \sim G1 \vee \sim G1 \cdot \sim G2$$

adică

$$F1 \cdot F2 \vee \sim F1 \cdot \sim F2 \vee \sim F1 \cdot (G2 \vee \sim G2) \vee \sim F2 \cdot (G1 \vee \sim G1) \vee G1 \cdot G2 \vee \sim G1 \cdot \sim G2,$$

care este o tautologie. Dacă însă aceeaşi schemă se aplică unui domeniu cu un singur individ şi reducerea se face în mod corespunzător, atunci rezultatul este iarăşi o configuraţie tautologică. În general, o schemă care este validă într-un domeniu cu $n + 1$ indivizi trebuie să fie validă şi într-un domeniu cu n indivizi, cu condiţia ca n să fie mai mare decît 0. Într-adevăr, dacă aplicarea schemei la un domeniu cu $n + 1$ indivizi dă o formă redusă care este tautologică, atunci se poate obţine o altă formă redusă, de asemenea tautologică, substituind în prima peste tot 1 în loc de $n + 1$, ceea ce evident că este acelaşi lucru ca şi aplicarea de la bun început a schemei la un domeniu cu n indivizi.

Această lege se poate reformula în termeni de satisfacere. Exact cum o schemă se spune că este validă într-un domeniu dat atunci cînd aplicarea ei la domeniul respectiv dă un adevăr pentru orice interpretare a literelor schematice care figurează în ea, tot astfel se spune că o schemă poate fi satisfăcută sau că ea este realizabilă într-un domeniu dat, dacă ea dă un adevăr pentru o anumită interpretare a literelor schematice care figurează în ea. De aici rezultă imediat că validitatea unei scheme într-un domeniu poate fi identificată cu nerealizabilitatea negaţiei, iar realizabilitatea unei scheme se identifică cu non-validitatea negaţiei sale. Prin urmare, este uşor de arătat că o schemă realizabilă într-un domeniu cu n indivizi trebuie să fie realizabilă şi într-un domeniu cu $n + 1$ indivizi, cu condiţia că n este mai mare decît 0; în unele contexte această formulare a legii poate fi eventual mai utilă decît formularea dată mai sus.

Dacă ne limităm atenţia la calculul funcţional unar (singular monadic), adică la partea din logica generală care se ocupă doar cu funcţiile propoziţionale de un argument, nu avem nevoie să luăm în consideraţie domenii la care numărul indivizilor nu este finit. În adevăr, s-a arătat de către P. Bernays şi M. Schönfinkel că orice schemă din acest calcul care este în general realizabilă, (adică pentru care există un domeniu care o satisface), este realizabilă într-un domeniu cu 2^n indivizi, unde n este numărul diferitelor litere schematice funcţionale pe care le cuprinde[8]. Pentru a demonstra aceasta, să presupunem la început că literele funcţionale ale schemei sînt interpretate ca semne ale unor atribute $A_1 \ldots, A_n$. Atunci, indiferent

[8] „Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, XCIX (1928), pp. 342–372.

cît de mare este domeniul de indivizi implicat de această interpretare, el poate fi divizat în cel mult 2^n clase, astfel încît doi indivizi să fie membri ai aceleeaşi clase dacă şi numai dacă fiecare are toate atributele din lista noastră care aparţin celuilalt. Dar aceste clase, să le numim $K_1, \ldots, K_r$, unde $r \leqslant 2^n$, pot fi acum luate ca un domeniu nou de indivizi pentru care putem defini atribute noi $A_1^*, \ldots, A_n^*$, astfel încît K_i are A_j^* dacă şi numai dacă membrii lui K_i au A_j. Iar în acest domeniu nou schema noastră iniţială trebuie să fie evident satisfăcută odată mai mult, cînd literele sale funcţionale sînt interpretate ca semne pentru atributele $A_1^*, \ldots, A_n^*$. Dacă $r = 2^n$, demonstraţia cerută este completă; iar dacă $r < 2^n$, trebuie doar să facem apel la legea după care realizabilitatea unei scheme într-un domeniu finit impune realizabilitatea ei într-un domeniu finit cu un număr mai mare de indivizi.

Pînă acum am considerat doar validitatea şi realizabilitatea în domenii finite. Dar în acea parte a logicii generale care se ocupă cu relaţii şi nu numai cu atribute este uşor să producem scheme care nu pot fi satisfăcute în domenii finite. Un exemplu de asemenea schemă este

$$(x) \sim F(x, x) \cdot (x)(y)(z)\,[F(x, y) \cdot F(y, z) \supset F(x, z)] \cdot (x)(\exists y)F(x, y).$$

Dacă considerăm că $F(x,y)$ înseamnă acelaşi lucru ca şi $x < y$, atunci formula este satisfăcută în domeniul infinit al numerelor naturale. Dar nu poate exista vreo interpretare care să permită realizabilitatea ei într-un domeniu finit; aşadar, negaţia ei este validă în orice domeniu finit. Este oare posibil să dăm o schemă care pentru realizabilitatea ei pretinde un domeniu şi mai mare încă decît cel al numerelor naturale? Vom arăta raţiunea pentru care răspunsul la această întrebare este negativ, dar deocamdată este important să stabilim că logica nu se ocupă cu distincţia dintre domeniile finite şi cele infinite. Regulile pe care le-am dat pentru logica generală nu sînt complete în sens strict tocmai pentru că ele sînt reguli numai pentru demonstrarea unor scheme universal (sau absolut) valide, adică, conform cu interpretările uzuale, scheme valide în orice domeniu nevid.

Restricţia prin care se exclud domeniile vide poate părea arbitrară la prima vedere; de fapt, ea a şi fost criticată de către unii logicieni sub motiv că ar implica o ipoteză de existenţă care restrînge domeniul de acţiune al cercetării şi compromite puritatea ei. De obicei, apărarea acestei restricţii se face cu argumentul că ea ne permite să menţinem

$$(x)Fx \supset (\exists x)Fx$$

ca schemă universal validă derivată din $(x)Fx \supset FY$ şi $FY \supset (\exists x)Fx$. Conform cu acest fel de a raţiona, $(x)Fx$ ar fi adevărată într-un domeniu

vid pentru orice interpretare a lui F, fiind echivalentă cu $\sim (\exists x) \sim Fx$, dar $(\exists x)Fx$ ar fi falsă şi deci ar fi falsă întreaga schemă

$$(x)Fx \supset (\exists x)Fx.$$

Fără îndoială că aceasta este o bună argumentare pentru a se acorda atenţie domeniilor nevide, dar ea nu este suficientă pentru a înlătura suspiciunile celor care se tem de orice restricţie improprie a domeniului de acţiune a logicii. Pentru a face faţă obiecţiei lor este necesar să arătăm că în realitate nu avem nici o restricţie, deoarece nu pot exista domenii vide de indivizi. Or, în terminologia tehnică a logicienilor, un individ nu este decît un argument admisibil pentru funcţiile de tipul cel mai coborît examinate la momentul respectiv şi deci este imposibil să vorbim despre un domeniu de indivizi fără a indica vreo funcţie sau anumite funcţii pentru care acest domeniu este adecvat. La fel, este absurd a presupune că s-ar putea concepe funcţii propoziţionale convenabile pentru un domeniu vid, căci nu pot exista funcţii propoziţionale fără argument admisibil. Cele care sînt inconsistente determină *clase* vide, dar chiar şi acestea au *domenii* nevide, întrucît există argumente pentru care are sens ca ele să fie negate. În realitate, a spune că un domeniu de indivizi era vid nu poate fi, în cazul cel mai bun, decît o cale mai complicată de a susţine că un anumit complex de semne care s-a presupus că exprimă o funcţie propoziţională nu exprimă de fapt nimic. Astfel, de exemplu, se poate spune că nu există nimic despre care am putea nega cît de cît că ar fi rădăcina pătrată a curajului.

Motivul pentru care nu se apreciază această conexiune dintre domenii şi funcţii ar putea fi modul abstract în care logicienii prezintă de obicei legile domeniilor. Dar o altă sursă de confuzie este o dogmă care în ultimii ani a devenit foarte curentă în rîndurile empiriştilor. Observînd în mod corect că existenţa unui om sau a unui cal este un fapt contingent care poate fi aflat doar din experienţă, unii dintre aceşti filosofi au ajuns în mod nefericit să spună că nici o propoziţie existenţială nu poate fi stabilită *a priori*. Teza lor poate fi respinsă foarte uşor cu numeroase contraexemple din matematică, cum ar fi propoziţia că există un număr prim mai mare decît un milion, dar ea a fost luată foarte în serios şi considerată ca un argument împotriva ontologiei. În acest context ea ar putea conduce la punctul de vedere că logica, ce indubitabil este apriorică, nu poate fi bazată pe excluderea domeniilor vide.

Deşi, pentru motivele pe care le-am explicat, regulile logicii generale pe care le-am dat la începutul acestei secţiuni nu sînt complete în sens strict, ele sînt complete în sensul mai slab de suficienţă pentru demonstrarea tuturor schemelor universal valide. Tocmai aceasta a

demonstrat Gödel în teorema sa din 1930 pe care am amintit-o mai sus, iar acum trebuie să trecem la examinarea planului demonstrației sale. Ideea principală a metodei cu ajutorul căreia el a reușit să stabilească legătura dintre validitatea în logica generală și validitatea în logica primară (sau propozițională) a fost publicată pentru prima oară de către Th. Skolem în 1928[9] și dezvoltată de îndată de către J. Herbrand într-o dizertație importantă la care ne-am referit deja[10], dar felul în care a utilizat el această idee este nou, și tocmai astfel a putut să dea printre altele și o demonstrație nouă pentru o teoremă foarte interesantă pe care Löwenheim o descoperise încă în 1915.

În primul rînd este necesar să arătăm că pentru orice formulă universal validă din logica generală se poate găsi o formulă universal validă care (a) este demonstrabilă dacă și numai dacă prima formulă considerată este demonstrabilă și (b) este construită în formă normală prenex Skolem, adică astfel încît toți cuantorii figurează la începutul ei iar toți cuantorii existențiali, dacă există, sînt în fața tuturor cuantorilor universali, dacă aceștia există. Acest rezultat, care a fost obținut de către Th. Skolem în 1920[11], ocupă în demonstrația dată de Gödel pentru teorema sa de completitudine a logicii generale un loc similar celui pe care îl ocupă teza reductibilității la forma normală conjunctivă în demonstrația dată de Post pentru teorema de completitudine a logicii propoziționale. Firește, reducerea unei formule date la forma normală Skolem trebuie să fie demonstrabilă printr-un raționament din interiorul calculului funcțiilor propoziționale, a cărui completitudine urmează să o stabilească teorema lui Gödel; dar tocmai ca și în cazul mai simplu al reductibilității la forma normală conjunctivă, și aici pentru demonstrarea tezei generale este necesară inducția matematică. Nu vom încerca să reproducem amănuntele raționamentului, ci ne limităm să observăm concluzia că pentru scopul lui Gödel este suficient de arătat demonstrabilitatea tuturor formulelor universal valide care se află în formă normală Skolem.

Să numim acum „$\mathcal{A}$" o formulă bine formată în formă Skolem

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(y_1)\ldots(y_m)\ M(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m)$$

unde $M(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m)$ este o abreviere pentru o expresie în care nu figurează cuantori și care în afară de variabilele indicate

---

[9] „Über die mathematische Logik", *Norsk Matematisk Tidskrift*, X (1928), pp. 125—142.

[10] „Recherches sur la théorie de la demonstration", *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, XXXIII (1930), pp. 33—160.

[11] „Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze etc.", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I *Math.-nat. Klasse*, 1920, nr. 4.

nu conține decît litere funcționale, conective de adevăr, paranteze și eventual litere propoziționale. Dacă $k = 0$, adică $\mathcal{A}$ nu conține cuantori existențiali, atunci ansamblul poate fi universal valid doar dacă versiunea desfășurată a lui $M(y_1, \ldots, y_m)$ are un tipar tautologic, de exemplu este de forma $(Fy_1 \vee \sim Fy_1) \cdot (Gy_2 \vee \sim Gy_2)$. Dacă $k = 1$, adică în $\mathcal{A}$ apare un singur cuantor existențial, ansamblul poate fi iarăși universal valid doar dacă versiunea desfășurată a lui $M(x_1; y_1, \ldots, y_m)$ are tipar tautologic. Dar atunci cînd avem mai mult decît un cuantor existențial, situația este mai complicată. Într-adevăr, în timp ce întreaga formulă poate fi universal validă în virtutea caracterului tautologic al versiunii desfășurate a lui $M(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m)$, ea poate fi universal validă și pentru alt motiv, și anume pentru că există un mod de a lega variabilele legate existențial care dă întregii versiuni a lui $M(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m)$ un caracter tautologic care altfel ar lipsi. De exemplu, pentru cazul banal $k = ?$ și $m = 0$, formula

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(Fx_1 \vee \sim Fx_2)$$

este universal validă întrucît ea este derivabilă din $FY \vee \sim FY$. Pentru a trata sistematic aceste complicații, să convenim la următoarea numerotare a diferitelor k-upluri de forma $\langle z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k} \rangle$ pe care le putem forma cu șirul infinit de variabile $z_0, z_1, z_2, \ldots$, luînd fiecare de cîte ori dorim. În primul rînd, grupăm k-uplurile după suma indicilor lor, așezînd la început pe cele pentru care $i_1 + i_2 + \ldots + i_k$ este mai mic, iar apoi în cadrul fiecărei asemenea grupe ordonăm k-uplurile în mod lexicografic Astfel, șirul începe cu $\langle z_0, z_0, \ldots, z_0 \rangle$, $\langle z_0, z_0 \ldots, z_0, z_1 \rangle$, $\langle z_0, z_0, \ldots z_1, z_0 \rangle$, $\ldots$, și fie „$\mathcal{B}_n$" numele expresiei $M(z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}; z_{(n-1)m+1}, z_{(n-1)m+2}, \ldots, z_{nm})$ unde $\langle z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k} \rangle$ este al n-lea din k-uplurile amintite mai sus. Așa, de exemplu, pentru $k = 3$ și $m = 2$ avem

„$\mathcal{B}_1$" ca nume pentru $M(z_0, z_0, z_0; z_1, z_2)$
„$\mathcal{B}_2$" ca nume pentru $M(z_0, z_0, z_1; z_3, z_4)$
„$\mathcal{B}_3$" ca nume pentru $M(z_0, z_1, z_0; z_5, z_6)$
. . . . . .

În fiecare asemenea expresie variabilele de după punct și virgulă sînt diferite de cele dinainte precum și de cele din expresiile anterioare ale șirului, cu singura excepție că în prima expresie a șirului înainte de punct și virgulă nu apar variabile care să nu fi intervenit în expresiile anterioare. Mai departe, fie „$\mathcal{C}_n$" numele disjuncției tuturor formulelor $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ și fie „$\mathcal{D}_n$" numele închiderii universale a lui $\mathcal{C}_n$

adică numele formulei care se obține scriind în fața formulei $\mathcal{C}_n$ cuantori universali pentru toate variabilele pe care le cuprinde această formulă. Atunci, folosind regulile calculului funcțional pe care îl cercetăm precum și principiul inducției matematice, se poate arăta că pentru orice n, $\mathcal{D}_n$ impune $\mathcal{A}$. Demonstrația detaliată este foarte greoaie, dar nu prezintă vreo dificultate de principiu.

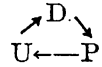
Or, se poate întîmpla ca în numerotarea noastră sistematică a posibilităților să apară un număr n pentru care $\mathcal{C}_n$ este tautologică în același sens în care se spune că este tautologică o schemă ca $Fx \vee \sim Fx$. În acest caz se poate aserta închiderea ei universală $\mathcal{D}_n$ și de aici, după cum am observat, $\mathcal{A}$ poate fi derivat în interiorul calculului supus cercetării. Dacă însă nu există un număr n pentru care $\mathcal{C}_n$ este tautologică, atunci $\mathcal{A}$ nu este o formulă universal validă, fiindcă literele de schemă care intervin în ea pot fi interpretate de așa manieră încît întreaga formulă să devină falsă.

Acest din urmă aspect se poate demonstra după cum urmează. Deoarece, în virtutea ipotezei, pentru orice n, $\mathcal{C}_n$ este netautologică, putem să atribuim valori de adevăr părților sale elementare (adică literelor propoziționale, dacă acestea apar, precum și părților de forma Fz_p, $G(z_q, z_r)$ etc.) în așa fel încît, în virtutea regulilor logicii propoziționale, întreaga formulă să ia valoarea *fals*. Pentru fiecare n dat nu poate exista decît un număr finit de asemenea atribuiri de valori cu rezultat „fals", dar toate la un loc trebuie să fie o infinitate, deoarece șirul $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ etc. este infinit și fiecare formulă din acest șir, în afară de prima, conține o anumită parte elementară (sau anumite părți elementare) care nu figurează în precedenta imediată. Pentru același motiv, putem presupune că toate părțile elementare care apar în fiecare din formulele $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ etc. sînt numărabile în ordinea primei lor apariții, și pe această bază putem fixa o atribuire de valori de adevăr după cum urmează. Prima parte elementară va primi valoarea de adevăr „adevărat" dacă și numai dacă ea are această valoare într-o infinitate de atribuiri cu rezultat „fals" menționate mai sus; a doua va primi valoarea „adevărat" dacă și numai dacă are valoarea „adevărat" într-o infinitate din atribuirile cu rezultat „fals" menționate mai sus, care concordă cu atribuirea conducătoare; și așa mai departe. Firește, presupunem că fiecare parte elementară obține valoarea „fals" atunci cînd nu obține valoarea „adevărat". Evident că această atribuire falsifică simultan toate formulele $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ etc., și deci toate formulele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ etc. care sînt construite din acestea prin disjuncție. Acum, în fiecare parte elementară care nu este literă propozițională putem presupune că variabilele z_0, z_1, z_2 etc. se înlocuiesc prin valorile lor numerice, astfel încît obținem expresii ca $F0$, $G(1,2)$, $F1$, $G(5,7)$ etc. Dacă acum pre-

supunem că fiecare dintre aceste expresii noi se menţine la valoarea de adevăr pe care a avut-o expresia iniţială în atribuirea conducătoare pe care am dat-o, obţinem de fapt interpretări în cadrul teoriei numerelor pentru toate literele funcţionale din versiunea desfăşurată a lui M (x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_m). Astfel, dacă F este o asemenea literă cu un loc pentru argument, în prezent este determinat pentru care anume numere Fx trebuie să fie considerată ca adevărată şi pentru care trebuie să fie considerată falsă; şi aşa mai departe cu fiecare literă aleasă. Mai departe, aceste interpretări ale literelor schematice cu referire la domeniul numerelor naturale determină ca $\mathcal{A}$ să fie falsă, deoarece este evident că nu poate exista un k-uplu de numere naturale aşa cum ar trebui să fie acum pentru a da adevărul expresiei

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(y_1)\ldots(y_m)M(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m).$$

Rezultatul este, aşadar, următorul: sau $\mathcal{A}$ este demonstrabilă cu mijloacele calculului funcţiilor propoziţionale, sau ea nu este validă în domeniul numerelor naturale şi, ca atare, nu este universal validă. Pe scurt, dacă $\mathcal{A}$ este universal validă, ea este demonstrabilă. Este adevărat că, aşa cum se prezintă, acest raţionament nu este suficient pentru ţelurile lui Hilbert, deoarece el implică principiul terţului exclus în ipoteza că ar exista un număr n pentru care $\mathcal{C}_n$ este tautologică; or, un asemenea număr nu există. Dar acest raţionament indică într-un mod foarte interesant structura logicii generale şi ne permite să obţinem drept corolar o importantă teoremă, obţinută pentru prima oară în mod independent de către L. Löwenheim în 1915, şi anume teorema că o schemă care este validă în domeniul numerelor naturale (sau în orice alt domeniu numărabil,) este universal validă[12]. În adevăr, în virtutea rezultatului stabilit pentru forma disjunctivă la începutul acestui alineat, dacă $\mathcal{A}$ este validă în domeniul numerelor naturale, ea trebuie să fie demonstrabilă şi, prin urmare, universal validă. Dacă notăm cu „U" validitatea universală, cu „D" validitatea într-un domeniu infinit numărabil, cu „P" demonstrabilitatea cu mijloacele regulilor logicii generale, şi dacă întrebuinţăm săgeata pentru implicaţie, putem reprezenta relaţiile dintre aceste noţiuni cu ajutorul triunghiului



Atunci teorema de completitudine a lui Gödel are forma „U → D → P", iar teorema domeniilor a lui Löwenheim, în forma dată aci,

[12] „Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, LXXXVI (1915), pp. 447–470.

se transcrie: „D → P → U". Al treilea circuit, reprezentat de „P → U → D", este desigur o banalitate.

Memoriul în care Löwenheim demonstra pentru prima oară teorema lui (utilizînd simbolismul lui Schröder) este începutul metalogicii moderne, dar importanța acestui rezultat nu a fost apreciată pe deplin decît la mulți ani după publicare. Teorema enunțată mai sus este deosebit de interesantă deoarece arată că în logică nu avem nevoie să considerăm vreodată decît domenii cel mult numărabile. Poate că importanța sa se poate vedea cel mai clar dacă o reformulăm astfel: orice schemă realizabilă într-un domeniu este realizabilă într-un domeniu numărabil. Într-adevăr, după cum a subliniat Skolem în 1922, aceasta conduce la un nou paradox în teoria mulțimilor, paradox care are loc chiar și în teoria axiomatică ce urma să ne salveze de pericolele pionieratului nereglementat al lui Cantor[13]. Din axiomele presupuse se poate demonstra existența unei infinități nenumărabile de mulțimi: într-adevăr, orice sistem de axiome propus care nu ne-ar permite acest lucru ar fi considerat că este atît de strîmt încît se depreciază. Dar axiomele pot fi unite între ele astfel încît să formeze o unică formulă care, în afară de semnele logice ale calculului funcțiilor propoziționale, conține doar semnul de apartenență; iar conform cu teorema lui Löwenheim, dacă în general este posibilă o interpretare pentru acest semn care determină ca formula să fie adevărată, atunci este posibil să găsim o interpretare de acest fel chiar și într-un domeniu numărabil. Pe scurt, axiomele care urmăresc țelul de a atrage atenția asupra infinitului nenumărabil trebuie în mod inevitabil să eșueze în ce privește acest țel. Skolem a arătat că dificultatea nu poate fi depășită prin introducerea unei infinități de axiome, deoarece orice *clasă* de formule care sînt realizabile simultan în vreun domeniu nevid, este realizabilă într-un domeniu numărabil[14]. Unicul mijloc posibil pentru a face față dificultății pare să fie dat de propunerea lui Skolem însuși ca distincția dintre numărabil și nenumărabil să fie considerată ca relativă la sistemul de axiome respectiv. Astfel, submulțimile unei mulțimi infinite pot fi nenumărabile în interiorul unui sistem axiomatic dat, deoarece numărarea lor ar impune construirea unei alte mulțimi (adică a unor perechi), care nu este disponibilă în cadrul teoriei, deși este definibilă într-un mod oarecare din afară, prin referire la teoria în ansamblu. Aceasta este o ipoteză plauzibilă, dar dacă

[13] „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors* 1922, pp. 217—232. Nu am văzut originalul.

[14] „Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls, etc.", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I *Mat-nat. Klasse* 1919, no. 3.

ne-am opri la ea cu greu s-ar putea considera că l-am confirma astfel pe Cantor. Căci, de fapt, ipoteza implică teza că nu există mulţimi *absolut* nenumărabile.

3. *Incompletabilitatea aritmeticii formale*

Demonstraţiile de consistenţă, independenţă şi completitudine, de care am vorbit în secţiunea anterioară, se pot extinde la sistemul deductiv care, pe lîngă aparatul logicii generale, conţine şi cele două axiome ale lui Frege pentru identitate. În cadrul acestui sistem se pot defini numeralele ca indici în enunţuri de existenţă. De exemplu, pentru *Există exact un obiect F*, *Există exact două obiecte F* etc., putem scrie:

$$(\exists_1 x)\, Fx =_{\text{def}} (\exists x)\,[Fx.\ (y)(Fy \supset x = y)],$$

$$(\exists_2 x)\, Fx =_{\text{def}} (\exists x)\,(\exists y)\,[Fx.Fy.\ \sim(x = y).(z)(Fz \supset x = z \vee y = z)],$$

. . . . . .

Dar nu putem face plauzibilă teoria aritmeticii a lui Frege fără a introduce, aşa cum a făcut el, variabile de tip mai înalt; numai cu ajutorul lor putem spera să definim numerele ca obiecte de un anumit sort (şi anume, mulţimi de concepte sau mulţimi de mulţimi) şi să demonstrăm astfel axiomele lui Peano. Introducerea variabilelor de tip mai înalt, dacă este însoţită de teza extensionalităţii, constă în realitate în trecerea de la logica generală la teoria apartenenţei sau, cum i se mai zice în mod uzual, teoria mulţimilor. Dacă axiomele lui Peano pot fi sau nu derivate în cadrul unei versiuni acceptabile a teoriei mulţimilor, aceasta este o chestiune în care matematicienii pot avea opinii diferite, dar ca pas următor în dezvoltarea metamatematicii această controversă poate fi evitată prin investigarea sistemului $\mathcal{P}$, care rezultă din *Principia Mathematica*, dacă se înlătură de acolo tezele dubioase, punînd în locul lor axiomele lui Peano. Dacă Whitehead şi Russell au dreptate, atunci $\mathcal{P}$ trebuie să fie derivabil din propriul lor sistem, şi fără îndoială că aceasta constituie o porţiune din ceea ce avea în vedere Hilbert atunci cînd vorbea de formalizarea matematicii.

Tocmai acesta este subiectul de studiu al lui K. Gödel în memoriul său „Despre propoziţiile formal indecidabile din *Principia Mathematica* şi sisteme înrudite"[15]. Calculul său pentru logica generală

[15] „Über formal unentscheibare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVIII (1931), pp. 173—198.

este luat din *Principia Mathematica* cu singura deosebire că în loc de $(x)F(x)$ el scrie $x\Pi F(x)$. Dar în rest el reține doar distincția de tipuri pe care o marchează prin indici atașați la variabilele sale x_1, y_1, x_2, y_2 etc. și principiul extensionalității, pe care îl prezintă sub forma unui șir infinit de formule:

$$x_1 \Pi (x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2,$$
$$x_2 \Pi (x_3 (x_2) \equiv y_3(x_2)) \supset x_3 = y_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

El introduce însă două semne primitive noi, 0 și f, pe care le folosește pentru formularea a trei axiome speciale ale teoriei numerelor:

1. $\sim (fx_1 = 0)$,
2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$,
3. $x_2 (0) . x_1 \Pi (x_2 (x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1 \Pi x_2(x_1))$.

Dacă luăm semnul 0 în sensul său uzual iar semnul f ca însemnînd „succesorul lui", avem aici versiuni pentru a treia, a patra și a cincea axiomă a lui Peano. Deoarece șirul numerelor naturale este luat ca domeniul indivizilor pentru sistem, nu mai este necesar să se mai introducă vreuna din celelalte două axiome (adică „0 este un număr" și „dacă n este un număr, atunci și succesorul lui n este un număr"). În realitate, acest lucru este și imposibil, afară de cazul cînd considerăm „x este un număr" ca o abreviere pentru „$x = 0$ sau x este succesorul cuiva". De asemenea este interesant de observat că principiul inducției matematice nu poate fi enunțat într-o singură axiomă fără a utiliza variabile de tip superior.

Din motive de comoditate a referirii, Gödel deosebește două feluri de formule cu sens care pot interveni în sistem. Formulele de prima speță sînt semne numerice și ele cuprind nu numai numeralele propriu-zise ca 0, $f0$, $ff0$, etc. dar și variabile de tipul cel mai coborît și semne complexe care devin desemnări de numere atunci cînd variabilele pe care le conțin se înlocuiesc cu numerale. Formulele de a doua speță sînt expresii propoziționale sau expresii care pot deveni expresii propoziționale fie prin substituții convenabile pentru variabile, fie prin prefixare cu cuantori. Printre formulele numerice, o importanță deosebită o au acelea care devin desemnări de numere atunci cînd variabilele pe care le cuprind se înlocuiesc prin numerale. În adevăr, acestea sînt semnele funcționale din matematica obișnuită, iar Gödel găsește că este necesar să introducă unele din ele pentru dezvoltarea raționamentului său. Unele din definițiile sale sînt echivalențe explicite, dar altele, cum ar fi

$$\begin{cases} 0\,! = 1 \\ (n+1)\,! = (n+1)\,n\,! \end{cases}$$

presupun procedura recursivă de fixare a valorii funcției pentru argumentul 0 și apoi de stabilire a felului în care se poate obține valoarea pentru un argument dat atunci cînd se cunosc valorile pentru argumentul precedent (sau argumentele precedente). Dar toate aceste definiții sînt efective în sensul că ele dau egalități din care — în principiu cel puțin — valorile funcțiilor pentru orice atribuiri de argumente se pot calcula prin operații de substituție și înlocuire.

În cadrul acestui sistem, Gödel construiește o formulă care nu poate fi demonstrată cu resursele sistemului, deși ea trebuie să fie adevărată dacă sistemul nu este contradictoriu. În fapt formula spune că ea însăși este o formulă nedemonstrabilă. La prima vedere aceasta pare paradoxal și sîntem înclinați să bănuim că formula trebuie să fie defectuoasă în același fel ca pseudoenunțul „ceea ce spun eu acum este fals". Dar autoreferirea formulei lui Gödel este benignă. Pentru a vedea de ce este așa și cum anume se realizează autoreferirea, trebuie să examinăm aritmetizarea sintaxei de către Gödel. Încă din 1904, Hilbert observa că logica simbolică ar putea fi abordată ca și cum ar fi o ramură a teoriei elementare a numerelor[16], dar Gödel a fost acela care a realizat pentru prima oară în detaliu o asemenea corespondență și a folosit-o pentru investigarea proprietăților sistemelor deductive formalizate.

În articolul său, Gödel își începe aritmetizarea asociind fiecare dintre semnele sale primitive cu un număr natural după schema următoare:

0 cu 1
f cu 3
$\sim$ cu 5
$\vee$ cu 7
Π cu 9
(cu 11
) cu 13,

variabilele de tip n cu numere de forma p^n, unde p este un număr prim mai mare decît 13 (de exemplu: x_1 cu 17, x_2 cu 17^2, y_3 cu 19^3 etc.).

Apoi, dacă s_1, s_2, s_3, ..., s_k sînt numerele cu care au fost corelate cele k simboluri distincte ale unei formule, formula întreagă el o corelează

[16] *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, pp. 174—185.

cu numărul $2^{s_1} \times 3^{s_2} \times \ldots \times p_k^{s_k}$, unde p_k este al k-lea număr prim. De exemplu, formula

$$x_1 \text{ II } (x_2\,(x_1) \text{ V } \sim x_2(x_1))$$

se corelează cu numărul

$2^{17}.\ 3^{9}.\ 5^{11}.\ 7^{173}.\ 11^{11}.\ 13^{17}.\ 17^{13}.\ 19^{7}.\ 23^{5}.\ 29^{173}.\ 31^{11}.\ 37^{17}.\ 41^{13}.\ 43^{13}.$

În sfîrşit, dacă cele m formule propoziţionale dintr-un şir (eventual demonstrativ) se asociază cu numerele $f_1, f_2, \ldots, f_m$, atunci şirul întreg se asociază cu numărul $2^{f_1} \times 3^{f_2} \times \ldots \times p_m^{f_m}$. Evident că această metodă asociază un număr şi numai unul cu fiecare formulă posibilă sau fiecare şir posibil de formule, şi face acest lucru de aşa manieră încît în principiu pentru fiecare număr se poate totdeauna stabili dacă a fost asociat cu o expresie şi, în caz afirmativ, cu care expresie anume. Aceasta rezultă dintr-o binecunoscută teoremă a aritmeticii potrivit căreia orice număr se descompune în mod unic în factori primi. Se pot concepe alte căi de a asocia semnele cu numere pentru a ajunge la un asemenea rezultat, dar metoda lui Gödel prezintă avantajul că în cadrul ei pasul următor din raţionament este relativ simplu.

Fiind dată o asociere între semne şi numere de felul acelei pe care am considerat-o aici, se poate construi un enunţ cu privire la compunerea unui număr corespunzător cu fiecare enunţ pe care îl dorim cu privire la structura unei formule sau a unui şir de formule din sistemul nostru. Să presupunem, de exemplu , că formula tipărită mai sus în calitate de mostră ar fi o generalizare conţinînd un cuantor universal. În versiunea lui Gödel a aritmetizării sintaxei, enunţul aritmetic corespunzător ar avea ca rezultat că numărul foarte mare indicat mai sus (adică numărul asociat formulei sau, cum vom spune pe scurt, numărul formulei) este divizibil cu 3^9 dar nu este divizibil cu o putere mai mare a lui 3. Iată un caz foarte simplu dar probabil suficient pentru a ilustra principiul. În practică, enunţurile aritmetice corespunzătoare analizelor detaliate ale formulelor şi relaţiilor dintre ele, se complică foarte mult şi de aceea Gödel construieşte patruzeci şi şase definiţii abreviative care îi permit să stăpînească întreaga această complexitate. Una dintre aceste definiţii introduce semnul $Z\,(n)$, care înseamnă *„numărul (Zahl) asociat cu numeralul „fff... 0" în care litera „f" intervine exact de n ori"*. O altă definiţie introduce $Sb(x_y^v)$ pentru *numărul formulei care rezultă dacă se substituie semnul al cărui număr este y pentru semnul al cărui număr este v în toate locurile unde acest semn din urmă intervine liber în formula al cărei număr este x*. Iar ultima dintre ele introduce $Bew(x)$ ca pre-

dicat aplicabil unui număr dacă şi numai dacă acesta este numărul unei formule propoziţionale demonstrabile (*beweisbar*) în sistem, adică numărul ultimei formule dintr-un şir de formule în care fiecare membru este sau o axiomă, sau o consecinţă imediată a unei formule precedente sau o consecinţă imediată a două formule precedente.

Funcţiile şi predicatele care se introduc în acest fel sînt strict vorbind funcţii şi predicate de *numere* care se definesc fără referire la semne sau formule, şi cu excepţia ultimei (al cărei specific se va explica în secţiunea următoare), toate definiţiile pe care le dă Gödel sînt efective în sensul explicat mai sus. Cu alte cuvinte, totdeauna putem să calculăm într-un număr finit de paşi valoarea pe care o ia funcţia respectivă atunci cînd argumentul are o anumită valoare numerică şi, similar, totdeauna se poate determina într-un număr finit de paşi dacă predicatele respective — cu excepţia predicatului $Bew(x)$ — se aplică sau nu unui număr dat. Dar este evident din exemplele date că funcţiile şi predicatele din teoria numerelor pe care le consideră Gödel sînt alese şi denumite în virtutea corespondenţei lor cu noţiunile reclamate de metateoria sistemului $\mathcal{P}$. De fapt, el a atras atenţia asupra unui fragment din teoria numerelor a cărui structură corespunde cu sintaxa sistemului $\mathcal{P}$ şi care totuşi poate fi prezentat în cadrul sistemului $\mathcal{P}$. Desigur că trebuie să admitem că o relaţie între numerele Gödel nu este *identică* cu o relaţie între semne din $\mathcal{P}$. Dar în acest context putem vorbi de aritmetizarea sintaxei fără pericol de confuzie, deoarece fiecare enunţ de care avem nevoie cu privire la relaţiile dintre semne din $\mathcal{P}$ poate fi *reprezentat* în mod adecvat printr-un enunţ despre o relaţie între numerele Gödel ale semnelor şi, reciproc, fiecare formulă care exprimă o relaţie între numerele Gödel poate fi *reinterpretată* fără pericol de confuzie cu ajutorul simbolismului special al lui Gödel ca fiind expresia pentru o relaţie între semne din $\mathcal{P}$. De fapt, nu este totuna să vorbim despre numere sau să vorbim despre semnele lui $\mathcal{P}$, dar unul şi acelaşi formalism, şi anume $\mathcal{P}$, se poate utiliza pentru ambele ţeluri.

Aici ar fi convenabil să ne îndepărtăm de expunerea lui Gödel şi să introducem două semne pe care el nu le utilizează (deşi schiţa preliminară a argumentului său le sugerează). Aceste semne sînt „$\mathcal{C}_N$", care vrea să însemne „expresia al cărei număr asociat este denotat cu N", şi $Diag(x)$, care trebuie considerată ca o abreviere pentru $Sb(x^{17}_{Z(x)})$. Primul dintre aceste semne nu este semn al sistemului $\mathcal{P}$, deoarece sensul său este determinat prin asocieri arbitrare de numere şi semne pe care le-am stabilit ca un ajutor pentru a vorbi despre sistemul $\mathcal{P}$, dar acest semn este util ca un mijloc suplimentar pentru a grăbi trecerea de la o interpretare a formulelor la cealaltă. Aici desigur că litera N este o literă schematică. Pe de altă parte, al doilea semn

este al unei funcţii aritmetice care se poate defini în sistemul $\mathcal{P}$ fără menţionarea unor semne şi formule, deşi acest semn este convenabil să se citească ca o abreviere pentru *numărul formulei care rezultă din substituirea numeralului care denotă x pentru variabila liberă al cărei număr este 17 în formula al cărei număr este x*. Numele de „funcţie diagonală" intenţionează să amintească unele observaţii ale lui Gödel din schiţa sa preliminară. Dacă considerăm numai acele expresii propoziţionale — să zicem $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_C$ etc. — care conţin exact o variabilă liberă şi deci se poate spune că exprimă proprietăţi ale numerelor, vedem că pentru orice asemenea expresie putem să ne întrebăm dacă un număr, inclusiv numărul asociat cu acea expresie, are sau nu proprietatea exprimată de expresia considerată. Notînd cu „$[\mathcal{E}_N; M]$" faptul că numărul denotat cu M satisface $\mathcal{E}_N$, putem aranja propoziţiile examinate într-un şir dublu infinit:

$$\begin{array}{llll} [\mathcal{E}_A; A] & [\mathcal{E}_A; B] & [\mathcal{E}_A; C] & \ldots \\ [\mathcal{E}_B; A] & [\mathcal{E}_B; B] & [\mathcal{E}_B; C] & \ldots \\ [\mathcal{E}_C; A] & [\mathcal{E}_C; B] & [\mathcal{E}_C; C] & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{array}$$

Pentru toate argumentele asociate cu expresii propoziţionale conţinînd o variabilă şi numai una, funcţia numerică exprimată prin $Diag(x)$ asumă ca valori numerele formulelor care exprimă propoziţiile de pe diagonala dreptunghiului. Întreaga definiţie de mai sus permite ca aceasta să aibă valori şi pentru alte argumente, dar aici nu ne interesează acest lucru.

Sîntem acum în poziţia de a construi o formulă curioasă pentru care vom introduce numele „$\mathcal{G}$" ca să indicăm că ea este alcătuită în conformitate cu o prescripţie a lui Gödel. Dacă $\mathcal{E}_N$ este $\sim Bew\ (Diag\ (x))$, atunci $\mathcal{G}$ este $\mathcal{E}_{Diag(N)}$ sau $\sim Bew(Diag(N))$. $\mathcal{G}$ spune că numărul denotat prin $Diag(N)$ are proprietatea aritmetică exprimată prin $\sim Bew(x)$. Dar numărul denotat prin $Diag(N)$ este chiar numărul lui $\mathcal{G}$ iar proprietatea aritmetică exprimată prin $Bew(x)$ este de aşa natură încît ea poate să aparţină numai numărului unei formule nedemonstrabile. Aşadar, în fapt $\mathcal{G}$ spune că ea este nedemonstrabilă. Cel mai apropiat analog pe care îl putem constitui în limba uzuală ar fi: „Este imposibil să se demonstreze enunţul care rezultă prin completarea cu propriul ei nume a formulei neîncheiate «este imposibil să se demonstreze enunţul care rezultă prin completarea cu propriul ei nume a formulei neîncheiate ... »"[17]. Aici noţiunea de completare a unei formule cu propriul ei nume corespunde

[17] Un exemplu întrucîtva similar este dat de J. N. Findlay în "Goedelian Sentences: A Non-numerical Approach", *Mind*, LI (1942), pp. 259—265.

cu funcţia diagonală ; şi dacă un pasaj care începe şi se sfîrşeşte cu semnele citării poate fi admis pentru a conta în acest fel ca nume a ceea ce figurează între semnele citării, atunci întreaga propoziţie poate fi descrisă ca fiind enunţul care rezultă din completarea formulei citate cu propriul ei nume. Dar în teoria lui Gödel corelaţia sistematică a numerelor cu formule ia locul denumirii, iar noţiunea de demonstrabilitate folosită este relativă la sistemul $\mathcal{P}$; aceste deosebiri sînt de mare importanţă.

Gödel personal subliniază asemănarea dintre $\mathcal{G}$ şi propoziţia care furnizează paradoxul mincinosului, dar insistă că lui $\mathcal{G}$ nu i se poate aduce nici o obiecţie în nici un fel. După cum spune el, $\mathcal{G}$ poate să fie de fapt nedemonstrabilă fără a fi falsă, astfel încît nu putem argumenta în mod propriu că dacă ar fi nedemonstrabilă ar trebui să fie demonstrabilă. De asemenea n-ar fi corect să se susţină că $\mathcal{G}$ este vidă asemănător cu observaţia „ceea ce spun eu acum este adevărat" ; căci corelaţia dintre numere şi semne, aşa cum a fost explicată mai sus, oferă posibilitatea ca $\mathcal{G}$ să spună ceva despre sine însuşi. Dacă o formulă este demonstrabilă în cadrul unui sistem deductiv pe deplin formalizat, ea este derivabilă din axiome prin aplicarea regulilor care se referă doar la configuraţii de formule. Fireşte, regulile se referă la configuraţii numai în măsura în care acestea sînt semnificative. Adică, regulile nu fac deosebiri dintre micile deosebiri dintre versiunile semnelor care pot fi pronunţate, scrise sau tipărite de către diferite persoane. Dar aceasta nu înseamnă decît că regulile nu ţin seama de variaţiile cărora nu li se atribuie vreo semnificaţie şi nicidecum că regulile ca atare ar fi incomprehensibile dacă nu se ţine seama de semnificaţia semnelor. Pentru a utiliza o distincţie care a devenit larg răspîndită de la scrierile lui Gödel încoace, putem spune că în prezentarea unui calcul ne ocupăm numai cu reguli sintactice de utilizare a semnelor (opunîndu-le celor semantice) sau, vorbind mai puţin exact : cu reguli asupra relaţiilor dintre semne şi nu cu reguli referitoare la relaţiile semnelor cu lumea. Or, nimic nu interzice unui enunţ să se refere la propriul său tipar. Dacă cineva spune : „Propoziţia pe care o pronunţ acum are nouă cuvinte", enunţul său nu numai că nu este deloc paradoxal, dar este chiar adevărat. Ceea ce i se poate reproşa enunţului „Ceea ce spun eu acum este adevărat" nu este pur şi simplu faptul că el se referă la sine însuşi ; căci, după cum ştiau încă unii logicieni din evul mediu, autoreferirea poate să fie lipsită de pericole. Eroarea rezidă mai curînd în faptul că acest enunţ încearcă să vorbească despre propria sa semnificaţie în loc de a exprima pur şi simplu o semnificaţie ; şi tocmai de aceea nu are deloc semnificaţie. Atunci cînd construim o propoziţie care spune că este nedemonstrabilă în interiorul unui sistem, noi evităm această încurcătură, de-

oarece nedemonstrabilitatea în interiorul unui calcul, spre deosebire de caracterul adevărat sau fals, este o proprietate care poate fi luată în considerare fără a face apel la semnificație. De fapt, această disociere este esențială pentru metoda formalistă pe care Hilbert o susține în matematică, deși nu în metamatematică. Dacă totuși interpretarea sintactică a lui $\mathcal{G}$ ni se pare curioasă și încurcată, motivul ar putea fi acela că noi mai încercăm și aici să aplicăm calea mai uzuală de gîndire conform cu care proprietatea de a fi demonstrabilă (precum și proprietatea de a fi nedemonstrabilă) aparține mai curînd propozițiilor decît formulelor.

Importanța lui $\mathcal{G}$ rezidă în aceea că ea ne permite să demonstrăm două teoreme foarte interesante: (1) dacă $\mathcal{P}$ este ω-consistent, atunci el trebuie să fie incomplet, avînd $\mathcal{G}$ ca formulă indecidabilă și (2) dacă $\mathcal{P}$ este consistent, atunci consistența lui $\mathcal{P}$ nu se poate demonstra în cadrul lui $\mathcal{P}$. Să examinăm acum mai în amănunt aceste teoreme.

(1) *Dacă $\mathcal{P}$ este ω-consistent, el trebuie să fie incomplet, avînd $\mathcal{G}$ ca formulă indecidabilă.*

Să presupunem la început că $\mathcal{G}$ se poate demonstra în interiorul lui $\mathcal{P}$. Atunci trebuie să existe un număr care este numărul unei demonstrații a lui $\mathcal{G}$. Însă ceea ce afirmă $\mathcal{G}$ este tocmai inexistența unui asemenea număr, astfel încît ipoteza noastră conduce la o autocontradicție. Prin urmare, conform cu principiul contrapoziției, sîntem îndreptățiți să spunem că dacă $\mathcal{P}$ este consistent în sensul obișnuit de a nu conține ca teoremă o formulă simultan cu negația ei, atunci $\mathcal{G}$ nu se poate demonstra în interiorul lui $\mathcal{P}$. Dar pînă acum nu am arătat că dacă $\mathcal{P}$ este consistent, atunci $\mathcal{G}$ nu se poate infirma în interiorul lui $\mathcal{P}$. Să presupunem așadar că $\mathcal{G}$ se poate infirma. Dar aceasta înseamnă că se poate demonstra negația lui $\mathcal{G}$, ceea ce echivalează cu $(\exists x)P(x)$, unde $P(x)$ este o prescurtare pentru „x este numărul unei demonstrații a lui $\mathcal{G}$". Pe de altă parte, fiind dat un număr natural se poate demonstra în cadrul lui $\mathcal{P}$ că acesta nu este numărul unei demonstrații din $\mathcal{G}$, adică putem demonstra $\sim P(1)$, $\sim P(2)$, $\sim P(3)$ etc. În adevăr, deși cercetarea poate fi adesea anevoioasă, totuși după un număr finit de pași putem obține o decizie cu privire la orice număr particular, iar decizia trebuie să fie întotdeauna negativă deoarece altfel ar fi posibil să construim o demonstrație a lui $\mathcal{G}$ în cadrul lui $\mathcal{P}$, contrar cu ceea ce am stabilit mai sus. Or, un sistem în cadrul căruia avem și teorema $(\exists x)P(x)$ și $\sim P(1)$, $\sim P(2)$, $\sim P(3)$ etc. poate că nu este inconsistent în sensul uzual, dar este în mod cert nesatisfăcător. Eventualitatea unu asemenea defect a fost observată pentru prima oară de către P. Finsler în 1926 [18], iar defectul a fost denumit ω-inconsistență

[18] "Formale Beweise und die Entscheidbarkeit", în *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 676–682.

(după ω, primul ordinal transfinit). Utilizînd încă o dată principiul contrapoziției, putem spune așadar că dacă $\mathcal{P}$ este ω-consistent, atunci $\mathcal{G}$ nu poate fi respins în cadrul lui $\mathcal{P}$. Și atunci, deoarece ω-consistența este o cerere mai strictă decît consistența simplă, putem rezuma rezultatele noastre spunînd că dacă $\mathcal{P}$ este ω-consistent, atunci $\mathcal{G}$ nu este nici demonstrabilă, nici infirmabilă în $\mathcal{P}$, ceea ce revine la a spune că $\mathcal{P}$ este incomplet.[19].

(2) *Dacă $\mathcal{P}$ este consistent, atunci consistența lui $\mathcal{P}$ nu se poate demonstra în cadrul lui $\mathcal{P}$.*

În legătură cu aceasta avem nevoie să luăm în considerare doar consistența simplă; căci dacă este imposibil să demonstrăm consistența simplă, atunci *a fortiori* este imposibil să demonstrăm ω-consistența. Or, am arătat deja că dacă $\mathcal{P}$ este consistent, $\mathcal{G}$ nu se poate demonstra în interiorul lui $\mathcal{P}$; iar din aceasta urmează firește că dacă $\mathcal{P}$ este consistent, $\mathcal{G}$ trebuie să fie adevărată, deoarece ceea ce spune $\mathcal{G}$ este faptul că ea nu poate fi demonstrată. Dar acest raționament care ne dă satisfacție este neformal. În vederea demonstrării celei de a doua teoreme a lui Gödel, este necesar să arătăm că dacă $\mathcal{C}$ este o formulă din $\mathcal{P}$, a cărei interpretare sintactică afirmă consistența lui $\mathcal{P}$, atunci condiționalul lui Filon cu $\mathcal{C}$ ca antecedent și $\mathcal{G}$ ca succedent se poate demonstra în cadrul lui $\mathcal{P}$. O asemenea demonstrație nu este dificilă în principiu, dar este în mod inevitabil greoaie și nu vom încerca să o dăm aici. Dacă însă presupunem demonstrată această lemă, atunci a doua teoremă rezultă imediat. În adevăr, dacă ar fi posibil să demonstrăm consistența lui $\mathcal{P}$ în interiorul lui $\mathcal{P}$, ar fi posibil de asemenea să demonstrăm $\mathcal{G}$; iar aceasta, după cum am văzut, nu se poate. Putem spune chiar că $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ sînt echivalente, deoarece $\mathcal{P}$ conține ca teoremă nu numai condiționalul menționat mai sus, ci și reciproca. Susținînd despre sine că este nedemonstrabilă, $\mathcal{G}$ ne dă un exemplu care dovedește că $\mathcal{P}$ nu oferă mijloace pentru demonstrația tuturor formulelor; iar aceasta este totuna cu a spune că $\mathcal{P}$ nu este inconsistent în sensul uzual al cuvîntului.

A doua dintre aceste teoreme arată limpede că programul lui Hilbert nu poate fi niciodată executat așa cum a fost conceput inițial. $\mathcal{P}$ pare să cuprindă posibilități pentru toate argumentările care în mod obișnuit s-au numit finitiste, și totuși el nu permite o demonstrație metamatematică a propriei sale consistențe. Prin urmare, *a fortiori* el nu poate garanta o demonstrație matematică a consistenței vreunui sistem mai ambițios în care este inclus ca o parte. Fără în-

[19] În articolul „Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, I (1936), pp. 87—91, J. B. Rosser a demonstrat teorema mai tare că dacă $\mathcal{P}$ este numai consistent, el trebuie să fie și incomplet.

doială că pot exista raționamente în interiorul lui $\mathcal{P}$ care să dovedească că $\mathcal{P}$ (și eventual chiar sisteme matematice mai bogate) este scutit nu numai de inconsistența simplă, dar chiar și de ω-inconsistență. În fapt, după publicațiile lui Gödel, G. Gentzen a produs o asemenea demonstrație utilizînd inducția transfinită[20]. Dar totdeauna trebuie să existe un anumit sistem matematic pe care-l acceptăm ca satisfăcător fără a proba în mod independent faptul că el este scutit de contradicție; iar argumentarea lui Gödel arată că acest sistem trebuie cel puțin să fie mai bogat decît $\mathcal{P}$. Dacă reflectăm asupra acestor rezultate, putem chiar să ne hazardăm a crede că este ceva radical eronat în programul formalist de încercare de-a face respectabil un sistem matematic fără a recurge la o interpretare a sa intuitiv acceptabilă. Însă Gödel nu susține că ar fi demonstrat acest lucru. Dimpotrivă, el spune în mod explicit că rezultatul său nu este incompatibil cu programul lui Hilbert, deoarece ar putea exista o demonstrație finitistă de consistență care nu poate fi prezentată în $\mathcal{P}$; dar el nu ne explică ce anume înțelege el în acest context prin cuvîntul „finitistă".

Deși a doua dintre aceste două teoreme se leagă în mod mai evident de controversele în legătură cu fundamentele matematicii, prima dintre ele prezintă o importanță fundamentală, deoarece ea pune în evidență o proprietate curioasă și pînă acum nebănuită a aritmeticii: faptul că aritmetica nu poate fi niciodată complet formalizată. Pentru a lămuri aceasta, să examinăm încă o dată construcția lui $\mathcal{G}$.

În intrepretarea ei sintactică, formula spune că ea nu se poate demonstra în $\mathcal{P}$; și deoarece în $\mathcal{P}$ ea nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă, ea este un exemplu care arată că $\mathcal{P}$ este incomplet. Dar ce s-ar întîmpla dacă am încerca să înlăturăm această carență a lui $\mathcal{P}$ adăugînd $\mathcal{G}$ ca axiomă nouă? Atunci, $\mathcal{G}$ devine demonstrabilă în sensul banal în care se poate spune că este demonstrabilă o axiomă — ca rezultînd din sine însăși, dar numai în interiorul noului sistem $\mathcal{P}'$, sistem care se poate arăta că este incomplet prin construirea unei noi formule Gödel, să spunem $\mathcal{G}'$. In construcția lui $\mathcal{G}$ am utilizat expresia predicat $Bew(x)$, pe care am definit-o referindu-ne la numerele asociate cu axiomele lui $\mathcal{P}$. Cînd încercăm să construim o formulă indecidabilă în $\mathcal{P}'$ trebuie firește să utilizăm o nouă expresie predicat, să zicem $Bew'(x)$, care se definește prin referire la numerele asociate cu axiomele lui $\mathcal{P}'$, inclusiv numărul asociat cu $\mathcal{G}$. Dar în rest putem proceda ca și în construcția lui $\mathcal{G}$; și dacă $\mathcal{P}'$ este ω-consistent, rezultatul va fi indecidabil în $\mathcal{P}'$ pentru motive

[20] „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, CXII (1936), pp. 493–565.

asemănătoare celor pe care le-am dat în demonstrația teoremei (1). Dar nici în felul acesta nu am terminat; căci manevra de adăugare a ultimei formule indecidabile ca axiomă nouă se poate repeta *ad infinitum* și mereu cu același rezultat. Pe scurt, raționamentul lui Gödel demonstrează nu numai că $\mathcal{P}$ este incomplet, dar și că el este incompletabil. Aceasta nu înseamnă că există în matematică o anumită formulă care niciodată, în nici un fel, nu poate fi demonstrată sau respinsă, ci înseamnă numai că ar fi zadarnică speranța cu privire la un *sistem formal* care să cuprindă aritmetica intuitivă în întregime.

Incompletabilitatea aritmeticii formale n-ar prezenta o importanță mare dacă formulele care resping eforturile noastre de a oferi demonstrații ar fi întotdeauna enunțuri reflexive de felul celor construite de Gödel. Dar posibilitatea de a construi aceste enunțuri specific indecidabile este interesantă doar ca un simptom al unei spețe de incompletitudine care este inevitabilă pentru orice sistem de axiome care se propune pentru teoria numerelor. În virtutea relației sale cu ω-inconsistența, Tarski a numit-o ω-incompletitudine[21]. În adevăr, dacă $P(x)$ este o abreviere pentru „x este numărul unei demonstrații a lui $\mathcal{G}$", atunci, după cum am văzut, putem să demonstrăm în interiorul lui $\mathcal{P}$ orice formulă din șirul $\sim P(1)$, $\sim P(2)$, $\sim P(3)$ etc., dar nu putem să demonstrăm $(x) \sim P(x)$, care este echivalentă cu $\mathcal{G}$. Ceea ce revine la a spune că $\mathcal{P}$ nu are resurse de generalizare într-o situație în care generalizarea pare perfect posibilă bunului-simț comun neformalizat. Dacă, în loc de a adăuga pur și simplu pe $\mathcal{G}$ ca axiomă nouă, extindem formalismul nostru adăugînd un nou aparat general pentru demonstrație care ne permite să-l obținem pe $\mathcal{C}$ (deci și pe $\mathcal{G}$) ca teoremă, vom dispune de un instrument care este mai puternic pentru țelurile obișnuite ale aritmeticii. Aici elementul nou constă în utilizarea axiomelor care conțin variabile de tip mai înalt decît cele care intervin în teoria numerelor a lui $\mathcal{P}$; iar Gödel a arătat că aceasta nu numai că ne permite să demonstrăm formule pînă acum nedemonstrabile, dar pentru multe formule ne oferă demonstrații mult mai scurte decît cele anterioare[22]. În cadrul acestui sistem nou este însă posibil să construim o nouă formulă indecidabilă, astfel încît întregul proces se poate repeta *ad infinitum*.

În teoria numerelor există anumite propoziții celebre care timp de secole au rezistat la toate încercările matematicienilor de a le de-

---

[21] „Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XL, (1933), pp. 97—112.

[22] „Über die Länge der Beweise", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, VII (1936), pp. 23—24.

monstra sau de a le respinge; de exemplu, aserțiunea lui Fermat că nu există numere naturale x, y, z și n, toate mai mari decît zero, astfel încît

$$x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2},$$

conjectura lui Goldbach că fiecare număr par mai mare decît 2 este suma a două numere prime, sau ipoteza că există o infinitate de perechi de numere prime p și q astfel încît

$$p + 2 = q.$$

Poate că unele dintre acestea n-au putut fi decise din motive asemănătoare cu cele pe care tocmai le-am considerat, adică pentru că sînt adevărate dar pentru demonstrația lor necesită un sistem formal mai bogat decît vreunul studiat pînă în prezent. Oricare ar fi însă statutul vreunuia dintre aceste propoziții, nu putem ști nimic despre el înainte de a o demonstra într-un sistem mai bogat. Și oricît de pesimiști am fi în legătură cu perspectivele unui asemenea progres, trebuie să admitem că nici una dintre aceste propoziții nu va putea fi demonstrată vreodată ca fiind *absolut* indecidabilă. Căci pentru a demonstra că vreuna din ele, să zicem conjectura lui Goldbach, ar fi absolut indecidabilă, ar trebui să arătăm că ea este atît nedemonstrabilă, cît și irefutabilă. Or este imposibil să arătăm că conjectura lui Goldbach este irefutabilă fără a da totodată o demonstrație a ei; aceasta pentru că fiecare sistem formal de teoria numerelor, oricît de simplu, ne oferă o metodă cerută — deși greoaie — prin care conjectura lui Goldbach ar putea fi într-o zi refutată dacă ea este falsă; și anume, aceasta este metoda de a compara pe rînd fiecare număr cu suma fiecărei perechi de numere prime mai mici decît el. A arăta că conjectura lui Goldbach nu poate fi respinsă în nici un chip înseamnă a arăta că ea nu poate fi respinsă nici chiar prin această metodă, adică înseamnă a arăta că ea este adevărată. Pe de altă parte, nu pare evident că o demonstrație a nedemonstrabilității conjecturii lui Goldbach ar fi în același timp o demonstrație de existență a unui contraexemplu. Aceasta este o piesă tare în dosarul lui Brouwer.

În memoriul său inițial, Gödel demonstra teorema foarte tare că pentru orice clasă k ω-consistentă, care conține doar formule din $\mathcal{P}$ și este recursivă într-un sens ce va fi explicat mai departe, există o formulă care se obține prin închiderea universală a unui semn de predicat recursiv cu proprietatea că nici ea, nici negația ei nu pot fi derivate din k în interiorul lui $\mathcal{P}$. Pentru a evita introducerea noțiunii de funcție recursivă înainte ca această introducere să fie esențială, nu am încercat să reproducem toate lemele pentru demonstrarea tezei com-

prehensive a lui Gödel, ci ne-am concentrat atenţia în primă instanţă la cazul particular cînd k nu adaugă nimic la axiomele lui $\mathcal{P}$. După cum a arătat chiar Gödel, putem merge mai departe în direcţia simplificării şi să afirmăm caracterul esenţialmente incomplet al unui sistem ca cel din *Principia Mathematica* sau ca teoria axiomatică a lui Zermelo în care, dacă se dau definiţii convenabile pentru „0" şi „succesor", se pot obţine axiomele lui Peano. În adevăr, fiecare asemenea sistem conţine de fapt sistemul $\mathcal{P}$ şi prin urmare este tot atît de incompletabil ca şi $\mathcal{P}$. Această descoperire a avut consecinţe importante pentru susţinerile lui Frege şi ale succesorilor săi.

În ultimul capitol din lucrarea sa *Introduction to Mathematical Philosophy*, Bertrand Russell scria:

„Dacă mai există unii care nu admit identitatea logicii cu matematica, îi putem soma să indice în succesiunea definiţiilor şi deducţiilor din *Principia Mathematica* punctul în care ei consideră că se încheie logica şi începe matematica"[23].

După descoperirea lui Gödel putem răspunde în mod rezonabil că logica nu se întinde mai departe de teoria cuantificării. Cînd spunem că aritmetica, şi o dată cu ea aşa numitele calcule funcţionale de ordin mai înalt precum şi toate versiunile teoriei mulţimilor, sînt esenţialmente incomplete, admitem de fapt că aceste teorii cuprind anumite noţiuni care nu pot fi caracterizate exhaustiv prin stipularea unor reguli de inferenţă; or, aceasta pare a fi un foarte bun motiv pentru a le exclude din domeniul de acţiune al logicii. După cum se admite îndeobşte, logica trebuie să fie teoria fundamentală în bogata familie a teoriilor deductive pe care o denumim matematică, deoarece ea este presupusă de către toate aceste teorii. Dar pare absurd să afirmăm că întreaga matematică poate fi redusă la logică, dacă în acelaşi timp continuăm să susţinem că logica cuprinde întreaga diversitate pe care o găsim în matematică. Or, tocmai aceasta ar trebui s-o spună un discipol al lui Frege. Pe vremea cînd scria Frege, domeniul logicii nu era delimitat în mod precis iar teza sa părea plauzibilă tocmai pentru că pe atunci cititorul putea să facă în mintea sa o tranziţie uşoară de la teoria cuantificării la teoria mulţimilor şi aritmetică. Dar Gödel a revelat diferenţa profundă dintre teoria cuantificării, care este completă, şi teoria mulţimilor, care nu este completă. De aceea, de dragul clarităţii, pare mai bine să rezervăm denumirea de „logică" pentru prima; şi tocmai astfel procedează de fapt majoritatea matematicienilor atunci cînd se pronunţă asupra preocupărilor obişnuite. Pe scurt, studiul pe care l-am denumit logică generală deoarece se ocupă cu generalitatea, merită acest nume şi pentru că nu omite nimic din logica

[23] *Op. cit.*, pp. 194—195.

propriu-zisă, cu excepția tratării explicite a modalităților, care se introduce cînd se trece de la regulile de ordinul întîi la cele de ordinul doi.

4. *Problema deciziei*

Pentru logica primară sau propozițională avem o procedură de decizie, adică o regulă de calcul, cu ajutorul căreia putem determina dacă o schemă dată este sau nu validă. Reducem această schemă la forma normală conjunctivă, iar apoi, dacă fiecare termen al conjuncției este o disjuncție conținînd ceva de forma $P \vee \sim P$, vom spune că schema inițială este validă (sau tautologică); în caz contrar, ea nu este validă. Un alt mijloc constă în construirea unui tabel de adevăr pentru formulă, inspectînd dacă formula respectivă primește valoarea *adevăr* pentru toate posibilitățile de adevăr și fals pe care le enumerăm. Evident, asemenea tehnici depind de finitudinea domeniului posibilităților de examinat. În logica primară, orice formulă conține cel mult un număr finit de litere de schemă; iar dacă numărul literelor este n, trebuie să examinăm numai 2^n posibilități de adevăr pentru a determina validitatea formulei. În logica generală, situația este cu totul diferită, dar este firesc să ne întrebăm dacă nu cumva și aici putem stabili o procedură de decizie cu ajutorul căreia să determinăm: (*a*) dacă o formulă dată este sau nu universal validă, și (*b*) atunci cînd ea nu este universal validă, care este mărimea domeniilor pentru care ea este validă, în cazul cînd există asemenea domenii. Probleme analoage se pun și cu privire la realizabilitatea formulelor, dar pentru motivele explicate într-o secțiune anterioară, ele nu trebuie să fie examinate separat.

Vom vedea acum că în logica generală nu putem avea o soluție generală a problemei deciziei, dar pentru un număr de cazuri particulare s-au stabilit proceduri de decizie, rezultatele fiind strînse la un loc de către W. Ackermann în broșura sa din 1954 denumită *Solvable Cases of the Decision Problem*[24]. Deși este imposibil să le examinăm aici în amănunt pe toate, este util să prezentăm rezultatele principale, însoțite de comentarii scurte.

Problema a fost rezolvată pentru orice schemă bine formată care

(1) conține numai litere funcționale monadice, sau

(2) se poate reduce la o formă normală prenex în care prefixul:

(*a*) nu conține cuantori existențiali, sau

(*b*) nu conține cuantori universali, sau

[24] Un rezumat al acestor descoperiri se poate găsi și la A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, I (1956), § 46, împreună cu unele note istorice.

(*c*) nu conţine cuantori existenţiali în faţa vreunui cuantor universal, sau

(*d*) nu conţine mai mult decît un cuantor existenţial, sau

(*e*) nu conţine mai mult decît doi cuantori existenţiali, iar aceştia nu sînt separaţi de vreun cuantor universal, sau

(3) se poate reduce la o formă normală prenex în care

(*a*) matricea (adică expresia de după prefix) este o disjuncţie de părţi elementare şi negaţii ale părţilor elementare sau se poate aduce la această formă, sau

(*b*) prefixul este de forma $(\exists x_1) \cdots (\exists x_m)(y_1) \cdots (y_n)$ şi fiecare parte elementară a matricei care conţine vreuna dintre variabilele $x_1, \cdots, x_m$ conţine sau toate aceste variabile sau cel puţin una dintre variabilele $y_1, \cdots, y_n$, sau

(*c*) prefixul se încheie cu $(z_i) \cdots (z_n)$ şi fiecare parte elementară a matricei care conţine vreuna dintre variabilele care intervin în prefix conţine cel puţin una dintre variabilele $z_1, \cdots, z_n$ sau

(*d*) prefixul este de forma $(\exists x)(y)(\exists z_i) \cdots (\exists z_n)$ cu $n \leqslant 4$, matricea fiind de forma $G(x, y) \supset H(z_1, \cdots, z_n)$, astfel încît în versiunea explicită a lui $H(z_1, \cdots, z_n)$ unica literă funcţională este litera funcţională diadică G.

Problema deciziei pentru calculul funcţional monadic a fost rezolvată independent de către mai mulţi autori, dar cea mai interesantă pare a fi metoda lui Bernays şi Schönfinkel. Conform unei teoreme stabilită de aceşti autori, pe care am amintit-o într-o secţiune anterioară, orice schemă din calculul funcţional monadic care este vreodată realizabilă, este realizabilă şi într-un domeniu cuprinzînd 2^n indivizi, unde n este numărul diferitelor litere funcţionale care figurează în ea. Dar o schemă este universal validă dacă şi numai dacă negaţia ei nu poate fi satisfăcută în nici un domeniu; rezultă de aici că o schemă din calculul funcţional monadic, conţinînd n litere funcţionale, este universal validă dacă şi numai dacă negaţia ei nu este realizabilă într-un domeniu cu 2^n indivizi, adică dacă şi numai dacă schema însăşi este validă într-un domeniu cu 2^n indivizi. Deoarece în cazul unui domeniu cu 2^n indivizi cuantificarea universală se poate înlocui printr-o conjuncţie cu 2^n termeni, iar cuantificarea existenţială se poate înlocui printr-o disjuncţie cu 2^n termeni, o schemă funcţională monadică o putem testa întotdeauna prin înlocuirea tuturor cuantorilor cu conjuncţii convenabile şi aplicarea ulterioară, la formula rezultată, a tehnicii tabelelor de adevăr. În practică însă, este mai lesnicios să adoptăm metoda lui H. Behmann şi să transformăm formula

originară într-un complex din cadrul funcţiilor de adevăr, fiecare constituent fiind sau o formulă existenţială de forma $(\exists x)(Fx \cdot \sim Gx \cdot Hx)$, unde F, G şi H reprezintă o selecţie dintre literele funcţionale monadice ale schemei iniţiale sau o negaţie a unei asemenea formule existenţiale[25]. Metodele grafice utilizate de către J. Venn în cartea sa *Symbolic Logic* din 1881, şi de către Lewis Carroll, în cartea sa *Symbolic Logic* din 1896, pentru testarea validităţii silogismelor sînt de fapt anticipări ale acestei tehnici.

Odată cu admiterea literelor funcţionale diadice şi a altor litere poliadice, logica generală devine mai complicată, dar şi aici mai putem găsi unele scheme care sînt universal valide de îndată ce sînt valide în orice domeniu finit. Astfel, o schemă $(x_1) \ldots (x_m)M(x_1, \ldots, x_m)$ care nu are decît cuantori universali este universal validă dacă este validă într-un domeniu cu m indivizi. În adevăr, dacă ea nu este validă în vreun domeniu cu mai mult decît m indivizi, putem alege dintr-un asemenea domeniu anumiţi m indivizi, denumiţi $A_1, \ldots, A_m$, pentru care $M(A_1, \ldots, A_m)$ este falsă, ceea ce contrazice ipoteza că formula iniţială este validă pentru orice domeniu cu m indivizi. De asemenea, o schemă $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)M(x_1, \ldots, x_m)$ care nu conţine decît cuantori existenţiali este universal validă dacă ea este validă într-un domeniu cu un singur individ. În adevăr, dacă ea nu este universal validă, atunci nu poate fi universal validă nici formula mai tare $(\exists x)M(x, \ldots, x)$ şi deci trebuie să existe un domeniu avînd un singur element, să-i zicem A, pentru care $M(A, \ldots, A)$ este falsă, ceea ce contrazice ipoteza că formula iniţială este validă pentru orice domeniu avînd un singur individ. Trebuie însă să observăm că atunci cînd versiunea explicită a formulei $M(x_1, \ldots, x_m)$ conţine ca părţi formule de forma $\sim(x_p = x_q)$, poate exista un anumit număr k astfel încît formula iniţială este validă în toate domeniile cu cel puţin k elemente, dar nu este validă în nici un domeniu cu mai puţin de k elemente. În asemenea cazuri, problema determinării numărului k este destul de dificilă.

Mai departe: o schemă de forma $(x_1) \ldots (x_m)(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)M(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$, în care toţi cuantorii universali preced pe cei existenţiali, este universal validă dacă ea este validă în orice domeniu cu m indivizi. În adevăr, dacă formula iniţială este validă pentru orice domeniu avînd m indivizi, atunci cu atît mai mult va fi validă formula $(x_1) \ldots (x_m)N(x_1, \ldots, x_m)$, unde $N(x_1, \ldots, x_m)$ este o abreviere pentru disjuncţia tuturor formulelor posibile $M(x_1, \ldots, x_m; x_{i1}, \ldots, x_{in})$ în care variabilele din original $y_1, \ldots, y_n$ s-au înlocuit într-un fel sau altul cu variabile din mulţimea x-urilor. Dacă însă $(x_1) \ldots (x_m)N(x_1,$

[25] „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem", *Mathematische Annalen*, LXXXVI (1922), pp. 163–229.

..., x_m) este validă într-un domeniu cu m indivizi, ea trebuie să fie universal validă conform primului caz particular din cele menţionate mai sus; odată cu ea va fi validă şi formula iniţială care rezultă drept consecinţă.

Rezultatele de mai sus figurează toate în memoriul sus-menţionat al lui Bernays şi Schönfinkel. Celelalte două cazuri din grupul pe care-l denumim al doilea nu sînt atît de uşoare, dar cazul 2 (*d*) a fost rezolvat în 1928 de către W. Ackermann[26] şi T. Skolem[27] în mod independent, iar 2 (*e*) a fost rezolvat ceva mai tîrziu în mod independent de către K. Gödel[28], L. Kalmar[29] şi K. Schütte[30]. În ambele cazuri, prin transformări ingenioase, problema se reduce la aceeaşi problemă pentru calculul funcţional monadic. Dar aceste cazuri sînt ultimele care mai pot fi: (I) descrise prin simpla referire la structura prefixului din forma normală prenex corespunzătoare şi (II) rezolvate printr-o demonstraţie de suficienţă a unui test dintr-un domeniu finit. Motivul, descoperit de către Schütte, constă în aceea că pentru orice prefix care nu se află în lista noastră (adică pentru orice prefix avînd cel puţin doi cuantori existenţiali separaţi prin cel puţin un cuantor universal) se pot găsi scheme valide pentru orice domeniu finit, care nu mai sînt valide într-un domeniu infinit numărabil. Desigur, nu s-a stabilit că ar fi imposibil să existe o soluţie pentru vreunul din cazurile excluse, dar din rezultatul lui Schütte urmează în mod clar că dacă există vreo soluţie, ea trebuie găsită prin altă metodă.

În grupul pe care l-am numit al treilea, am adunat unele cazuri pentru care se pot găsi soluţii ţinînd seama atît de forma matricei, cît şi de structura prefixului, însă aici lista nu este nici sistematică, nici exhaustivă. Ar fi şi greu să fie aşa, întrucît orice succes în derivarea unei teoreme matematice din axiome este de fapt descoperirea unei scheme universal valide de forma $A \supset T$, unde cu A am notat conjuncţia axiomelor iar cu T teorema respectivă. Lista nu cuprinde decît cîteva cazuri interesante în virtutea generalităţii lor. Printre

---

[26] „Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke", *Mathematische Annalen*, C (1928), pp. 638—649.

[27] „Über die mathematische Logik", *Norsk Matematisk Tidsskrift*, X, (1928), pp. 125—142.

[28] „Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, II (1932), pp. 27—28; „Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XL (1933), pp. 433—43.

[29] „Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten", *Mathematische Annalen*, CVIII (1933), pp. 466—484.

[30] „Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, CIX (1934), pp. 572—603; „Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln", *ibid.*, CX (1934), pp. 161—194.

ele 3 (*d*) este specific deoarece acoperă scheme care nu sînt valide în nici un domeniu infinit deşi sînt valide în orice domeniu finit.

În afară de rezolvarea problemei deciziei pentru cazuri particulare, s-au descoperit şi unele reduceri. Orice reducere este o procedură cu ajutorul căreia pentru o schemă dată se poate construi o altă schemă, care aparţine unei anumite clase prescrise şi care este universal validă atunci şi numai atunci cînd este universal validă schema iniţială; o clasă de scheme la care se pot reduce toate schemele în acest fel se numeşte o *clasă de reducţie*. Cea mai binecunoscută dintre clasele de reducţie este clasa schemelor în formă normală prenex Skolem, dar există şi altele, de exemplu clasa schemelor cu o singură literă funcţională, clasa schemelor conţinînd numai litere funcţionale diadice şi chiar clase definite mai strîns, cum ar fi clasa schemelor în formă normală prenex Skolem cu prefix de formă $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)$ (y) şi o matrice conţinînd o singură literă funcţională diadică[31]. Reducerile pot fi utile în vederea abordării unor probleme particulare, dar avînd în vedere descoperirea lui A. Church, de care ne vom ocupa în prezent ele sînt interesante şi ca indicaţii ale limitelor eforturilor utile.

Sub influenţa unor teorii eronate din logică, filosofii au presupus uneori că toate truismele logicii pot fi certificate ca atare printr-o procedură simplă. Wittgenstein, de exemplu, scria:

„Principiul nostru fundamental rezidă în aceea că orice problemă care în genere poate fi decisă prin logică, poate fi decisă direct ... Este posibil ... să dăm de la bun început descrierea tuturor propoziţiilor logice «adevărate». De aceea *niciodată* nu putem avea surprize în logică ... Demonstraţia în logică este numai un expedient mecanic pentru a facilita recunoaşterea unei tautologii, atunci cînd ea este complicată"[32].

Din partea lor, matematicienii au considerat uneori că teoria lui Frege trebuie să fie eronată pentru că problemele din teoria numerelor nu se pot rezolva toate prin reguli mecanice, care după opinia lor ar trebui să fie suficiente pentru rezolvarea tuturor chestiunilor logice. În memoriul în care a demonstrat că aritmetica formală nu este completabilă, Gödel a clarificat pentru prima oară că descoperirea unei proceduri universale de decizie pentru logica generală ar fi suficientă pentru rezolvarea unor faimoase probleme nesoluţionate din teoria numerelor, cum ar fi aceea cu privire la ipoteza lui Goldbach. În contextul în care figura această observaţie a sa nu se presupunea vreo filosofie sau alta a matematicii, ci mai curînd se sugera că nu este plauzibil să se găsească o procedură universală de decizie pentru logica generală. Peste cîţiva ani, imposibilitatea unei asemenea descoperiri

---

[31] Istoricul acestor reduceri, precum şi al altora, se poate găsi la A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*. I, § 47.

[32] *Tractatus Logico-Philosophicus*, 5.551, 6.125, 6.1251, 6.1262.

a fost demonstrată chiar prin dezvoltarea tehnicii lui Gödel. Pentru a înțelege argumentația care conduce la această concluzie, trebuie să examinăm mai întîi conceptul său de funcție recursivă, concept pe care l-am amintit dar nu l-am explicat în secțiunea anterioară.

În porțiunea relevantă din articolul său din 1931, Gödel începe cu o prezentare foarte generală a noțiunii familiare de definiție recursivă. O funcție din teoria numerelor $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, adică o funcție la care atît toate argumentele cît și toate valorile sînt numere naturale, se spune că este *recursiv definită* pe baza funcțiilor (tot din teoria numerelor) $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ și $\mu(x_1, \ldots, x_{n+1})$ atunci cînd pentru toate numerele $x_2, \ldots, x_n$ și k:

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n);$$
$$\varphi(k + 1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_2), x_2, \ldots, x_n).$$

Apoi el face uz de această noțiune pentru a introduce un concept nou. Și anume, el spune că o funcție din teoria numerelor este *recursivă* dacă există o succesiune finită de funcții din teoria numerelor φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n, care se încheie cu funcția dată φ și este astfel alcătuită încît orice funcție din succesiune: (*a*) sau este definită recursiv pe baza a două funcții care o preced în succesiunea dată, (*b*) sau este derivată dintr-una din funcțiile care o preced, folosind ca argumente unele dintre funcțiile precedente, de exemplu în felul următor:

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi_p(\varphi_q(x_1, x_2), \varphi_r(x_2)),$$

unde p, q, r sînt mai mici decît k, sau (*c*) este o constantă, sau (*d*) este funcția succesor. Includerea în definiția funcțiilor recursive a ultimelor două clauze arată în mod clar că Gödel avea în vedere nu numai funcțiile definite recursiv (adică prin formule recurente), dar și funcțiile presupuse de asemenea formule. Trăsătura comună interesantă a tuturor funcțiilor pe care el le numește recursive constă în aceea că valorile lor sînt determinate de către egalitățile inițiale fie direct, ca în cazurile (*c*) și (*d*) de mai sus, fie indirect, atunci cînd egalitățile inițiale servesc ca premise pentru calculul valorilor prin două operații simple: substituția pentru variabile și înlocuirea unei expresii cu alta egală cu ea. În această conexiune, recurențele sînt importante deoarece numai ele salvează conceptul de funcție recursivă de banalitate. Pe de altă parte, nici o funcție nu poate fi definită prin formule de recurență fără a face apel la constanta 0 și funcția succesor.

Extinzînd întrucîtva uzanțele, Gödel denumește *recursivă* orice relație (funcție propozițională) de n numere naturale $R(x_1, \ldots, x_n)$ atunci cînd există o funcție recursivă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ astfel încît relația $R(x_1, \ldots, x_n)$ are loc dacă și numai dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. În cazul particular cînd $n = 1$, putem spune că R este o proprietate recursivă;

în acest caz spunem de asemenea că este recursivă clasa pe care o determină R. Dar este mai convenabil să vorbim de funcţii recursive şi relaţii recursive pentru că în gîndirea matematică noţiunea de funcţie este strîns legată de noţiunea de relaţie. Ori de cîte ori se poate vorbi de o funcţie φ astfel încît $x = \varphi(y)$, se poate vorbi de asemenea şi de o relaţie R astfel încît $R(x, y)$.

Evident, funcţiile $x + y$, $x \cdot y$, x^y sînt recursive; de asemenea şi relaţiile $x = y$, $x < y$. Astfel, scriind „n'" pentru „succesorul lui n", avem pentru $x + y$ egalităţile:

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + n' = (x + n)' ; \end{cases}$$

pentru $x \cdot y$ avem egalităţile:

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot n' = xn + x, \end{cases}$$

iar pentru x^y avem:

$$\begin{cases} x^0 = 0' \\ x^{n'} = x^n \cdot x. \end{cases}$$

Apoi, funcţiile de adevăr din logica propoziţională pot fi corelate cu funcţiile recursive din teoria numerelor, astfel încît putem dispune şi de ele pentru a le utiliza în definiţiile funcţiilor şi relaţiilor recursive. După cum era şi de aşteptat, cuantorii prezintă dificultăţi în acest sens, dar Gödel arată că şi ei pot fi utilizaţi pentru definirea funcţiilor şi relaţiilor recursive cu condiţia ca cuantorii să fie însoţiţi de restricţii astfel încît în principiu să putem parcurge toate cazurile relevante. Astfel, fiind dată o funcţie recursivă exprimată prin $\varphi(x)$ şi o relaţie recursivă exprimată prin $R(x, y)$, putem defini o altă relaţie recursivă scriind:

$$S(x, y) \equiv (\exists z)[z \leqslant \varphi x \cdot R(z, y)].$$

Ori de cîte ori se introduc cuantorii în definiţiile sintaxei sale aritmetizate, ei trebuie să fie însoţiţi de asemenea restricţii, cu excepţia unicei definiţii pentru predicatul $Bew(x)$, unde este esenţial pentru dezvoltarea argumentaţiei că operatorul existenţial poate apare fără restricţii. De asemenea, trebuie totdeauna restrîns numărul cazurilor ce urmează a fi investigate pentru a descoperi numărul denotat prin semnul $\varepsilon_x F(x)$, care înseamnă: „cel mai mic număr x astfel încît $F(x)$, dacă există un asemenea număr, iar în caz contrar 0".

Făcînd uz de acest aparat al sintaxei aritmetizate, Gödel este în stare să demonstreze că orice relaţie recursivă se poate defini în cadrul sistemului său $\mathcal{P}$, sau mai precis: că orice semn relaţional recursiv cu n variabile se asociază în sistemul său cu un număr, să zicem r,

astfel încît dacă $u_1, \ldots, u_n$ desemnează numerele asociate variabilelor, atunci sau este adevărată formula

$$Bew\,[Sb(r^{u_1, \ldots, u_n}_{Z(x_1), \ldots, Z(x_n)})]$$

sau este adevărată formula

$$Bew\,[Neg\ Sb(r^{u_1, \ldots, u_n}_{Z(x_1), \ldots, Z(x_n)})]$$

pentru fiecare n-uplu de numere naturale luate ca valori ale variabilelor $x_1, \ldots, x_n$, după cum relaţia are sau nu loc pentru acest *n*-uplu[33]. În adevăr, spunem că o relaţie recursivă este definibilă într-un sistem dacă şi numai dacă axiomele sistemului ne permit să decidem dacă are loc relaţia pentru mulţimea de numere corespunzătoare. Pentru a demonstra teorema sa, Gödel presupune că toate relaţiile recursive de *n* argumente sînt de forma $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, unde φ desemnează o funcţie recursivă de $n - 1$ argumente, iar apoi face uz de inducţia matematică după gradul de complexitate care este posibil pentru structura funcţiilor recursive. Apoi el arată că toate funcţiile recursive se pot defini în cadrul unei versiuni simple a aritmeticii lui Peano, pe care am putea eventual s-o numim $\mathcal{P}^0$, şi reciproc că orice relaţie pe care acest sistem ne permite s-o demonstrăm sau s-o respingem pentru orice mulţimi convenabile de numere este recursivă[34].

Deosebirea cea mai importantă dintre şi $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}^0$ constă în aceea că al doilea sistem nu ne oferă variabile de diferite tipuri; or, aceasta atrage după sine şi alte deosebiri. Identitatea nu mai poate fi definită aşa cum se procedează în *Principia Mathematica*, ci trebuie să fie introdusă separat; şi deoarece nici principiul extensionalităţii, nici principiul inducţiei matematice nu se pot formula printr-un singur enunţ, fiecare din ele trebuie înlocuit printr-o infinitate de axiome cuprinse de către o schemă. Pentru a exprima lucrurile în notaţia cea mai uzuală (adică: punînd x' pentru *succesorul lui* x, utilizînd semnele $=$, $+$ şi $\cdot$ în sensul aritmetic obişnuit şi exprimînd universalitatea prin variabile libere, ori de cîte ori acest lucru este posibil) vom spune că $\mathcal{P}^0$ este sistemul care se obţine adăugînd la logica generală următoarele axiome:

A1. Toate cazurile lui $x = y \supset (Fx \supset Fy)$
†A2. $x = x$

---

[33] Pentru a păstra expresiile lui Gödel, ne-am depărtat aici de convenţiile stabilite anterior pentru simboluri, dar sensul este clar din context.

[34] Strict vorbind, $\mathcal{P}^0$ nu este aritmetica lui Peano, ci aritmetica lui Skolem, deoarece, după cum arătăm mai jos, acest sistem nu conţine o axiomă unică a inducţiei matematice.

B1. $\sim(x' = 0)$
B2. $x' = y' \supset x = y$
B3. Toate cazurile pentru $[Fo.(x)(Fx \supset Fx')] \supset (x)Fx$
C1. $x + 0 = x$
C2. $x + y' = (x + y)'$
D1. $x \cdot 0 = 0$
D2. $x \cdot y' = x \cdot y' + x$

Aici axiomele din grupa A corespund cu axiomele lui Frege pentru identitate, axiomele din grupa B corespund cu axioma a treia, a patra şi a cincea ale lui Peano, iar axiomele din grupele C şi D sînt respectiv difinițiile recursive pentru adunare şi înmulțire. Semnul din faţa lui A2 a fost pus pentru că A2 poate fi derivat din A1 şi C1 luate împreună şi deci este redundant în acest context, deşi, firește, nu este redundant în toate contextele.

Deoarece adesea nu este convenabil să avem de-a face cu o infinitate de axiome, s-au făcut încercări de a găsi un sistem mai simplu, adecvat pentru definiția funcțiilor recursive, iar A. Tarski, A. Mostowski şi R. M. Robinson au arătat în cartea *Undecidable Theories* (1953)[35] că un asemenea sistem*, denumit $\mathcal{J}$, se poate obține prin înlăturarea lui A1, A2 şi B3 punînd în locul lor

A11. $x = y \supset (x = z \supset y = z)$
A12. $x = y \supset x' = y'$
A13. $x = y \supset x + z = y + z$
A14. $x = y \supset z + x = z + y$
A15. $x = y \supset x \cdot z = y \cdot z$
A16. $x = y \supset z \cdot x = z \cdot y$
B31. $x = 0 \vee (\exists y)(x = y')$,

celelalte axiome din $\mathcal{P}^0$ rămînînd neschimbate. Aici axiomele A11—16, deşi sînt cazuri particulare ale schemei A1, sînt, luate împreună, suficiente pentru a înlocui A1 şi A2 în toate demonstrațiile din $\mathcal{P}^0$. Dar în ansamblu $\mathcal{J}$ este mai slab decît $\mathcal{P}^0$, deoarece B31 nu este nicidecum de aceeaşi putere ca principiul inducției matematice pe care îl înlocuieşte ; dimpotrivă, B31 este rezultatul cel mai slab posibil în $\mathcal{P}^0$, obținut făcînd uz de acest principiu, căci el nu spune decît că fiecare individ din sistem sau este identic cu 0 sau este succesor a ceva, ceea ce înseamnă în fond că fiecare individ este un număr natural.

Descoperirile lui Gödel au atras atenția asupra clasei funcțiilor care pot fi evaluate întotdeauna în mod sistematic, iar în 1936 Alonzo

[35] Prima publicație pare a fi memoriul "An Essentially Undecidable Axiom System", cu care R.M. Robinson a contribuit la *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Mass., 1950), I, pp. 729—730.

* Din motive tipografice, vom folosi pentru notarea sistemului Q, litera $\mathcal{J}$ (Nota trad.).

Church, urmînd o sugestie verbală a lui Gödel, a formulat teza că orice funcție efectiv calculabilă este recursivă[36]. Timp de veacuri, s-a considerat ca de la sine înțeles că anumite chestiuni matematice pot fi rezolvate prin reguli mecanice (sau algoritmi, după cum se numesc adesea în amintirea matematicianului arab Al Horezmi, al cărui nume nu a fost bine reținut), dar abia acum s-a încercat pentru prima dată să se precizeze această idee, propunerea făcută în acest sens cîștigînd de îndată asentimentul general. Church a conceput în mod independent un proiect de identificare a calculabilității efective cu o proprietate denumită de el λ-*definibilitate*, însă el a descoperit că aceasta era echivalentă cu recursivitatea, iar un an mai tîrziu A. M. Turing a demonstrat același lucru pentru *calculabilitatea prin mașină* pe care a propus-o ca o altă analiză a noțiunii de calculabilitate efectivă[37]. Importanța acestei teze constă în aceea că ea permite o nouă abordare a problemei deciziei, iar Church s-a folosit de aceasta pentru a demonstra în primul rînd imposibilitatea unei proceduri universale de decizie pentru un anumit fragment din teoria numerelor, și, în al doilea rînd, ca o consecință, imposibilitatea unei asemenea proceduri pentru logica generală[38]. Deoarece demonstrația sa este strîns legată de sistemul său de lambda-conversiune, care nu a fost explicat în această carte, nu vom încerca să reproducem aici demonstrația lui Church, dar în schimb vom examina o argumentație mai simplă, construită de Tarski, Mostowski și Robinson pe baza unei lucrări anterioare a lui Tarski, intitulată „Conceptul de adevăr în limbajele formalizate"[39].

Dacă există o procedură universală de decizie pentru $\mathcal{J}$ ea ne va permite să decidem dacă o formulă dată din $\mathcal{J}$ este adevărată sau nu, și aceasta ținînd seama numai de configurația (tiparul) formulei. Pînă aici, nu se poate obiecta nimic. Căci deși, după cum am menționat înainte, la origine adevărul este atribuit propozițiilor, este tot așa de propriu să vorbim de adevărul unei formule matematice, deoarece, conform regulilor simbolismului matematic, orice asemenea formulă exprimă, ori de cîte ori este utilizată, una și aceeași propoziție. Tot astfel putem vorbi de recunoașterea adevărului unei formule matematice, atunci cînd este cazul, ca de o recunoaștere pe baza

[36] „An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, LVIII (1936), pp. 345—63.

[37] "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, XLII (1937), pp. 230—65; "A Correction", *ibid.*, XLIII (1938), pp. 544—546; "Computability and λ-Definability", *Journal of Symbolic Logic*, II, (1937), pp. 153—163.

[38] "A Note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, I (1936), pp. 40—41; "A correction", *ibid.*, pp. 101—2. Aici se aplică la logică rezultatul obținut în articolul menționat în nota precedentă.

[39] *Undecidable Theories*, p. 46 și următoarele.

configurației, căci pentru determinarea adevărului sau falsității unei formule matematice nu poate prezenta importanță decît semnificația ei, iar conform regulilor simbolismului, această semnificație depinde numai de configurația formulei respective. Cînd spunem că o formulă din $\mathcal{J}$ este adevărată, înțelegem firește că ea este adevărată *în calitatea ei de formulă a lui* $\mathcal{J}$, sau, pe scurt: *în* $\mathcal{J}$.

Să presupunem acum că avem o procedură universală de decizie pentru $\mathcal{J}$, întrucît prin convențiile stabilite de Gödel orice formulă propozițională a sistemului, indiferent dacă este adevărată sau falsă, are un număr asociat, trebuie să existe o clasă de numere constînd doar din numerele formulelor adevărate și deci procedura noastră de decizie va fi o regulă mecanică pentru determinarea faptului dacă un număr aparține sau nu acestei clase. Dar conform cu teza lui Church, existența unei asemenea reguli mecanice implică caracterul recursiv al clasei de numere iar conform unei descoperiri amintite înainte aceasta la rîndul său face ca predicatul care determină clasa considerată să poată fi definit în $\mathcal{J}$. Apoi, dacă avem un asemenea predicat, să-i zicem $T(x)$, este evident că notînd cu N un număr asociat unei formule propoziționale în $\mathcal{J}$, $T(N)$ trebuie să fie deductibil din $\mathcal{E}_N$ și reciproc. Or, este imposibil ca aceste condiții să fie satisfăcute simultan. În adevăr, dacă $T(x)$ este o formulă predicat din $\mathcal{J}$, atunci și $\sim T\,(Diag\,(x))$, iar în virtutea ipotezei că aceasta din urmă este $\mathcal{E}_N$, putem construi în sistem o altă formulă $\mathcal{J}\ Diag\,(N)$, sau $\sim T(Diag(N))$, care prezintă însușirile paradoxului mincinosului. Această nouă formulă, pe care o putem nota pe scurt $\mathcal{L}$, spune că numărul denotat prin $Diag\,(N)$ are caracterul exprimat prin $\sim T(x)$, dar acest caracter poate aparține numai numărului unei formule false, iar numărul denotat prin $Diag\,(N)$ este numărul lui $\mathcal{L}$. Așadar $\mathcal{L}$ spune în fapt că $\mathcal{L}$ este falsă. Dacă ea este adevărată, atunci ea este falsă, iar dacă este falsă, atunci ea este adevărată. Pentru a înlătura această absurditate trebuie să părăsim supoziția noastră inițială și să admitem în locul ei faptul că dacă $\mathcal{J}$ este consistent, atunci nu avem pentru el o procedură universală de decizie.

Comparînd acest raționament ingenios cu demonstrația dată de Gödel în ce privește incompletabilitatea aritmeticii formale, vedem că în afară de concluziile stabilite mai apar două chestiuni de mare interes. În primul rînd în toate demonstrațiile este de importanță fundamentală faptul că sistemul supus investigației permite definirea funcției diagonale prin intermediul procedurii de aritmetizare a lui Gödel. Cel mai simplu sistem de teoria numerelor pe care-l cunoaștem și în care se poate defini această funcție, alături de toate celelate funcții recursive, este sistemul pe care Tarski, Mostowski și Robinson[40]

[40] *Ibid.*, pp. 52.

îl denumesc $\mathcal{R}$. Conținutul său teoretic este de fapt și mai redus decît al lui $\mathcal{J}$, dar el nu poate fi prezentat cu ajutorul unui sistem finit de axiome și deci este mai puțin util decît $\mathcal{J}$ pentru alte investigații ale problemei deciziei. În al doilea rînd, pentru ambele argumentații este esențial că există o deosebire între demonstrabilitate și adevăr chiar pentru sisteme complet axiomatizate, unde ambele noțiuni se suprapun. În timp ce prima noțiune se poate defini cu ajutorul simbolurilor sistemului la care se referă, deși nu astfel încît ea să devină recursivă, a doua noțiune nu poate fi definită fără introducerea unor concepte noi. Pe scurt, adevărul în matematică nu poate fi identificat cu demonstrabilitatea, tot astfel precum adevărul în cercetările empirice nu poate fi identificat cu verificabilitatea, iar orice doctrină filosofică ce susține contrariul trebuie să conțină o eroare.

Am văzut că nu poate exista o procedură universală de decizie pentru $\mathcal{J}$, pentru că acest sistem admite definiția funcției diagonale. Dar este evident că adăugarea unor axiome noi, compatibile cu cele vechi, nu poate produce un sistem în care să nu mai fie posibilă definirea funcției diagonale, astfel încît sîntem îndreptățiți să afirmăm că nu poate exista procedură universală de decizie pentru orice sistem (cum ar fi $\mathcal{P}^0$,$\mathcal{P}$ sau teoria mulțimilor) care îl conține pe $\mathcal{J}$ ca parte a sa. Tarski exprimă acest fapt spunînd că $\mathcal{J}$ este o teorie *esențial indecidabilă*. Numele nu este prea fericit ales (deoarece în alt context el poate fi folosit pentru referire la o ipoteză despre care nu putem afla niciodată dacă este adevărată sau falsă), dar noțiunea este foarte importantă. Căci acum s-a lămurit că în orice sistem matematic care cuprinde sistemul atît de modest $\mathcal{J}$ absența unei proceduri de decizie nu este o defecțiune la înlăturarea căreia ne putem gîndi prin introducerea unui nou aparat demonstrativ, ci o limitare pe care nu o putem depăși niciodată. Poate că Hilbert a avut dreptate susținînd că toate problemele matematice se pot rezolva, dar nu există și nu poate exista o metodă pentru rezolvarea tuturor problemelor. Nici un fel de ingeniozitate în proiectarea mașinilor de calcul nu va putea vreodată să înlăture necesitatea ingeniozității matematicianului.

Totuși, ar fi eronat să presupunem că sistemul este interesant numai pentru că ne permite să demonstrăm ceva cu privire la extinderile sale. Dacă $\mathcal{S}$ este un sistem consistent arbitrar în care poate fi interpretat $\mathcal{J}$, atunci $\mathcal{S}$, precum și toate extinderile sale consistente, sînt lipsite de o precedură universală de decizie. Prin „interpretare" înțelegem aici stabilirea unei corespondențe pentru semnele extralogice care sînt utilizate de obicei în investigarea sistemelor axiomatice, iar în legătură cu aceasta prezintă o mare importanță faptul că sistemul $\mathcal{J}$ are numai un număr finit de axiome. Cu această metodă

indirectă, Tarski şi colaboratorii săi au reuşit să demonstreze imposibilitatea unor proceduri universale de decizie pentru numeroase sisteme formale, printre care teoriile elementare: teoria grupurilor, teoria inelelor, teoria cîmpurilor şi teoria laticelor[41].

Dar oricît de importante ar fi aceste rezultate, pentru logician este mai interesant să observe că sistemul $\mathcal{J}$ poate fi utilizat pentru a demonstra imposibilitatea unei proceduri universale de decizie pentru logica generală, care este cuprinsă în $\mathcal{J}$ ca o parte a sa. În acest scop este convenabil să exprimăm toate propoziţiile din $\mathcal{J}$ cu o notaţie nouă, după cum urmează:

$$\begin{array}{lll} Id & (x, y) & \text{pentru } x = y, \\ Suc & (x, y) & \text{pentru } x' = y, \\ Sum & (x, y, z) & \text{pentru } x + y = z \\ Prod & (x, y, z) & \text{pentru } x \cdot y = z, \end{array}$$

folosind totodată variabile noi ori de cîte ori este nevoie. Simultan restabilim toţi cuantorii acolo unde ei au fost omişi pentru motive de concizie. Astfel, pentru ultima axiomă din mulţimea noastră obţinem:

$$D_2 \cdot (x)(y)(t)(u)(v)(w)[Prod(x,t,u) \cdot Suc(y,t) \cdot Prod(x,y,v) \cdot Sum(v,x,w) \supset Id(u,w)].$$

Evident, rezultatul va fi o mulţime de expresii foarte greoaie, mult mai puţin utile pentru nevoile calculului decît expresiile cu funcţii pe care le înlocuim; dar această trecere marchează în mod clar rolul logicii generale în cadrul sistemului. În adevăr, cînd litera A este introdusă ca o abreviere pentru conjuncţia axiomelor speciale ale sistemului în noua notaţie, iar litera F ca o abreviere a unei formule bine formate în aceeaşi notaţie, este evident că întrebarea dacă F se poate demonstra în cadrul sistemului se reduce la întrebarea dacă $A \supset F$ se poate demonstra în logica generală. Prin urmare, dacă ar fi posibil să dăm o procedură universală de decizie pentru logica generală, ar fi totdeauna posibil să stabilim în mod mecanic dacă $A \supset F$ este sau nu un truism al logicii generale, aşadar să conchidem asupra demonstrabilităţii lui F în $\mathcal{J}$. Dar aceasta revine la a avea o procedură universală de decizie pentru $\mathcal{J}$ ceea ce am arătat că este imposibil şi deci trebuie să admitem că pentru logica generală nu putem avea o procedură universală de decizie.

Faptul că un sistem de aritmetică formală cunoscut ca fiind incomplet este lipsit şi de o procedură universală de decizie nu este surprinzător; însă este remarcabil că logica generală, care s-a demonstrat că este completă (în sensul că este suficientă pentru demonstra-

[41] *Undecidable Theories*, pp. 5; 65 şi urm.

rea tuturor schemelor universal valide care se pot exprima cu ajutorul simbolismului logic) este totuşi lipsită de un asemenea algoritm. Toate truismele logicii generale ne sînt accesibile, dar nu avem o procedură care să ne dea certitudinea deciziei cu ajutorul unui număr finit de paşi asupra caracterului de truism sau nontruism al unei formule date. Ceea ce revine la a spune că oricît de mult timp am fi consumat în căutarea sistematică dar nereuşită a unei demonstraţii, ne mai putem aştepta ca totuşi demonstraţia să fie stabilită ulterior.

5. *Locul logicii printre ştiinţe*

În antichitate s-a discutat mult dacă logica trebuie să fie considerată ca o ramură a filosofiei, după cum susţineau stoicii, sau doar ca un preliminariu la cercetările filosofice, după cum considerau peripateticii. Dar această dispută n-a fost o simplă ceartă de cuvinte. Ambele părţi erau de acord că formarea unui filosof trebuie să înceapă cu logica ; iar dacă stoicii, spre deosebire de Aristotel, denumeau logica parte a filosofiei, aceasta se datora faptului că ei au venit mai tîrziu şi erau mai conştienţi de aspectele doctrinei lor în calitate de sistem. În secolele următoare ceea ce mulţi au denumit logică nu este decît studiul problemelor pe care le-a dezbătut Aristotel în lucrările din *Organon*-ul său : în ce priveşte noutatea contribuţiei stoicilor, aşa cum o vedem retrospectiv, ea nu constă în vreo altă demarcare a obiectului de studiu, ci pune accentul pe relaţiile dintre propoziţii, care sînt altceva decît relaţiile dintre universalii (adică : concepte). Dar Aristotel nu a conturat în mod clar domeniul logicii şi pentru acest motiv probleme importante cu privire la relaţiile ei cu celelalte ştiinţe au rămas să fie discutate în perioada modernă.

În doctrina silogistică din *Analiticile prime*, Aristotel enunţă unele principii generale cu privire la o relaţie dintre clase pe care el o numeşte *incluziune într-un întreg* (ἐν ὅλῳ τῷ *A* εἶναι) sau o relaţie între universalii pe care el o denumeşte apartenenţă (ὑπάρχειν) sau *a fi predicat* (κατηγορεῖσθαι), de exemplu principiul : *dacă A aparţine la toţi B şi B aparţine la toţi C, atunci A aparţine la toţi C*. Dar este limpede că el consideră aceste principii ca fiind importante tocmai pentru că ele garantează validitatea unor scheme de argumentaţie pentru toate materiile la care se aplică. Iar pe dînsul îl interesează asemenea scheme de argumentaţie în primul rînd fiindcă el consideră că ele sînt necesare pentru elaborarea ştiinţei pe care o expune în *Analiticile secunde*. De aceea nu este de mirare că discipolii săi au pus adesea în legătură logica cu teoria cunoaşterii şi psihologia raţionamentului. În alte părţi ale *Organon*-ului, Aristotel se

ocupă cu modalităţile termenilor de a avea semnificaţie şi cu clasificarea entităţilor la care ei se pot aplica. În cadrul preliminariilor la silogistica sa, întîlnim în mare măsură o analiză a vorbirii şi o clasificare a enunţurilor. Şi iarăşi, nu este de mirare că în secolele următoare logica a fost uneori aşezată alături de gramatică şi retorică în calitate de *ars sermocinalis*. Cît timp autorii considerau că sursa principală pentru logică sînt lucrările lui Aristotel, asemenea deosebiri de concepţie nu produceau neplăceri intelectuale prea mari; deplasîndu-şi atenţia spre porţiunile *Organon*-ului cu care se ocupau, logicienii continuau să conceapă logica drept ceva care se ocupă cu cuvinte, gînduri şi lucruri. Dar în urma evoluţiei din ultimul secol a devenit imposibil să ne mai mulţumim cu gruparea strict tradiţională a temelor. Ţinînd seama de unele analogii sugerate de lucrările lui Aristotel şi ale discipolilor săi, matematicienii şi filosofii au făcut uz de cuvîntul „logică" în contexte la care vechii logicieni nu s-au gîndit niciodată. Rezultatul este o confuzie în care unele uzanţe ale cuvîntului sînt atît de depărtate de altele, încît acesta nu mai serveşte la o comunicare clară între gînditori de diferite tendinţe. În această situaţie, trebuie în primul rînd să examinăm ce anume ocupă locul central în tradiţia noastră iar apoi să încercăm pe cît posibil să stabilim convenţii care ar uşura aprecierea felului în care acest miez central este legat de alte domenii cu care a fost pus în legătură în cadrul concepţiilor diferiţilor gînditori.

Deşi Boole îşi denumise lucrarea de logică cea mai ambiţioasă *The Laws of Thought*, iar uneori scria ca şi cum ar fi considerat că se ocupă cu structura intelectului uman, este totuşi clar că algebra sa nu are nimic de-a face cu procesele de gîndire. Toate interpretările ei pe care le denumim logice se ocupă cu relaţii între entităţi care sînt în întregime nementale. În lucrările lui Frege posibilitatea de confundare a logicii cu psihologia este şi mai mică, deoarece în multe ocazii autorul stabileşte în mod explicit deosebirea dintre ele. Este adevărat că el îşi consideră sistemul de convenţii ca un „limbaj simbolic al gîndirii pure" (*eine Formelsprache des reinen Denkens*), dar explicaţiile sale arată că el nu înţelege prin această expresie un limbaj pentru a vorbi despre un anumit mod particular de gîndire. Dimpotrivă, atunci cînd afirmă că aritmetica este identică cu logica, el stabileşte în mod clar că după opinia sa enunţurile aritmetice se ocupă cu obiecte, şi anume numere, care nu sînt construite de către gîndirea umană sau dependente în vreun fel de gîndirea umană. Sistemul său de notaţie este un limbaj al gîndirii pure numai în sensul că el este destinat pentru desemnarea adevărurilor pe care le gîndim atunci cînd facem cu totul abstracţie de conţinutul particular al diverselor noastre experienţe. Această descriere nu este suficient de precisă

ca să indice că e vorba de un limbaj bun numai pentru formularea principiilor logicii. După cîte spune titlul, prima carte a lui Frege ar putea să fie cu privire la un nou simbolism pentru metafizică; dar nu încape îndoială că el îl concepe ca un auxiliar pentru dezvoltarea științei pe care a inițiat-o Aristotel în ale sale *Analitici prime*. După părerea sa, aritmetica, pe care el o identifică cu logica, este știința fundamentală. Dar ea nu se referă la ceea ce filosofii denumesc îndeobște lumea exterioară, adică lumea lucrurilor din spațiu. Pe de altă parte, ea nu se referă nici la gîndire. Ea se referă la inferențele pe care le face gîndirea, dar numai pentru că se ocupă cu conexiunile dintre cele ce pot fi gîndite. Legile ei nu sînt legi ale naturii, ci legi asupra naturii[42].

Vom argumenta aici că această ultimă observație pe care Frege o lansează mai curînd ca o vorbă de duh decît ca o definiție poate fi luată în serios ca delimitare a domeniului logicii. Dar deocamdată obiectivul nostru principal rezidă în a atrage atenția asupra faptului că Boole și Frege, ca, anterior, și Leibniz, prezentau logica drept un sistem de principii care permit inferențe valide în toate domeniile posibile, adică în calitate de teorie a relațiilor, așa cum își considera Aristotel doctrina silogismelor sau Hrisip, în numeroasele sale cărți, regulile derivate de inferență. După cum am văzut, în tradiția învățămîntului logicii apar și alte elemente, dar marii logicieni ai timpurilor moderne au considerat aceasta ca fiind tema centrală, și pare rezonabil să spunem că toate elementele din *Corpus* își găsesc locul în virtutea conexiunii lor cu obiectivul principal de clasificare și articulare a principiilor inferenței formal-valide. Pînă aici totul este clar; dar dezvoltările din secolul nostru au adus unele incertitudini și au făcut necesară o precizie mai mare în caracterizarea logicii.

În primul rînd, a venit descoperirea paradoxurilor chiar în cadrul pe care Cantor și Frege îl atribuiau logicii. Aceasta constituie o perturbare, deoarece arată că convingerile pe care filosofii le-au denumit uneori „intuiții logice" pot fi eronate. Brouwer a susținut chiar că trebuie să negăm validitatea generală a principiului terțiului exclus. Însă în afară de aceasta, el și-a exprimat îndoiala cu privire la corectitudinea încercărilor de a identifica aritmetica cu logica. Hilbert, după cum am văzut, preferă să considere aritmetica drept derivată dintr-o mulțime particulară de axiome care se adaugă aparatului teoriei cuantificării. Iar Whitehead și Russell, deși continuă să susțină teza lui Frege, recurg la expediente care arată cît de specifică este accepția pe care o dau cuvîntului „logică". Teoria lui Russell a tipurilor logice pare plauzibilă multor filosofi, dar chiar și cei care o adop-

[42] *Grundlagen der Arithmetik*, §§ 87, 93.

tă au observat uneori că ea pare mai curînd o metafizică decît o logică în sensul tradiţional şi că, fără îndoială, axiomele reductibilităţii şi infinitului, pe care Russell consideră necesar să le introducă o dată cu teoria sa a tipurilor, nu sînt ceea ce numim de obicei principii ale logicii.

Al doilea eveniment al secolului nostru, care a determinat necesitatea reconsiderării domeniului logicii, este dezbaterea cu privire la necesitate şi limbaj despre care am vorbit în capitolul nostru cu privire la filosofia logicii după Frege. Unii dintre cei care adoptă punctul de vedere convenţionalist asupra logicii vor să includă în această denumire toate adevărurile apriorice, crezînd că acestea devin adevărate conform regulilor lingvistice. Dacă uzanţa lor ar deveni generală, ar fi lipsit de sens să ne mai întrebăm dacă Frege avea sau nu dreptate cînd concepea aritmetica drept o continuare a logicii, deoarece aritmetica ar fi indubitabil logica numerelor, după cum geometria ar fi logica formelor, mecanica logica „forţei", economia analitică logica „preţului", teologia filosofică (în ipoteza că ar exista o asemenea ştiinţă) ar fi logica „Providenţei" şi aşa mai departe. O asemenea vastă extindere a semnificaţiei unui termen tehnic îl face nefolositor în orice clasificare, aşa că ne putem felicita că deocamdată acest mod de a gîndi aparţine unei şcoli relativ restrînse. Dar este uşor de văzut că extinderile au fost sugerate de unele elemente din vechea tradiţie. Încă de pe vremea lui Aristotel, logicienii au discutat regulile semantice de utilizare a unor cuvinte ca „toţi", „dacă", „sau", „poate". Dacă presupunem că toate principiile logicii tradiţionale, cum ar fi cele pentru diferitele moduri silogistice, ar fi adevărate în virtutea unor reguli semantice pentru utilizarea cuvintelor cu ajutorul cărora se exprimă, este firesc să remarcăm că multe alte enunţuri devin adevărate în acelaşi fel şi, poate, se clarifică motivul pentru care spunem că toate acestea ţin de logică. Dar şi înainte de a fi fost dezvoltată în întregime această teorie, cuvîntul „logic" era uneori utilizat în discuţiile asupra necesităţii în opoziţie cu „cauzal", ca şi cum aceste două cuvinte ar acoperi întregul domeniu al necesităţii.

Odată ce asupra definiţiei cuvîntului „logică" nu s-a căzut de acord, problema dacă teoria mulţimilor sau orice altă ramură a cunoaşterii apriorice poate fi considerată ca o parte a logicii este de tipul celor care se pot rezolva numai printr-o legiferare lingvistică. Numai că o asemenea legiferare poate fi adecvată sau nu. Este de dorit ca orice reguli noi pe care le adoptăm în mod deliberat pentru cuvinte vechi să se depărteze cît mai puţin posibil de deprinderile stabilite anterior şi ca distincţiile de care depind ele să fie distincţii importante pentru organizarea cunoaşterii. Astfel, dacă considerăm că logica tradiţională s-a ocupat în primul rînd cu principiile inferenţei valide în toate